

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний вищий навчальний заклад
«Київський електромеханічний коледж»

МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА
для студентів 1-2 курсу з предмету
«Математика»

ТЕМА:
«Розв’язування задач з параметрами»

для спеціальностей:

- 123 «Комп’ютерна інженерія»*
- 151 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології»*
- 172 «Телекомунікації та радіотехніка»*
- 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»*
- 273 «Залізничний транспорт»*
- Обслуговування та ремонт пристроїв електрозв’язку на транспорті*
- Технічне обслуговування, ремонт та експлуатація тягового рухомого складу*

Викладача Дуднік С.І.

2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Державний вищий навчальний заклад
«Київський електромеханічний коледж»**

РОЗГЛЯНУТО ТА УХВАЛЕНО

цикловою комісією
природничо-математичних
дисциплін
Протокол №7 від
«17» лютого 2020 р.
Голова циклової комісії
_____ (С.І.Дуднік)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Заступник директора з НР
_____ (О. І. Марченко)

“ ____ ” _____ 2020 р.

**МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА
для студентів 1-2 курсу з предмету
«Математика»**

**ТЕМА:
«Розв’язування задач з параметрами»**

Викладача Дуднік С.І.

Київ 2020

ПЕРЕДМОВА

Основними завданнями позаурочної освіти у галузі математики є ознайомлення студентів з нестандартними підходами та методами розв'язування задач, розширення та поглиблення знань з математики, розгляд важливих тем, які недостатньо висвітлені у програмному курсі, виконання посильних для студентів дослідно-експериментальних завдань, науково-дослідницька робота.

Ці питання дуже вдало можна вирішити за допомогою практичних завдань, зокрема задач з параметрами, бо вони відкривають перед студентами значну кількість евристичних прийомів загального характеру, які мають цінність для математичного розвитку особистості, застосовуються у дослідженнях і на будь-якому іншому математичному матеріалі. Задачі з параметрами нерідко з'являються у прикладних напрямках елементарної математики та в дослідницьких завданнях. Вони сприяють формуванню в учнів логічного мислення, розвитку вміння лаконічно та прозора записувати розв'язання, перебирати всі можливі варіанти розташування графіків, що є основою для виховання юних дослідників природничих наук.

Метою написання навчально-методичного посібника є поступове адаптування читачів до завдань з параметрами, розвиток варіативного мислення та дослідницьких умінь.

Задачі з параметрами є одними з найважчих задач курсу елементарної математики. Їхнє розв'язання по суті це є дослідження функцій, що входять в умову задачі, і подальше розв'язання рівнянь або нерівностей з числовими коефіцієнтами. При розв'язуванні рівнянь (нерівностей) з параметрами потрібно з'ясувати, при яких значеннях параметра задане рівняння (нерівність) має розв'язок, і знайти всі ці розв'язки. У тому випадку, коли хоча б одне з допустимих значень параметра не досліджено, задача не вважається повністю розв'язаною.

Протягом тривалого часу задачі з параметрами входять в екзаменаційні білети з математики для абітурієнтів вищих навчальних закладів, а в останні роки такі задачі пропонуються й при складанні ЗНО. Це дуже важкий матеріал, що вимагає великої кількості часу; крім того, перш ніж приступати до розв'язання подібних задач студент повинен досконало оволодіти загальним курсом математики.

У розділі «Теоретичний матеріал» описано основні принципи та методи розв'язання задач з параметрами, типи цих задач, розглянуті етапи розв'язання деяких дослідницьких задач з параметрами.

У розділі «Задачі з розв'язками» наводяться розв'язки задач із параметрами, що стосуються заданої теми. Цей розділ містить велику кількість задач, розв'язання яких ґрунтуються, з одного боку, на загальних теоретичних відомостях з математики (означеннях, правилах, теоремах, наслідках), а з іншого боку — на специфічних особливостях задач, що містять параметри (умінні певним чином класифікувати значення параметра, переході від початкової задачі до рівносильної їй, використанні найраціональнішого методу розв'язання, умінні мислити логічно тощо). На завершення будь-яка задача супроводжується докладною відповіддю, у якій для кожного допустимого значення параметра записується відповідний до цього значення розв'язок задачі.

Розділ «Задачі для самостійного розв'язання» розрахований на тих, хто вже засвоїли попередній розділ і хочуть закріпити свої знання й уміння самостійно.

Наприкінці наводиться список літератури, якою користувався автор при підготовці даного видання. Багато задач, взятих із зазначених посібників, входили в екзаменаційні білети для вступників у різні вузи країни.

Зміст

Передмова

Частина 1. Теоретичний матеріал

1.1. Основні поняття

1.2. Розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами

1.3. Метод січних

1.4. Графічне розв'язування рівнянь з параметрами

Частина 2. Вибрані задачі

2.1. Задачі з розв'язками

1. Лінійні рівняння з параметром.

2. Квадратні рівняння з параметром.

3. Цілі нерівності з параметром

4. Дробові раціональні рівняння з параметрами.

5. Дробові раціональні нерівності з параметрами

6. Ірраціональні рівняння з параметрами

7. Ірраціональні нерівності з параметрами

8. Показникові рівняння з параметрами

9. Логарифмічні нерівності

10. Тригонометричні рівняння з параметрами

11. Тригонометричні нерівності з параметрами

2.2. Задачі для самостійного розв'язання

Список літератури

Частина 1. Теоретичний матеріал

1.1 Основні поняття

У задачах, які описують реальні фізичні процеси, досить часто крім невідомих зустрічаються величини, які називаються параметрами. Їх, як правило, позначають літерами k, n, m, c, b, a і т.д., а невідомі z, y, x і т.д.

В основу розв'язування задач з параметрами покладено такий принцип: значення параметра (або параметрів) вважається довільно фіксованим і розв'язок задачі знаходиться традиційними методами.

Проте наявність параметрів у задачі передбачає обов'язкове дослідження існування розв'язку залежно від конкретних числових значень параметрів із області їх допустимих значень. А також знаходження всіх таких розв'язків.

Задачі з параметрами, таким чином, розглядаються як ціла множина рівнянь, нерівностей або їх систем, які отримують коли параметри набувають конкретних значень.

Форма запису відповіді у задачах з параметрами має спеціальний вигляд: значення невідомих вказуються для кожного допустимого значення параметрів.

Для розв'язування задач з параметрами необхідні ґрунтовні знання властивостей елементарних функцій, рівносильних перетворень рівнянь, нерівностей та їх систем.

1.2 Розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами

Будь-яке рівняння чи нерівність з параметрами можна розв'язувати як звичайне рівняння чи нерівність без параметрів, але лише доти, доки кожна перетворення або міркування, необхідні для розв'язування, можна виконати однозначно. Якщо ж якесь перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язання потрібно розбити на різні випадки залежно від значення параметра, щоб у кожному з них відповідь через параметри записувалась однозначно.

На етапі пошуку плану розв'язування рівняння чи нерівності з параметрами або у ході розв'язування часто зручно супроводжувати відповідні міркування схемами, за якими легко простежити, у який момент ми не змогли однозначно виконати необхідні перетворення, на скільки випадків довелося розбити розв'язання та чим відрізняється один випадок від іншого.

Наприклад, якщо в рівнянні $(a + 3) \cdot x = 7$, де x — змінна, a — позначає якесь число, то кажуть, що це рівняння з параметром a .

Наприклад, щоб розв'язати рівняння $(a + 3) \cdot x = 7$, потрібно розглянути випадки:

1) якщо $a + 3 = 0$, тобто $a = -3$, одержимо рівняння $0 \cdot x = 7$, яке немає коренів;

2) якщо $a + 3 \neq 0$, тобто $a \neq -3$, то рівняння має один корінь $x = \frac{7}{a+3}$, до того ж він єдиний.

Відповідь. Якщо $a = -3$, то рівняння немає коренів; якщо $a \neq -3$, то рівняння має корінь $x = \frac{7}{a+3}$.

Узагалі будь-яке лінійне рівняння можна звести до рівняння виду $ax = b$, де a та b – деякі числа.

При розв'язанні більш складних рівнянь чи нерівностей слід пам'ятати, що рівняння чи нерівності з параметрами найчастіше розв'язуються за допомогою рівносильних перетворень, а всі рівносильні перетворення рівнянь чи нерівностей виконують на області допустимих значень (ОДЗ) заданого рівняння чи нерівності (тобто на спільній області визначення для всіх функцій, які входять до запису рівняння чи нерівності). Тому, перш ніж записати відповідь, потрібно обов'язково врахувати ОДЗ заданого рівняння чи нерівності.

Деякі дослідницькі задачі з параметрами вдається розв'язати за такою схемою:

- 1) розв'язати задане рівняння чи нерівність;
- 2) дослідити одержаний розв'язок.

Розв'язування деяких дослідницьких задач з параметрами можна звести до використання необхідних і достатніх умов розміщення коренів квадратного тричлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) відносно заданих чисел A і B , яка включає:

- 1) знак коефіцієнта при старшому члені;
- 2) знаки значень $f(A)$ і $f(B)$;
- 3) знак дискримінанта D ;
- 4) положення абсциси вершини параболи $(x_0 = -\frac{b}{2a})$ відносно даних чисел A і B .

1.3 Метод січних

Припустимо, що рівняння (або нерівність) з параметром вдалося звести до вигляду $f(x) = g(x; a)$ (або $f(x) > g(x; a)$, $f(x) < g(x; a)$), де $f(x)$, $g(x; a)$ – досить прості функції, графіки яких легко побудувати.

Співвідношення $y_1 = f(x)$ визначає на координатній площині деяку криву (фіксовану множину), співвідношення $y_2 = g(x; a)$ – цілу сім'ю кривих, у якій

кожному допустимому значенню параметра a відповідає одна крива (параметрична сім'я).

Залежно від значень параметра a криві сімейства $y_2 = g(x; a)$ можуть займати різні положення відносно фіксованої множини $y_1 = f(x)$. Вивчаючи принципово різні положення кривих параметричної сім'ї відносно фіксованої множини і визначаючи значення параметра, яким вони відповідають, можна дослідити питання розв'язання відповідного рівняння або нерівності.

1.4 Графічне розв'язування рівнянь з параметрами

Дістати вичерпну інформацію про кожний з параметрів проміжку $(-\infty; +\infty)$ при розв'язуванні рівнянь з параметрами можна, використовуючи графічний метод.

На графіку видно, при яких значеннях параметра рівняння має розв'язки (і скільки), при яких – не має.

Метод графічного розв'язування рівнянь з параметрами складається з таких етапів:

1. Знаходимо область допустимих значень невідомого і параметрів, що входять до рівняння.

2. Виражаємо параметр a як функцію від x .

3. В системі координат xOa будуємо графік функції $a = f(x)$ для тих значень x , які входять до ОДЗ даного рівняння.

4. Знаходимо точки перетину прямої $a = c$, де c належить проміжку $(-\infty; +\infty)$ з графіком функції $a = f(x)$.

Можливі випадки:

- а) пряма $a = c$ не перетинає графік функції $a = f(x)$. При цьому значенні a рівняння розв'язків не має;

- б) пряма $a = c$ перетинає графік функції $a = f(x)$. Тоді визначаємо абсциси точок перетину. Для цього достатньо розв'язати рівняння $a = f(x)$ відносно x .

5. Записуємо відповідь.

Частина 2. Вибрані задачі

2.1. Задачі з розв'язками

1. Лінійні рівняння з параметром.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $4x + c = c^2x + 2$.

Виконаємо перетворення:

$$4x + c = c^2x + 2 \Leftrightarrow 4x - c^2x = 2 - c \Leftrightarrow (4 - c^2)x = 2 - c \Leftrightarrow (2 - c)(2 + c)x = 2 - c$$

Якщо $2 - c = 0$, тобто $c = 2$, то рівняння набуває виду $0 \cdot x = 0$. Це рівняння має безліч коренів.

Якщо $2 + c = 0$, тобто $c = -2$, то рівняння набуває виду $0 \cdot x = 4$. Це рівняння немає коренів.

Якщо $c \neq 2$ і $c \neq -2$, то рівняння має єдиний розв'язок $x = \frac{2-c}{(2-c)(2+c)} = \frac{1}{2+c}$.

Відповідь. Якщо $c = 2$, то $x \in R$; якщо $c \neq 2$, то $x \in \emptyset$; якщо $c \neq \pm 2$, то $x = \frac{1}{2+c}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $(a^2 - 3a - 4)x + 16 = a^2$. У відповідь записати значення параметра a , за якого рівняння має безліч розв'язків.

Запишемо дане рівняння у вигляді

$$(a - 4)(a + 1)x = a^2 - 16; (a - 4)(a + 1)x = (a - 4)(a + 4).$$

Якщо $a = -1$, то $0 \cdot x = -15 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

Якщо $a = 4$, то $0 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \in R$.

Якщо $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 4) \cup (4; +\infty)$, то $x = \frac{(a-4)(a+4)}{(a-4)(a+4)} = \frac{a+4}{a+1}$.

Відповідь. 4.

2. Квадратні рівняння з параметром.

Розв'язання квадратного рівняння з параметром слід розпочинати із питання «А чи є рівняння квадратним?».

Якщо коефіцієнт біля x^2 може набувати нульового значення, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ претвориться в лінійне рівняння $bx + c = 0$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $ax^2 + 2x + 1 = 0$.

Розв'язання почнемо з випадку , коли $a = 0$. Тоді одержимо рівняння $2x + 1 = 0$, звідки $x = 0,5$.

Якщо $a \neq 0$, то обчислимо: $D = 4 - 4a = 4(1 - a)$.

Якщо $D < 0$, то $a > 1$ і $x \in \emptyset$.

Якщо $D = 0$, то $a = 1$ і $x = \frac{-2}{2} = -1$.

Якщо $D > 0$, то $a < 1$ і $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$.

Відповідь. Якщо $a = 0$, то $x = 0,5$; якщо $a = 1$, то $x = -1$; якщо $a \in (1; +\infty)$, то $x \in \emptyset$; якщо $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$, то $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$.

Приклад 3.

За якого значення параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ найменша?

За умови $D = (2 - a)^2 + 4(a + 3) \geq 0$ за теоремою Вієта маємо: $\begin{cases} x_1 + x_2 = a - 2; \\ x_1 \cdot x_2 = -a - 3. \end{cases}$

Тоді $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (a - 2)^2 + 2(a + 3) = a^2 - 2a + 10 = (a - 1)^2 + 9$.

Сума $x_1^2 + x_2^2$ набуває найменшого значення, якщо $a = 1$, то корені існують, оскільки $D = (2 - 1)^2 + 4(1 + 3) > 0$.

Відповідь. 1.

3. Цілі нерівності з параметром

Приклад 4.

За якого найменшого цілого значення параметра a нерівність $(a - 1)x^2 - 2x - a > 0$ справедлива для довільного $x > 3$?

Розглянемо випадок, коли $a = 1$.

Тоді одержимо $-2x - 1 > 0$ або $x < -0,5$. У цьому випадку умова задачі не виконується.

Нехай $a \neq 1$. Знайдемо нулі функції з рівняння

$$(a - 1)x^2 - 2x - a = 0.$$

$$D = 4 + 4(a - 1)a = 4(a^2 - a + 1) > 0$$

за довільного значення a .

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{a^2 - a + 1}}{a - 1}.$$

Для виконання умови задачі, необхідно щоб графіком функції була парабола вітками вгору, тобто $a - 1 > 0$, більший нуль функції задовольняв умову $x_2 \leq 3$, і значення функції при $x = 3$ було невід'ємним.

Тоді:

$$\begin{cases} a > 1; \\ (a-1)3^2 - 2 \cdot 3 - a \geq 0; \Leftrightarrow \\ \frac{1+\sqrt{a^2-a+1}}{a-1} \leq 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 1; \\ 9(a-1) - 6 - a \geq 0; \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{15}{8}; \\ \sqrt{a^2-a+1} \leq 3a-4. \end{cases} \\ 1 + \sqrt{a^2-a+1} \leq 3(a-1); \end{cases}$$

Розв'яжемо другу нерівність системи, піднісши до квадрату обидві її частини, оскільки вони невід'ємні при довільних a .

$$a^2 - a + 1 \leq 9a^2 - 24a + 16 \Leftrightarrow 8a^2 - 23a + 15 \geq 0.$$

Графіком функції є парабола вітками вгору.

Знайдемо нулі функції з рівняння

$$8a^2 - 23a + 15 = 0,$$

$$a_1 = 1; a_2 = \frac{15}{8}.$$

Розв'язками нерівності є проміжки $(-\infty; 1] \cup \left[\frac{15}{8}; +\infty\right)$.

Розв'язками системи нерівностей є проміжок $\left[\frac{15}{8}; +\infty\right)$.

Тоді найменше ціле значення $a = 2$.

Відповідь. 2.

4. Дробові раціональні рівняння з параметрами.

Приклад 5.

Розв'язати рівняння $\frac{2x}{x+2} = 2 + \frac{a}{x}$.

ОДЗ: $x \neq -2$; $x \neq 0$.

Одержимо ціле рівняння, помноживши його на $x(x+2) \neq 0$.

$$2x^2 = 2x(x+2) + a(x+2) \Leftrightarrow$$

$$4x + ax + 2a = 0 \Leftrightarrow$$

$$(4+a)x = -2a.$$

Якщо $a = -4$, то $0x = 8$. Рівняння коренів немає.

Якщо $a \neq -4$, то $x = \frac{-2a}{4+a}$.

З'ясуємо, за яких значень a знайдені корені не входять в ОДЗ.

При $x = -2$, маємо $\frac{-2a}{4+a} = -2 \Leftrightarrow 2a = 8 + 2a \Leftrightarrow 0a = 8 \Leftrightarrow a \in \emptyset$.

При $x = 0$, маємо $\frac{-2a}{4+a} = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Відповідь. Якщо $a = 0$ або $a = -4$, то $x \in \emptyset$; якщо $a \neq 0$ або $a \neq -4$, то $x = \frac{-2a}{4+a}$.

Приклад 6.

Знайти всі значення параметра a , за яких рівняння $\frac{(x+a)(x-5a)}{x+7} = 0$ має один корінь. У відповідь записати найменший з них.

ОДЗ: $x + 7 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -7$.

Дане рівняння рівносильне наступному

$$(x+a)(x-5a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+a=0; \\ x-5a=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-a; \\ x=5a. \end{cases}$$

З'ясуємо, за яких *значеннях* a знайдені корені не входять в ОДЗ.

При $x = -7$, одержимо

$$\begin{cases} -7 = -a; \\ -7 = 5a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7; \\ a = -1,4. \end{cases}$$

Якщо $a = 7$, то $x = 5 \cdot 7 = 35$ - єдиний корінь.

Якщо $a = -1,4$, то $x = -(-1,4) = 1,4$ - єдиний корінь.

Якщо $-a = 5a \neq 7$, тобто $a = 0$, рівняння матиме теж єдиний корінь.

Найменше значення $a = -1,4$.

Відповідь. $-1,4$.

5. Дробові раціональні нерівності з параметрами

Приклад 7.

Розв'язати нерівність $\frac{x-2}{ax-1} < 0$.

Якщо $a = 0$, то одержимо лінійну нерівність

$$-x + 2 < 0 \Leftrightarrow x > 2.$$

Якщо $a \neq 0$, то дана нерівність розв'язується методом інтервалів.

Нулі двочленів: $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{1}{a}$, до того ж :

1) $x_1 = x_2 = 2$, якщо $a = 0,5$. Нерівність рівносильна наступній $(x-2)^2 < 0$,

яка немає розв'язків.

2) $x_2 < x_1$, якщо $\frac{1}{a} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-2a}{a} > 0 \Leftrightarrow a < 0$ або $a > 0,5$.

При $a < 0$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a}\right) \cup (2; +\infty)$; при $a > 0,5$, то $x \in \left(\frac{1}{a}; 2\right)$.

3) $x_1 < x_2$, якщо $a \in (0; 0,5)$, то $x \in \left(2; \frac{1}{a}\right)$.

Відповідь. Якщо $a < 0$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a}\right) \cup (2; +\infty)$; якщо $a = 0$, то $x \in (2; +\infty)$; якщо $a \in (0; 0,5)$, то $x \in \left(2; \frac{1}{a}\right)$; якщо $a = 0,5$, то $x \in \emptyset$; якщо $a > 0,5$, то $x \in \left(\frac{1}{a}; 2\right)$.

Приклад 8.

Знайти всі значення параметра a , при кожному з яких нерівність $\frac{|x^2 + 4a(a-x) + 4|}{|x-2a|} \leq 2x + 3 - x^2$ має хоча б один розв'язок. У відповідь записати найбільше значення параметра a .

Перетворимо чисельник дробу:

$$|x^2 + 4a(a-x) + 4| = |x^2 + 4a^2 - 4ax + 4| = |(x-2a)^2 + 4| = (x-2a)^2 + 4.$$

Ліва частина нерівності перетвориться так:

$$h(x) = \frac{(x-2a)^2 + 4}{|x-2a|} = |x-2a| + \frac{4}{|x-2a|} = 2 \left(\frac{|x-2a|}{2} + \frac{2}{|x-2a|} \right).$$

Для будь-яких невід'ємних виразів b виконується нерівність

$$b + \frac{1}{b} \geq 2.$$

Тому

$$\frac{|x-2a|}{2} + \frac{2}{|x-2a|} \geq 2.$$

Отже $h(x) \geq 4$, тобто

$$|x-2a| + \frac{4}{|x-2a|} \geq 4.$$

Права частина перетворюється так:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x - 3) = -(x-1)^2 + 4,$$

тому

$$-(x-1)^2 + 4 \leq 4.$$

Маємо

$$h(x) \geq 4, f(x) \leq 4,$$

то задана нерівність виконується, якщо

$$h(x) = f(x) = 4.$$

З умови $f(x) = 4$ випливає

$$-(x-1)^2 + 4 = 4 \Leftrightarrow x = 1.$$

З умови $h(x) = 4$ випливає

$$2\left(\frac{|1-2a|}{2} + \frac{2}{|1-2a|}\right) = 4.$$

Нехай $\frac{|1-2a|}{2} = t$.

Тоді

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Маємо

$$\frac{|1-2a|}{2} = 1 \Leftrightarrow |1-2a| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2a = 2; \\ 1-2a = -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,5; \\ a = 1,5. \end{cases}$$

Найбільше значення $a = 1,5$.

Відповідь. 1,5.

6. Ірраціональні рівняння з параметрами

Приклад 9.

За якого найбільшого значення параметра a рівняння $(\sqrt{x-2} - 3)(x - a) = 0$ має єдиний корінь?

ОДЗ: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} - 3 = 0; \\ x - a = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 3; \\ x = a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 9; \\ x = a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11; \\ x = a. \end{cases}$$

Рівняння має лише один корінь $x = 11$, якщо $a < 2$ або якщо $a = 11$.

Найбільше значення параметра $a = 11$.

Відповідь. 11.

Приклад 10.

За яких значеннях параметра a рівняння $\sqrt{a + \sqrt{a + x}} = x$ має єдиний корінь.

Оскільки ліва частина рівняння невід'ємна, то рівняння може мати корінь лише якщо $x \geq 0$.

Нехай $\sqrt{a + x} = y, y \geq 0$. Тоді

$$\begin{cases} \sqrt{a + x} = y; \\ \sqrt{a + y} = x; \\ x \geq 0, y \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - x - a = 0; \\ x^2 - y - a = 0; \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Віднявши від першого рівняння друге, отримаємо:

$$y^2 - x^2 + y - x = 0 \Leftrightarrow (y - x)(y + x + 1) = 0.$$

Скільки $y + x + 1 > 0$ за усіх значень змінних, то залишається одна можливість:

$$y - x = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Отже система набирає вигляду:

$$\begin{cases} x^2 - x - a = 0; \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Вона має один додатний корінь у таких випадках:

$$1) \quad \begin{cases} D = 1 + 4a = 0; \\ x_0 = \frac{1}{2} \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4};$$

2) $a > 0$ (корені квадратного тричлена $dx^2 + bx + c$ мають різні знаки, коли $dc < 0$).

Відповідь. $a = -\frac{1}{4}$ або $a > 0$.

7. Ірраціональні нерівності з параметрами

Приклад 11.

Розв'язати нерівність $\sqrt{x+a} + \sqrt{x} < a$.

Оскільки ліва частина нерівності за умов $x + a \geq 0$ та $x \geq 0$ невід'ємна, то якщо $a \leq 0$ нерівність не має розв'язків.

Якщо $a > 0$, то отримаємо

$$\sqrt{x+a} < a - \sqrt{x},$$

що рівносильна системі:

$$\begin{cases} a - \sqrt{x} > 0; \\ x + a < (a - \sqrt{x})^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} < a \\ x + a < x - 2a\sqrt{x} + a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} < a; \\ 2a\sqrt{x} < a^2 - a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} < a; \\ \sqrt{x} < \frac{a-1}{2}. \end{cases}$$

Якщо $a \leq 1$ нерівність $\sqrt{x} < \frac{a-1}{2}$ розв'язків не має.

Якщо $a > 1$, то $0 < \frac{a-1}{2} < a$, тому система рівносильна нерівності

$$\sqrt{x} < \frac{a-1}{2},$$

звідки $x \in [0; \frac{(a-1)^2}{4})$.

Відповідь. Якщо $a \leq 1$, то $x \in \emptyset$; якщо $a > 1$, то $x \in [0; \frac{(a-1)^2}{4})$.

Приклад 12.

За якого найбільшого цілого значення параметра a будь-яке x з проміжку $[1;5]$ задовольняє нерівність $3ax + 2\sqrt{3x+1} - 6x + a - 5 < 0$?

Задана нерівність на проміжку $[1;5]$ рівносильна нерівності

$$(3x+1)a < 6x - 2\sqrt{3x+1} + 5 \Leftrightarrow$$

$$a < \frac{6x+5}{3x+1} - \frac{2\sqrt{3x+1}}{3x+1} \Leftrightarrow$$

$$a < 2 + \frac{3}{3x+1} - \frac{2}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow$$

$$a < \frac{3}{3x+1} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3x+1}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 2 \Leftrightarrow$$

$$a < \frac{5}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3x+1}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2.$$

Прирівнюємо квадрат двочлена до нуля.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3x+1}} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{3x+1} = \frac{3}{9} \Leftrightarrow$$

$$3x+1 = 9 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{8}{3}.$$

Цей корінь належить проміжку $[1;5]$.

Зробимо висновок, що лише якщо $a < \frac{5}{3}$, то будь-яке $x \in [1;5]$ задовольняє початкову нерівність.

З проміжку $a \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$ найбільше ціле значення $a = 1$.

Відповідь. 1

8. Показникові рівняння з параметрами

Приклад 13.

Розв'язати рівняння $3 \cdot 4^{x-2} + 27 = a + a \cdot 4^{x-2}$.

Перетворимо дане рівняння:

$$3 \cdot 4^{x-2} - a \cdot 4^{x-2} = a - 27 \Leftrightarrow$$

$$4^{x-2}(3-a) = a-27.$$

Якщо $a = 3$, то

$$4^{x-2} \cdot 0 = -24 - \text{рівняння коренів не має.}$$

Якщо $a \neq 3$, то

$$4^{x-2} = \frac{a-27}{3-a}.$$

Дане рівняння має корені, коли $\frac{a-27}{3-a} > 0$.

На проміжку $a \in (3; 27)$, прогалифмувавши останнє рівняння, отримаємо:

$$\begin{aligned}\log_4 4^{x-2} &= \log_4 \frac{a-27}{3-a} \Leftrightarrow \\ x-2 &= \log_4 \frac{a-27}{3-a} \Leftrightarrow \\ x &= 2 + \log_4 \frac{a-27}{3-a}.\end{aligned}$$

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; 3]$ або $[27; +\infty)$, то $x \in \emptyset$; якщо $a \in (3; 27)$, то $x = 2 + \log_4 \frac{a-27}{3-a}$.

Приклад 14.

За яких значень параметра a рівняння $3^{x^2+a} + 4^{x^2+a} + 5^{x^2+a} = 6^{x^2+a}$ має один корінь?

Нехай $x^2 + a = t$.

Отримаємо рівняння:

$$3^t + 4^t + 5^t = 6^t.$$

Підбором знаходимо, що $t = 3$ – корінь цього рівняння.

Покажемо, що цей корінь єдиний. Для цього поділимо обидві частини рівняння на 6^t . Одержимо:

$$\frac{3^t}{6^t} + \frac{4^t}{6^t} + \frac{5^t}{6^t} = \frac{6^t}{6^t} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{2}{3}\right)^t + \left(\frac{5}{6}\right)^t = 1.$$

Оскільки функція

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{2}{3}\right)^t + \left(\frac{5}{6}\right)^t$$

за довільних значень змінної спадає, як сума спадних функцій і $E(f) = (0; +\infty)$, то її графік перетинає пряму $y = 1$ лише один раз, при $t = 3$.

Отже

$$\begin{aligned}x^2 + a &= 3 \Leftrightarrow \\ x^2 &= 3 - a.\end{aligned}$$

Одержане рівняння має лише один корінь $x = 2$, якщо $a = 3$.

Відповідь. 3.

9. Показникові нерівності з параметрами

Приклад 15.

За яких значень параметра a нерівність $4^x - (a - 4) \cdot 2^x + 4 > 0$ виконується для будь-яких дійсних значень x ? У відповідь записати найбільше ціле значення a .

Нехай $2^x = t, t > 0$.

Одержимо квадратну нерівність

$$t^2 - (a - 4) \cdot t + 4 > 0.$$

Сформулюємо завдання так: за яких значень параметра a графік квадратичної функції (парабола вітками вгору)

$$f(x) = t^2 - (a - 4) \cdot t + 4$$

на проміжку $(0; +\infty)$ розміщений над віссю t ?

Це можливо у двох випадках:

1) якщо нулів функції немає, тобто дискримінант квадратного тричлена від'ємний:

$$(a - 4)^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2 - 8a < 0 \Leftrightarrow$$

$$a \in (0; 8);$$

2) якщо

$$a^2 - 8a \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$a \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty),$$

то більший корінь тричлена $f(x)$ повинен бути недодатним:

$$x_2 = \frac{a - 4 + \sqrt{a^2 - 8a}}{2} \leq 0.$$

Маємо:

$$\sqrt{a^2 - 8a} = \sqrt{a^2 - 8a + 16 - 16} = \sqrt{(a - 4)^2 - 16} < \sqrt{(a - 4)^2} = |a - 4|.$$

Для $a \in [8; +\infty)$ більший корінь $x_2 \geq 0$.

Для $a \in (-\infty; 0]$ $x_2 < 0$.

Об'єднавши розв'язки, одержимо $a \in (-\infty; 8)$.

Найбільше значення $a = 7$.

Відповідь. 7.

10. Логарифмічні нерівності

Приклад 16.

Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + a) > -3$.

Перепишемо дану нерівність у вигляді:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + a) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}.$$

Оскільки $\frac{1}{2} < 1$, то

$$0 < x^2 - 2x + a < 8 \Leftrightarrow$$

$$0 < (x - 1)^2 + a - 1 < 8 \Leftrightarrow$$

$$1 - a < (x - 1)^2 < a - 9.$$

Розглянемо три функції

$$y_1 = (x - 1)^2, y_2 = 1 - a, y_3 = a - 9.$$

Якщо

$$a - 9 \leq 0,$$

тобто

$$a \geq 9,$$

то нерівність розв'язків не має.

Якщо

$$\begin{cases} a - 9 > 0; \\ 1 - a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow 1 < a < 9,$$

то нерівність матиме такі розв'язки x , що задовольняють умову

$$x_1 < x < x_2,$$

де x_1, x_2 – абсциси точок перетину параболи $y_1 = (x - 1)^2$ з прямою $y_3 = a - 9$, які знаходяться з рівняння

$$(x - 1)^2 = a - 9 \Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{a - 9}.$$

Якщо

$$\begin{cases} a - 9 > 0; \\ 1 - a \gg 0; \end{cases} \Leftrightarrow a \leq 1,$$

то нерівність матиме такі розв'язки x , що задовольняють умову

$$x_1 < x < x_3, \quad x_4 < x < x_2,$$

де x_3, x_4 – абсциси точок перетину параболи $y_1 = (x - 1)^2$ з прямою $y_2 = 1 - a$, які знаходяться з рівняння

$$(x - 1)^2 = 1 - a \Leftrightarrow x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1 - a}.$$

Відповідь. Якщо $a \leq 1$, то $x \in (x_1; x_3) \cup (x_4; x_2)$; якщо $1 < a < 9$, то $x \in (x_1; x_2)$; якщо $a \geq 9$, то $x \in \emptyset$, де $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{a - 9}$, $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1 - a}$.

11. Тригонометричні рівняння з параметрами

Приклад 17.

Розв'язати рівняння $a \sin^2 x + 2(a + 2) \sin x + 8 = 0$.

Якщо $a = 0$, то отримаємо рівняння

$$4 \sin x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ x \in \emptyset.$$

Якщо $a \neq 0$, то введемо заміну $\sin x = t$ й одержимо квадратне рівняння:

$$a t^2 + 2(a + 2)t + 8 = 0;$$

$$D = 4(a + 2)^2 - 32a = (2a - 4)^2 = 4(a - 2)^2;$$

$$t_{1,2} = \frac{-(a + 2) \pm (a - 2)}{a} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -2; \\ t_2 = -\frac{4}{a}. \end{cases}$$

Повернемося до заміни:

$$1) \sin x = -2 \Leftrightarrow x \in \emptyset;$$

$$2) \sin x = -\frac{4}{a}.$$

Якщо

$$a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty),$$

то

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{4}{a}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

якщо $a \in (-4; 4)$, то $x \in \emptyset$.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$, то $x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{4}{a}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; якщо $a \in (-4; 4)$, то $x \in \emptyset$.

Приклад 18.

За яких значеннях параметра a рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ має корені? У відповідь записати найменший з них.

Виділимо повний квадрат двочлена лівої частини рівняння:

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 \\ - 2 \sin^2 x \cos^2 x &= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4x) = \frac{1}{4} (\cos 4x + 3). \end{aligned}$$

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{1}{4} (1 - \cos 4x) = a \Leftrightarrow \cos 4x = 4a - 3.$$

Якщо $-1 \leq 4a - 3 \leq 1$, тобто $a \in [0,5; 1]$ рівняння матиме корені.

Найменше значення $a = 0,5$.

Відповідь. 0,5.

Приклад 19.

За яких значень параметра a рівняння $\sin 2x + (a + 2)(\sin x - \cos x) = 2a + 1$ має принаймні один корінь? У відповідь записати кількість цілих a .

Виконаємо перетворення рівняння:

$$\begin{aligned} & - (1 - \sin 2x) + (a + 2)(\sin x - \cos x) = 2a; \\ & - (\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x) + (a + 2)(\sin x - \cos x) = 2a; \\ & - (\sin x - \cos x)^2 + (a + 2)(\sin x - \cos x) + 2a = 0. \end{aligned}$$

Введемо заміну: $\sin x - \cos x = t$.

Одержимо рівняння та знайдемо його розв'язки за теоремою Вієта:

$$\begin{aligned} & -t^2 + (a + 2)t + 2a = 0; \\ & t_1 = 2; \quad t_2 = a. \end{aligned}$$

Повернемося до заміни:

$$1) \sin x - \cos x = 2.$$

Оскільки

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right),$$

то

$$-\sqrt{2} \leq \sin x - \cos x \leq \sqrt{2},$$

тоді дане рівняння розв'язків немає.

$$2) \sin x - \cos x = a.$$

Дане рівняння має розв'язки тільки у випадку

$$-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}.$$

Цей проміжок містить наступні цілі числа: -1; 0; 1, а їх кількість дорівнює 3.
Відповідь. 3.

12. Тригонометричні нерівності з параметрами

Приклад 20.

Знайти всі значення параметра a із проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$, для кожного з яких нерівність $\sin^2 x + \cos^2 (x - a) \geq \frac{3}{4} + 2 \sin x \sin a \cos (x - a)$ виконується для всіх x ? У відповідь записати найбільше значення параметра з цього проміжку у градусах.

Виконаємо перетворення:

$$\sin^2 x - \frac{3}{4} \geq 2 \sin x \sin a \cos (x - a) - \cos^2 (x - a);$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x - \frac{3}{4} &\geq \cos(x-a)(2\sin x \sin a - \cos(x-a)); \\ \sin^2 x - \frac{3}{4} &\geq \cos(x-a)(2\sin x \sin a - \cos x \cos a - \sin x \sin a); \\ \sin^2 x - \frac{3}{4} &\geq \cos(x-a)(\sin x \sin a - \cos x \cos a); \\ \sin^2 x - \frac{3}{4} &\geq -\cos(x-a)\cos(x+a); \\ \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{3}{4} &\geq -\frac{\cos 2x + \cos 2a}{2}; \\ \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} - \frac{3}{4} &\geq -\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 2a}{2}; \\ \cos 2a &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Розв'язками нерівності є проміжок:

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 2a < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В градусах:

$$-30^\circ + 180^\circ n < a < 30^\circ + 180^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Найбільше значення з проміжку $[-90^\circ; 270^\circ]$ - 210° .

Відповідь. 210° .

2.2. Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти значення параметра a , за якого рівняння $(a^2 - 1)x = a^2 + 5a - 6$ має безліч коренів.

Відповідь. 1.

2. За якого значення параметра a рівняння $a^2x - 2a^2 = 49x + 14a$ має єдиний корінь?

Відповідь. $(-\infty; -7) \cup (-7; 7) \cup (7; +\infty)$.

3. Указати всі значення a , за яких рівняння $|x - 5| - 1 = a$ має два корені.

Відповідь. $a > -1$

4. Знайти всі значення a , за яких один з коренів рівняння $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ дорівнює -2.

Відповідь. $a = 2$

5. За яких значень m рівняння $4x^2 + 2x - m = 0$ має один корінь?

Відповідь. -0,25

6. Знайти всі значення c , за яких рівняння $3x^2 - 2x + c = 0$ має хоча б один спільний корінь з рівнянням $x^2 + x - 2 = 0$.

Відповідь. -16, -1.

7. За якого значення параметра a сума коренів рівняння $x^2 - (a^2 - 17a + 83)x - 21 = 0$ буде найменшою?

Відповідь. 8,5

8. За яких значень a розв'язком нерівності $(a - 3)x \leq 7$ є проміжок $\left[\frac{7}{a-3}; +\infty\right)$?

Відповідь. $a < 3$

9. Знайти значення параметра a розв'язками нерівності $3x - 1 < ax + 5$ є всі дійсні числа.

Відповідь. 3

10. Знайти множину розв'язків нерівності $(x - 4)(a - x) \geq 0$, якщо $a < 4$.

Відповідь. $[a; 4]$.

11. Встановити значення a , за яких рівняння $\frac{x-a}{x^2-8x+15} = 0$ не має коренів.

Відповідь. $a = 3$ або $a = 5$

12. Встановити значення a , за яких рівняння $\frac{x-5}{x+9} = \frac{a-x}{x+9}$ не має коренів.

Відповідь. $a = -23$

13. За якого найменшого значення a рівняння $|4x + 3| = 5a + 3$ має розв'язок?

Відповідь. -0,6

14. Знайти всі значення параметра a , за яких рівняння $\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x} + a = 0$ має один корінь. У відповідь записати добуток значень параметра.

Відповідь. 0

15. Знайти множину розв'язків нерівності $\frac{(x+2)(x-a)}{x-4} \leq 0$, якщо $-2 < a < 3$.

Відповідь. $(-\infty; -2] \cup [a; 4)$

16. Знайти множину розв'язків нерівності $\frac{x^2-2x-15}{(x-5)(x-a)} \leq 0$, якщо $-3 < a < 5$.

Відповідь. $[-3; a)$

17. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-a} = a$.

Відповідь. Якщо $a < 0$, $x \in \emptyset$, якщо $a \geq 0$, $x = a^2 + a$

18. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+4} = a - 2$.

Відповідь. Якщо $a < 0$, $x \in \emptyset$, якщо $a \geq 2$, $x = a^2 - 2a$

19. Знайти всі значення параметра a , за яких рівняння $\sqrt{(x-a)(x+1)} = 0$ та $(x-a)\sqrt{(x+1)} = 0$ рівносильні.

Відповідь. $a \geq -1$

20. Знайти всі значення параметра a , за яких рівняння $\sqrt{(x-a)(x+1)} = 0$ та $(x+1)\sqrt{(x-a)} = 0$ рівносильні.

Відповідь. $a \leq -1$

21. За якого найбільшого параметра a рівняння $16^x - (a + 1) \cdot 4^x + a = 0$ має один корінь?

Відповідь. 1

22. Вказати найбільше ціле від'ємне значення параметра a , за якого рівняння $2^{2x} + (a + 1) \cdot 2^x + \frac{1}{4} = 0$ має два різних корені.

Відповідь. -3

23. Розв'язати рівняння $25^x - (2a + 1) \cdot 5^x + a^2 + a = 0$. У відповідь записати найменше ціле значення a , за якого рівняння має два корені.

Відповідь. 1

24. За якого значення параметра a нерівність $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$ не має розв'язків?

Відповідь. 0

25. За якого найбільшого значення параметра a рівняння $(x - a) \log_2 (3x - 8) = 0$ має один корінь?

Відповідь. 3

26. За якого найменшого значення параметра a рівняння $2 \cos 4x = a - 5$ має корені?

Відповідь. 3

27. Знайти всі значення a , за яких рівняння $(a + 2) \sin x = a^2 - 4$ має корені?

Відповідь. $a \in \{-2\} \cup [1; 3]$

28. Розв'язати рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x = a$. У відповідь записати найбільше значення a , за якого рівняння має корені.

Відповідь. 1,5

29. За якого значення a система рівнянь $\begin{cases} 2x - y = 5; \\ x + ay = 2 \end{cases}$ не має розв'язків?

Відповідь. -0,5

30. За якого значення a система рівнянь $\begin{cases} 3x + y = -15; \\ -x - ay = 5 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

Відповідь. -1/3

31. За якого значення a система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4; \\ x - y = a \end{cases}$ має єдиний розв'язок?

Відповідь. $a = \pm 2\sqrt{2}$

32. За якого значення a сума $x + y$ набуває найменшого значення, якщо

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2a^2 - 12a + 8; \\ 3x - 2y = 3a^2 + 8a + 12? \end{cases}$$

Відповідь. 2

33. За якого найбільшого значення параметра a функція $f(x) = \ln(\sqrt{a^2 + x^2} - x)$ непарною?

Відповідь. 1

34. За яких від'ємних значень a пряма $y = ax - 5$ дотикається до кривої $y = 3x^2 - 4x - 2$?

Відповідь.-10

35. За якого значення параметра a пряма $y = \frac{x}{2}$ дотикається до кривої $y = \sqrt{x} - a$?

Відповідь. 0,5

36. За яких значень a функція $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - ax$ має критичні точки, але немає точок екстремумів?

Відповідь.1

37. За яких значень a точка 5 є точкою мінімуму функції $y = f(x)$, якщо $f'(x) = (x - 5)(x - a)$?

Відповідь. $a < 5$

38. За яких значень a точка 3 є точкою максимуму функції $y = \frac{x^3}{3} - \frac{a+3}{2}x^2 + 3ax$?

Відповідь. $a > 3$

39. За якого найменшого цілого значення a функція $y = x^3 + 3x^2 + ax - 1$ не має критичних точок?

Відповідь.4

40. За якого від'ємного значення a один з екстремумів функції $y = 2x^3 - 3x^2 + a$ дорівнює -1?

Відповідь.-1

41. За якого найбільшого значення a функція $y = xe^x$ є спадною на проміжку $[a - 5; a + 3]$?

Відповідь.-4

42. Знайти, за яких значень параметра a сума кубів коренів рівняння $6ax^2 + 6(a - 1)x - 5a + 2a^2 = 0$ буде найбільшою.

Відповідь.-0,5

43. Визначити додатне значення параметра a , за якого площа фігури, обмежена лініями $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$ та $y = a$, дорівнює 192 кв. од.

Відповідь.64

44. Знайти найменше значення інтеграла $\int_0^a \cos \frac{x}{2} dx$, $a \in R$.

Відповідь.-2

Список літератури

1. Апостолова Г. В. Я сам! / Г. В. Апостолова. – К. : Факт, 1997. – 202 с.
2. Апостолова Г. В., Ясінський В. В. Перші зустрічі з параметром / Г. В. Апостолова, В. В. Ясінський. – К. : Факт, 2006. – 324 с.
3. Гайштут О. Г. Алгебра. Розв'язування задач та вправ / О. Г. Гайштут, Г. М. Литвиненко. – К. : Магістр-S, 1997. – 255 с.
4. Галицкий М. Л., Сборник задач по алгебре / М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич. – М. : Просвещение, 1992. – 271 с.
5. Горштейн П. И. Задачи с параметрами / П. И. Горштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – К. : РИА «Текст». МП «ОКО», 1992. – 288 с.
6. Назаренко О. М. Тисяча і один приклад. Рівності і нерівності: посібник для абітурієнтів / О. М. Назаренко, Л. Д. Назаренко. – Суми : Вид-во «Слобожанщина», 1994. – 272 с.
7. Одарченко Н. І. Збірник задач зі спецкурсу «Вибрані розділи математики»: навч. посіб. / Н. І. Одарченко, О. В. Бондар. – Суми : Вид-во СумДУ, 2008. – 171 с.
8. Шабунин М. И. Пособие по математике для поступающих в вузы / М. И. Шабунин. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2002. – 640 с.
9. Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике / И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев. – М. : Просвещение, 1991. – 248с.
10. Ясінський В. В. Алгебра / В. В. Ясінський. – К. : ІДП НТТУ «КПІ», 2002. – 75 с. 11. Ясінський В. В. Математика: навчальний посібник для слухачів ФДП НТУУ «КПІ» / за ред. член-кор. НАН України В. С. Мельника. – К. : НТУУ «КПІ», 2006. – 368с. 55