

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Державний вищий навчальний заклад
«Київський електромеханічний коледж»**

**МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА
з предмету
«Математика»**

**ТЕМА:
«Комбінація геометричних тіл у просторі»**

для спеціальностей

5.05020203 «Монтаж, обслуговування та ремонт автоматизованих систем керування рухом на залізничному транспорті»,

5.05010201 «Обслуговування комп'ютерних систем та мереж»

5.05020204 «Обслуговування та ремонт пристроїв електрозв'язку на транспорті»,

5.05070103 «Електропостачання»,

5.07010501 «Технічне обслуговування, ремонт та експлуатація тягового рухомого складу».

Викладача Балякіної В.Н

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Державний вищий навчальний заклад
«Київський електромеханічний коледж»**

РОЗГЛЯНУТО ТА УХВАЛЕНО

цикловою комісією
природничо-математичних
дисциплін
Протокол № 1 від
« » 2015р.
Голова циклової комісії
_____ (С.І.Дуднік)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Заступник директора з НР
_____ (О. І. Марченко)
“ ” 20__ р.

**«Комбінація
геометричних тіл у
просторі»**

Викладача Балякіної В.Н.

Київ 2015

Вступ

Дана методична розробка написана у відповідності до діючої програми «Математика» для студентів першого курсу. Дана програма містить тему «Комбінація геометричних тіл у просторі» для самостійного вивчення студентами на яку програмою передбачено 12 годин. Автор ставив собі за мету викласти матеріал в такій формі, щоб максимально допомогти студентам самостійно розібратися з цією темою.

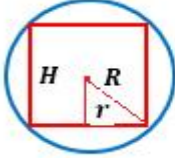
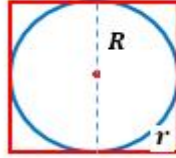
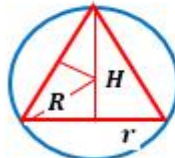
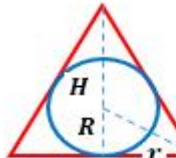
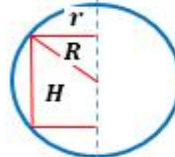
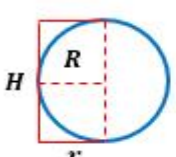
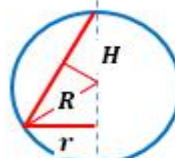
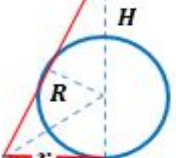
Методична розробка містить теоретичний матеріал, розібрані приклади вправ та завдання для самостійного розв'язування.

У процесі навчання математики задачі відіграють велику і багатопланову роль. Розв'язуючи задачі, учні засвоюють найважливіші математичні поняття, оволодівають математичною символікою. Крім того, математичні задачі допоможуть підготуватись до засвоєння нових теоретичних питань, сприяти поглибленню здобутих знань, ілюструвати практичні застосування вивченого матеріалу.

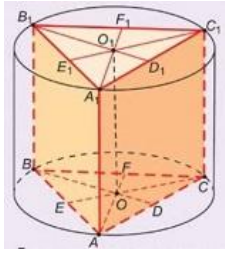
У процесі розв'язування задач в учнів формуються навички розумової праці, а також важливі риси характеру: наполегливість, уважність, зосередженість.

У пропонованому посібнику розглядається методика розв'язування одного з широких класів математичних задач - стереометричних задач на комбінації геометричних тіл, які сприяють розвитку просторової уяви учнів, формуванню їх алгоритмічної та обчислювальної культури. Серед таких задач найпоширенішими є задачі на вписані й описані тіла, розв'язування яких починається з виконання рисунка і від цього значною мірою залежить успішне розв'язання задачі. Зображення виконуються методом паралельного проектування, і необхідною умовою правильності рисунка є дотримання вимог паралельного проектування.

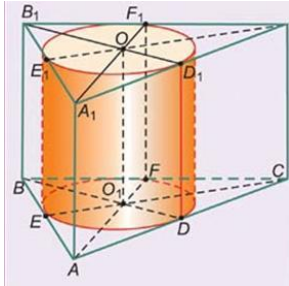
В процесі розв’язування стереометричних задач на комбінації геометричних тіл можна використовувати наступну *довідкову схему*:

Перерізи комбінацій тіл	
Куля	
Описана навколо циліндра	Вписана в циліндр
 $R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2$	 $R = r$ $H = 2R$
конуса	конус
 $R^2 = (H - R)^2 + r^2$	 $\frac{R}{H - R} = \frac{r}{\sqrt{H^2 + r^2}}$
призми	пряму призму
 $R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2$	 $R = r = \frac{H}{2}$
правильної піраміди	правильну піраміду
 $R^2 = (H - R)^2 + r^2$	 $\frac{R}{H - R} = \frac{r}{\sqrt{H^2 + r^2}}$ $R = \frac{3V}{S}$

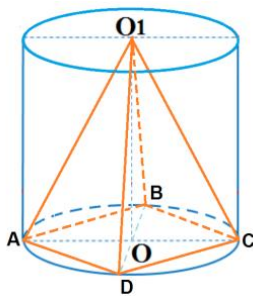
1. КОМБІНАЦІЇ МНОГОГРАННИКІВ І ЦИЛІНДРА



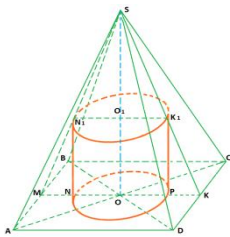
Означення. Призма називається *вписаною в циліндр*, якщо її основи — рівні багатокутники, вписані в основи циліндра, а бічні ребра призми є твірними циліндра.



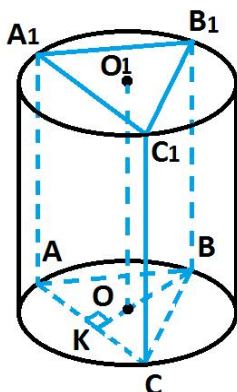
Означення. Призма називається *описаною навколо циліндра*, якщо її основи — рівні багатокутники, описані навколо основ циліндра, а площини граней призми дотикаються до бічної поверхні циліндра.



Означення. *Пірамідою, вписаною в циліндр*, називається така піраміда, основа якої вписана в одну основу циліндра, а вершина лежить у другій основі циліндра.



Означення. *Циліндром, вписаним у піраміду*, називається такий циліндр, одна основа якого лежить в основі піраміди, а друга вписана в переріз піраміди площиною, що проходить через цю основу циліндра паралельно основі піраміди.



Задача 1.1. Знайдіть радіус основи циліндра, описаного навколо правильної трикутної призми, якщо висота призми дорівнює h , а бічна поверхня дорівнює S .

Розв'язання.

За умовою висота правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$

$AA_1 = h$, а бічна поверхня $S_{\text{бічн.}} = S$. З формули для обчислення площі бічної поверхні правильної призми

$S_{\text{бічн.}} = 3 \cdot AA_1 \cdot AB$ обчислюємо сторону трикутної призми

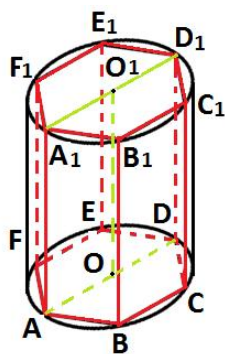
$AB = \frac{S}{3h}$. Радіус OB основи прямого циліндра, описаного навколо правильної трикутної призми, знаходимо за формулою

$$R_3 = \frac{AB}{\sqrt{3}}. \text{Звідси}$$

$$R_3 = \frac{S}{3h} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}S}{9h}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{\sqrt{3}S}{9h}.$$

Задача 1.2. У циліндр вписана правильна шестикутна призма. Знайдіть відношення бічних поверхонь циліндра і призми.



Розв'язання.

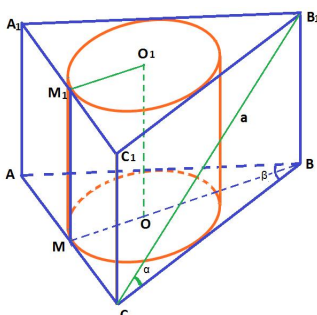
Площу бічної поверхні прямого циліндра знаходимо за формулою:

$S_{\text{бічн.цил.}} = 2\pi R_{\text{ц}} H_{\text{ц}}$, площу бічної поверхні правильної шестикутної призми –

$S_{\text{бічн. приз.}} = 6 \cdot a_6 \cdot H_{\text{приз.}}$. Оскільки, висоти циліндра та правильної шестикутної призми і радіус циліндра та сторона вписаної в нього призми - рівні, то відношення бічних поверхонь циліндра і призми матиме такий вигляд:

$$\frac{S_{\text{бічн.цил.}}}{S_{\text{бічн.приз.}}} = \frac{2\pi R_{\text{ц}} H_{\text{ц}}}{6 \cdot a_6 \cdot H_{\text{приз}}} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{\pi}{3}.$$



Задача 1.3. Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з кутом β ($\beta < 90^\circ$) при вершині. Діагональ грані, яка проходить через

За умовою основою прямої призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є ромб $ABCD$ з гострим кутом α , тобто $\angle BAD = \alpha$. Діагональ бічної грані $DC_1 = \ell$ і утворює з площиною основи призми кут β , тобто $\angle C D C_1 = \beta$.

З $\triangle C_1 C D$ ($\angle D C C_1 = 90^\circ$): $C_1 C = \ell \sin \beta$, $CD = \ell \cos \beta$. Площу ромба обчислимо за формулою $S = CD^2 \sin \alpha$, тобто

$$S = \ell^2 \cos^2 \beta \sin \alpha.$$

З точки B опустимо висоту BM , яка буде діаметром основи циліндра, вписаного в цю призму. З формули для обчислення площі ромба: $S = AD \cdot BM$, обчислимо $BM = \frac{S}{AD}$

$$BM = \frac{\ell^2 \cos^2 \beta \sin \alpha}{\ell \cos \beta} = \ell \cos \beta \sin \alpha, \text{ звідси знайдемо радіус основи}$$

прямого циліндра, який вписано в дану призму:

$$r = \frac{\ell}{2} \cos \beta \sin \alpha.$$

Таким чином, $S_{\text{бічн. цил.}} = 2\pi r_{\text{ц}} H_{\text{ц}}$, тобто

$$S_{\text{бічн. цил.}} = 2\pi \frac{\ell}{2} \cos \beta \sin \alpha \ell \sin \beta = \frac{\pi \ell^2}{2} \sin 2\beta \sin \alpha.$$

$$\text{Відповідь: } S_{\text{бічн. цил.}} = \frac{\pi \ell^2}{2} \sin 2\beta \sin \alpha.$$

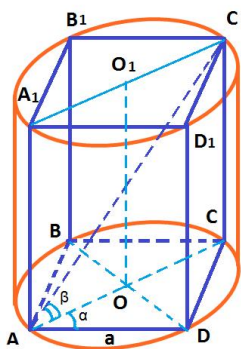
Задача 1.5. Основою прямої призми є прямокутник зі стороною a і кутом α , який утворює ця сторона із діагоналлю прямокутника.

Діагональ призми утворює з площиною основи кут β .

Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо даної призми.

Розв'язання.

Основою прямої призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є прямокутник $ABCD$ з стороною $AD = a$ і кутом α , який утворює ця сторона AD з діагоналлю прямокутника AC , тобто $\angle CAD = \alpha$. Діагональ призми AC_1 утворює з площиною основи кут β , тобто $\angle C A C_1 = \beta$.



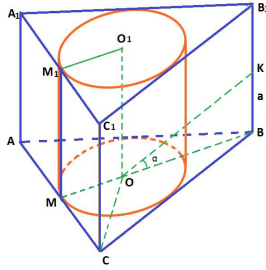
З $\triangle ACD$ ($\angle ADC = 90^\circ$): $AC = \frac{a}{\cos \alpha}$, а оскільки діагональ прямокутника є діаметром кола, описаного навколо нього, то радіус цього кола дорівнює половині знайденої діагоналі, тобто $R = \frac{1}{2} AC$, $R = \frac{a}{2 \cos \alpha}$.

$$\text{З } \triangle C_1AC (\angle ACC_1=90^\circ): CC_1 = \frac{a \operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha}.$$

Таким чином, об'єм прямого циліндра, описаного навколо даної призми, обчислимо з формули: $V_{\text{ц}} = \pi R_{\text{ц}}^2 H_{\text{ц}},$

$$V_{\text{ц}} = \pi \frac{a^2}{4 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{a \operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha} = \frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \beta}{4 \cos^3 \alpha}.$$

$$\text{Відповідь: } V_{\text{ц}} = \frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \beta}{4 \cos^3 \alpha}.$$



Задача 1.7. У правильній трикутній призмі бічне ребро дорівнює a ; відрізок, який з'єднує середину бічного ребра з центром основи, утворює з основою кут α . Знайдіть площу бічної поверхні вписаного циліндра.

Розв'язання.

У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ бічне ребро

$BB_1 = a$. З т. O - центра основи прямого циліндра до середини бічного ребра BB_1 проведено відрізок OK , який утворює з площиною основи кут α , тобто $\angle KOV = \alpha$, звідси $KV = \frac{a}{2}$.

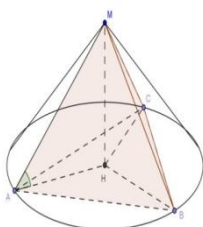
З $\triangle KOV$ ($\angle KOV = 90^\circ$): $OV = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha}$. Центр кола, вписаного в трикутник є точкою перетину бісектрис кутів: OV, OS, OA , а оскільки $\triangle ABC$ - правильний, то $OV = OS = OA$ і $\angle C = 60^\circ$, звідси $\angle OSM = 30^\circ$. Тоді OM - радіус основи циліндра, вписаного в призму. Отже, за властивістю кута в 30° прямокутного трикутника ($AC \perp OM$): $OM = \frac{1}{2} \cdot OS = \frac{a}{4 \operatorname{tg} \alpha}$.

Виходячи з цього, $S_{\text{бічн. цил.}} = 2\pi R_{\text{ц}} H_{\text{ц}},$

$$S_{\text{бічн. цил.}} = 2\pi \cdot \frac{a}{4 \operatorname{tg} \alpha} \cdot a = \frac{1}{2} \pi a^2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

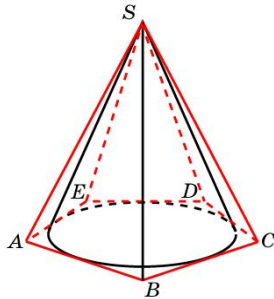
$$\text{Відповідь: } S_{\text{бічн. цил.}} = \frac{1}{2} \pi a^2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

2. КОМБІНАЦІЇ МНОГОГРАННИКІВ І КОНУСА



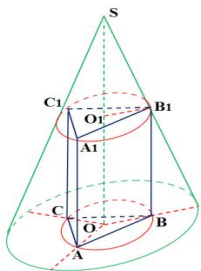
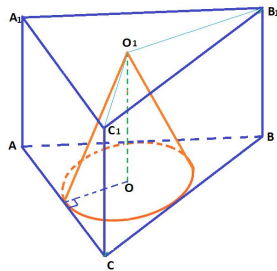
Означення. Піраміда називається *вписаною в конус*, коли многокутник, що лежить в її основі, вписаний в основу

конуса, а вершина збігається з вершиною конуса. Бічні ребра піраміди, вписаної в конус, є твірними конуса.

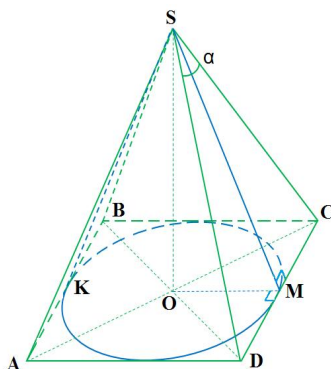


Означення. Пірамідою, описаною навколо конуса, називається така піраміда, в якій багатокутник, що лежить в основі, описаний навколо основи конуса, а вершина збігається з вершиною конуса.

Означення. Конус називається вписаним в призму, якщо його основа вписана в одну основу призми, а вершина лежить у другій основі призми.



Означення. Призма називається вписаною в конус, якщо одна основа її лежить в основі конуса, а друга вписана в переріз конуса площиною, що проходить через цю основу призми паралельно основі конуса.



Задача 2.1. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α . Знайдіть площу повної поверхні вписаного конуса, якщо площа основи піраміди дорівнює Q .

Розв'язання.

У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ плоский кут при вершині дорівнює α , тобто $\angle DSC = \alpha$, в її основі лежить квадрат

ABCD, площа якого, за умовою, дорівнює Q . З формули для обчислення площі квадрата знайдемо його сторону $CD = \sqrt{Q}$.

Точка O – центр основи конуса, вписаного в дану піраміду, тоді OM – радіус конуса, тому $OM \perp CD$, звідси за теоремою про три перпендикуляри $SM \perp CD$. Виходячи з цього, в $\triangle SDC$ висота SM є його бісектрисою і медіаною, звідси $DM = MC$, $\angle CSM = \frac{\alpha}{2}$.

За властивістю правильних чотирикутників, описаних навколо кола, маємо, що $OM = \frac{\sqrt{Q}}{2}$, тоді $CM = \frac{1}{2} \cdot CD = \frac{\sqrt{Q}}{2}$.

$$\text{З } \triangle SMC (\angle SMC = 90^\circ): SM = \frac{CM}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, SM = \frac{\sqrt{Q}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Площа повної поверхні конуса обчислюється за формулою:

$$S_{\text{пов. кон.}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бічн. кон.}}, \text{ тобто}$$

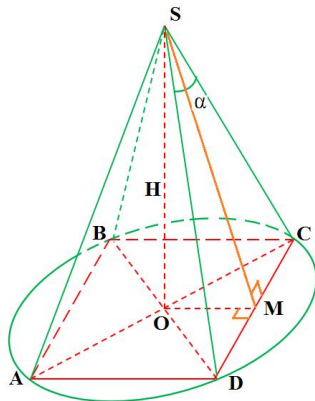
$$S_{\text{пов. кон.}} = \pi \cdot OM^2 + \pi \cdot OM \cdot SM,$$

$$S_{\text{пов. кон.}} = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 + \pi \cdot \frac{\sqrt{Q}}{2} \cdot \frac{\sqrt{Q}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi Q}{4} (\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 1).$$

$$\text{Відповідь: } S_{\text{пов. кон.}} = \frac{\pi Q}{4} (\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 1).$$

Задача 2.2. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо піраміди, якщо її висота дорівнює H .

Розв'язання.



У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ плоский кут при вершині дорівнює α , тобто $\angle DSC = \alpha$, а її висота $SO = H$. Оскільки піраміда правильна, то в її основі лежить квадрат $ABCD$. З точки O , центра основи конуса, опустимо перпендикуляр OM на сторону квадрата CD , тоді за теоремою про три перпендикуляри з того, що $OM \perp CD$ маємо, що $SM \perp CD$. Таким чином, в $\triangle SDC$ висота SM є його бісектрисою і медіаною, звідси $DM = MC$, $\angle CSM = \frac{\alpha}{2}$.

Нехай $OM = x$, тоді, за властивостями правильних вписаних та описаних чотирикутників, $MC = x$, звідси $CD = 2x$.

З $\triangle ADC$ ($\angle ADC = 90^\circ$) за теоремою Піфагора: $AC = 2\sqrt{2}x$, то $OC = \sqrt{2}x$.

З $\triangle SMC$ ($\angle SMC = 90^\circ$): $SC = \frac{x}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

З $\triangle SOC$ ($\angle SOC = 90^\circ$) за теоремою Піфагора $SC^2 = OC^2 + SO^2$:

$$\frac{x^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 2x^2 + H^2,$$

$$\frac{x^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 2x^2 = H^2,$$

$$x^2 = \frac{H^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{H^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha},$$

$$x = \frac{H \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos \alpha}}.$$

Виходячи з цього, $OC = \frac{\sqrt{2} H \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos \alpha}},$

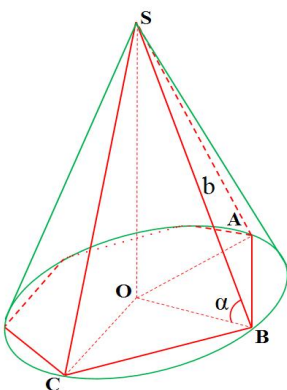
$$\text{а } SC = \frac{H \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos \alpha} \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{H}{\sqrt{\cos \alpha}}.$$

Площу бічної поверхні конуса обчислимо з формули:

$$S_{\text{бічн. кон.}} = \pi \cdot OC \cdot SC,$$

$$S_{\text{бічн. кон.}} = \pi \cdot \frac{\sqrt{2} H \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos \alpha}} \cdot \frac{H}{\sqrt{\cos \alpha}} = \frac{\pi H^2 \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

$$\text{Відповідь: } S_{\text{бічн. кон.}} = \frac{\pi H^2 \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$



Задача 2.3. У правильній піраміді бічне ребро дорівнює b і утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу повної поверхні конуса, описаного навколо піраміди, і його об'єм.

Розв'язання.

Нехай на малюнку дано зображення конуса та фрагмент правильної n -кутної піраміди $SABC\dots$, яку вписано в даний конус. Бічне ребро піраміди $SB = b$ і утворює з площиною основи кут α , тобто $\angle SBO = \alpha$.

З $\triangle SBO$ ($\angle SOB = 90^\circ$): $SO = b \sin \alpha$, $OB = b \cos \alpha$.

Площу повної поверхні конуса, описаного навколо піраміди, знайдемо за формулою:

$$S_{\text{пов. кон.}} = \pi \cdot OB^2 + \pi \cdot OB \cdot SB, \text{ тобто}$$

$$S_{\text{пов. кон.}} = \pi \cdot b^2 \cos^2 \alpha + \pi \cdot b \cos \alpha \cdot b = 2\pi b^2 \cos \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

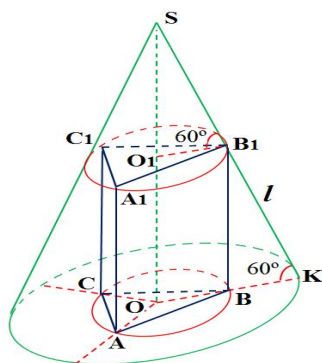
А об'єм конуса, описаного навколо піраміди, обчислимо за формулою:

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi \cdot OB^2 \cdot SO, \text{ тобто}$$

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi \cdot b^2 \cos^2 \alpha \cdot b \sin \alpha = \frac{1}{3} \pi b^3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha.$$

$$\text{Відповідь: } S_{\text{пов. кон.}} = 2\pi b^2 \cos \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi b^3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha.$$



Задача 2.4. Твірна конуса дорівнює l і утворює з основою кут в 60° . У конус вписана правильна трикутна призма, бічне ребро якої у 2 рази більше сторони основи. Знайдіть ребра призми.

Розв'язання.

Нехай на малюнку дано зображення конуса, твірна якого дорівнює l ($SK = l$) і утворює з площиною основи кут 60° , тобто $\angle SKO = 60^\circ$. У даний конус вписано правильну трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. За означенням призми, вписаної в конус, $OK \parallel O_1B_1$ і $OB = O_1B_1$. Отже, $\angle SB_1O_1 = 60^\circ$.

За умовою бічне ребро призми у 2 рази більше сторони основи, тобто $BB_1 = 2AB$. Припустимо, що $AB = x$, тоді $BB_1 = 2x$.

Верхня основа призми – правильний трикутник $\triangle A_1B_1C_1$, вписаний в коло, радіус якого знайдемо за формулою

$$R_3 = O_1B_1 = \frac{A_1B_1}{\sqrt{3}}, O_1B_1 = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Оскільки, в $\triangle SB_1O_1$ кут $\angle SO_1B_1 = 90^\circ$, $\angle SB_1O_1 = 60^\circ$, то $\angle B_1SO_1 = 30^\circ$.
За властивістю кута в 30° :

$$SB_1 = \frac{2x}{\sqrt{3}}, \text{ а } SO_1 = O_1B_1 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ, \quad SO_1 = x.$$

Виходячи з того, що $\triangle SO_1B_1 \sim \triangle SOK$ – за I ознакою подібності ($\angle O_1 = \angle O$, $\angle B_1 = \angle B$) маємо пропорційність сторін:

$$\frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1B_1}{OK} = \frac{SB_1}{SK},$$

Обчисливши висоту конуса SO:

$$SO = SO_1 + OO_1, \text{ де } OO_1 = BB_1 = 2x,$$

маємо, що $SO = 3x$.

Звідси,

$$\frac{SO_1}{SO} = \frac{SB_1}{SK},$$

$$\frac{x}{3x} = \frac{2x}{l\sqrt{3}},$$

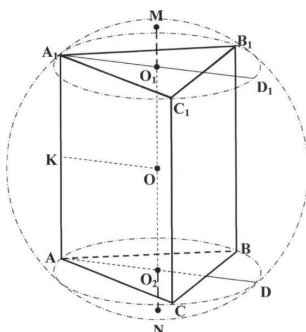
$$x = \frac{l\sqrt{3}}{6}, \text{ тобто ребро основи призми } AB = \frac{l\sqrt{3}}{6}.$$

Виходячи з умови задачі, бічне ребро правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ матиме довжину в 2 рази більшу, ніж ребро основи, тобто $BB_1 = 2 \cdot \frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{Відповідь: ребро основи призми } AB = \frac{l\sqrt{3}}{6}, \text{ бічне ребро призми } BB_1 = \frac{l\sqrt{3}}{3}.$$

3. КОМБІНАЦІЇ МНОГОГРАННИКІВ І КУЛІ

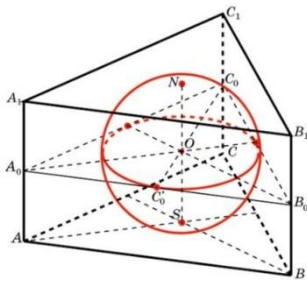
При розв'язуванні задач на комбінацію многогранників і куль



важливо вміти визначати положення центра вписаної або описаної кулі.

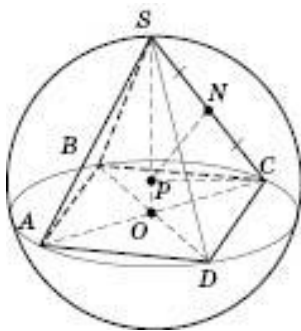
Означення. Центром кулі, описаної навколо многогранника, є точка, рівновіддалена від усіх його вершин, а кулі, вписаної в многогранник, — точка,

рівновіддалена від усіх його граней. Центром кулі, вписаної у многогранник, є точка перетину його бісекторних площин.

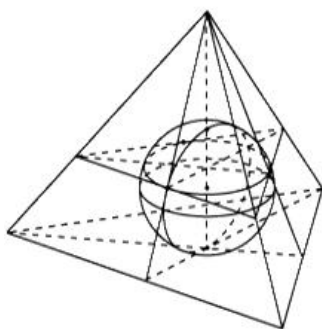


Означення. Центром описаної навколо прямої призми кулі є середина її висоти, що проходить через центр кола, описаного навколо основи призми. Якщо навколо основи призми не можна описати коло, то навколо такої призми не можна описати кулю. Центром кулі, описаної навколо прямокутного паралелепіпеда, є точка перетину його діагоналей.

Діаметр кулі, вписаної у пряму призму, дорівнює діаметру кола, вписаного в основу, а також висоті призми. Тому центр вписаної у пряму призму кулі збігається із серединою висоти, проведеної через центр вписаного в основу кола. Якщо висота призми не дорівнює діаметру вписаного в основу кола або ж в основу призми не можна вписати коло, то в таку призму не можна вписати кулю.



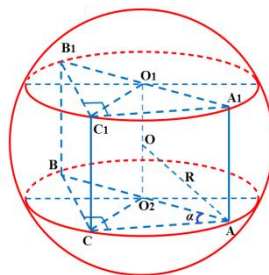
Означення. Центром кулі, описаної навколо піраміди, є точка перетину перпендикуляра до основи, який проведено з центра описаного навколо основи кола, і площини, що проходить через середину будь-якого ребра, перпендикулярно до нього. Якщо навколо основи піраміди не можна описати коло, то навколо такої піраміди не можна описати кулю. Навколо правильної піраміди завжди можна описати кулю.



Означення. Центром вписаної у піраміду кулі є точка перетину бісекторних площин двогранних кутів при основі. Центром кулі, вписаної у правильну піраміду, є точка перетину її висоти з бісекторною площиною, проведеною через сторону основи піраміди.

Задача 3.1. У призма, основа гострим кутом α квадрат.

Розв'язання.



кулю радіуса R вписана пряма якої - прямокутний трикутник із Найбільша бічна грань призми - Знайдіть об'єм призми.

Нехай на малюнку дано зображення кулі, в яку вписано пряму призму $ABCA_1B_1C_1$. Центром описаної навколо прямої призми кулі є середина її висоти O_1O_2 , радіусом даної кулі є відрізок $OA = R$. В основі даної призми лежить прямокутний трикутник $\triangle ABC$ з гострим кутом α , тобто $\angle A = \alpha$. Центр кола, точки O_2 , описаного навколо прямокутного трикутника $\triangle ABC$ лежить на середній гіпотенузи AB . За умовою найбільша бічна грань призми ABB_1A_1 – квадрат. Таким чином, AB_1 є діагоналлю квадрата ABB_1A_1 і тому $AB_1 = 2R$.

Позначимо $AB = x$, тоді за теоремою Піфагора з $\triangle ABC$

$$(\angle ACB = 90^\circ):$$

$$AB^2 + BC^2 = AC^2,$$

$$x^2 + x^2 = (2R)^2,$$

$x = R\sqrt{2}$, тобто гіпотенуза AB , а отже, і висота призми $ABCA_1B_1C_1$ ребро $BB_1 = R\sqrt{2}$. Звідси $BC = R\sqrt{2} \sin \alpha$, $AC = R\sqrt{2} \cos \alpha$.

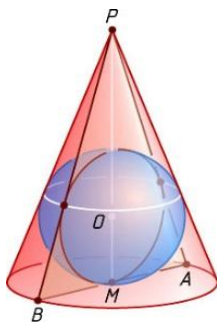
Об'єм призми обчислимо за формулою:

$$V_{\text{приз.}} = S_{\text{осн.}} \cdot BB_1, \text{ де } S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC.$$

Таким чином,

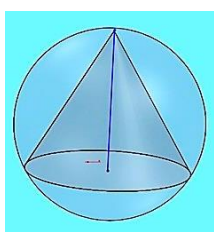
$$V_{\text{приз.}} = \frac{1}{2} \cdot R\sqrt{2} \cos \alpha \cdot R\sqrt{2} \sin \alpha \cdot R\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} R^3 \sin 2\alpha.$$

$$\text{Відповідь: } V_{\text{приз.}} = \frac{\sqrt{2}}{2} R^3 \sin 2\alpha.$$



4. КОМБІНАЦІЇ КУЛІ І КОНУСА

Означення. Куля називається *вписаною в конус*, якщо вона дотикається до основи конуса в його центрі і до бічної поверхні по колу.



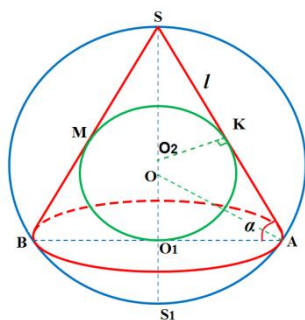
Означення. Куля називається *описаною навколо*

конуса, якщо його вершина і коло основи лежать на поверхні кулі.

При розв'язуванні задач на комбінацію кулі з конусом зручно використовувати переріз комбінації тіл площиною, яка проходить через вісь конуса і центр кулі. У перерізі одержуємо великий круг кулі з вписаним у нього рівнобедреним трикутником - осьовим перерізом конуса. Тому питання про відшукування центра описаної навколо конуса кулі зводиться до визначення центра кола, описаного навколо осьового перерізу конуса.

Якщо куля вписана в конус, то перерізом комбінації площиною, яка проходить через вісь конуса і центр кулі, буде рівнобедрений трикутник (осьовий переріз конуса) з вписаним у нього великим кругом кулі. Звідси випливає, що у зрізаний конус можна вписати кулю тоді, коли його твірна дорівнює сумі радіусів верхньої і нижньої основ конуса.

Задача 4.1. У конусі твірна дорівнює l і утворює з основою кут α . Знайдіть R і r - радіуси описаної і вписаної кулі відповідно.



Розв'язання.

Нехай на малюнку дано зображення конуса, твірна якого $SA = l$ і утворює з площиною основи кут α , тобто $\angle SAO_1 = \alpha$. З $\triangle SAO_1$ ($\angle SAO_1 = 90^\circ$):

$$AO_1 = l \cos \alpha.$$

Цей конус є вписаним в кулю і описаним навколо кулі. Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений трикутник $\triangle SAB$, тому центр кулі описаної навколо конуса і центр кулі вписаної в конус лежить на бісектрисі SO_1 . Нехай центром описаної кулі буде точка O , а центром кулі, вписаної в конус буде точка O_2 . В $\triangle SAB$ кут $\angle ASB = 180 - 2\alpha$, тоді в $\triangle SO_1A$ кут

$$\angle O_1SA = (180^\circ - 2\alpha) : 2 = 90^\circ - \alpha.$$

Центр кола, описаного навколо трикутника лежить на перетині серединних перпендикулярів, проведених до сторін трикутника, отже, $SA = \frac{l}{2}$, а радіусом буде довжина відрізка SO . З ΔSKO ($\angle SKO = 90^\circ$):

$$SO = \frac{\frac{l}{2}}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{l}{2 \sin \alpha}.$$

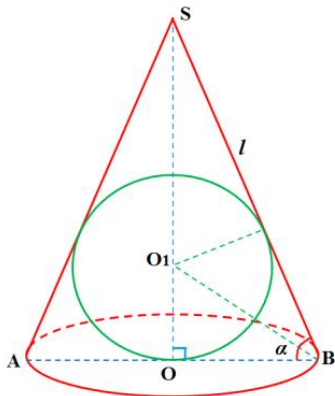
Центр кола, вписаного в трикутник лежить на перетині бісектрис кутів, отже, $\angle OAO_1 = \frac{\alpha}{2}$, а радіусом буде довжина відрізка O_2O_1 . З ΔO_2O_1A ($\angle O_2O_1A = 90^\circ$): $O_2O_1 = l \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Відповідь: радіус описаної кулі $SO = \frac{l}{2 \sin \alpha}$,

радіус вписаної кулі $O_2O_1 = l \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Задача 4.2. У конус вписано кулю. Знайдіть об'єм кулі, якщо твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α .

Розв'язання.



Нехай на малюнку дано зображення конуса, в який вписано кулю. Твірна конуса $SB = l$ і нахилена під кутом α до площини основи, тобто $\angle SBO = \alpha$. Оскільки, якщо куля вписана в конус, то перерізом комбінації площиною, яка проходить через вісь конуса SO і центр кулі O_1 , буде рівнобедрений трикутник ΔSBA з вписаним у нього великим кругом кулі.

З ΔSBO ($\angle SOB = 90^\circ$):

$$OB = l \cos \alpha.$$

Центр даної кулі лежить на перетині бісектрис O_1S і O_1B в ΔSBA , тому $\angle BOO_1 = \frac{\alpha}{2}$. Звідси з ΔBOO_1 ($\angle BOO_1 = 90^\circ$):

$$OO_1 = l \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

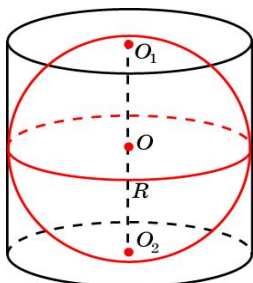
Виходячи з цього об'єм кулі, вписаної в конус, обчислимо з формули

$$V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3} \pi \cdot O_1O^3,$$

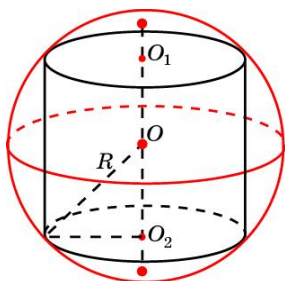
$$V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3} \pi \cdot l^3 \cos^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}.$$

Відповідь: $V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi \cdot l^3 \cos^3 \alpha t g^3 \frac{\alpha}{2}$.

5. КОМБІНАЦІЇ КУЛІ І ЦИЛІНДРА



Означення. Куля називається *вписаною у циліндр*, якщо куля дотикається до обох основ циліндра в їх центрах і до бічної поверхні циліндра по колу великого круга кулі, паралельного основам циліндра. Циліндр при цьому називається описаним навколо кулі.

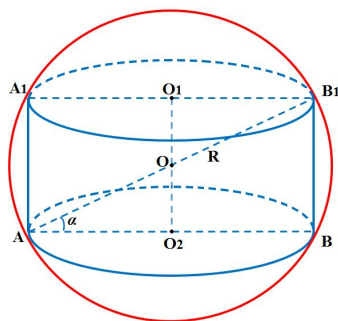


Означення. Куля називається *описаною навколо циліндра*, якщо кола його основ лежать на поверхні кулі. Циліндр при цьому називається вписаним у кулю.

Як і при розв'язуванні задач на комбінацію кулі і конуса, часто використовують перерізи комбінації кулі і циліндра площиною, яка проходить через вісь циліндра, а отже, і через центр вписаної або описаної кулі. Перерізом буде прямокутник із вписаним чи описаним колом. Звідси випливає, що: а) в циліндр можна вписати (описати) кулю тоді, коли в осьовий переріз циліндра можна вписати (описати) коло; б) центр кулі, описаної (вписаної) навколо циліндра, лежить на середині осі циліндра; в) вписати кулю можна тільки в рівносторонній циліндр.

Задача 5.1. У сферу радіуса R вписано циліндр, діагональ осьового перерізу якого утворює з основою кут α . Знайдіть об'єм циліндра.

Розв'язання.



Нехай на малюнку дано зображення сфери, радіус якої дорівнює R , тобто $AO = R$. В цю кулю вписано прями́й циліндр, осьовим перерізом якого є прямокутник AA_1B_1B . Діагональ AB_1 даного осьового перерізу

утворює з основою кут α , тобто $\angle B_1AB = \alpha$.

Центр кулі, точка O , описаної навколо циліндра, лежить на середині осі циліндра і є точкою перетину діагоналей прямокутника AA_1B_1B . Отже, $AB_1 = 2R$.

З $\triangle ABB_1$ ($\angle ABB_1 = 90^\circ$): $AB = 2R \cos \alpha$, $BB_1 = 2R \sin \alpha$, тоді радіус циліндра $AO_2 = R \cos \alpha$.

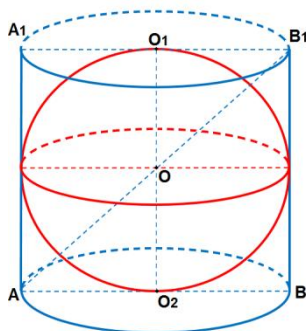
Об'єм циліндра обчислимо за формулою $V_{\text{ц.}} = \pi \cdot R_{\text{ц.}}^2 \cdot H_{\text{ц.}}$,

де $R_{\text{ц.}} = R \cos \alpha$, $H_{\text{ц.}} = 2R \sin \alpha$.

Звідси $V_{\text{ц.}} = \pi \cdot R^2 \cos^2 \alpha \cdot 2R \sin \alpha = \pi R^3 \sin 2\alpha \cos \alpha$.

Відповідь: $V_{\text{ц.}} = \pi R^3 \sin 2\alpha \cos \alpha$.

Задача 5.2. Навколо кулі описано циліндр. Знайдіть відношення поверхонь цих тіл.



Розв'язання.

Нехай на малюнку дано зображення прямого циліндра, в який вписано кулю. Оскільки, вписати кулю можна тільки в рівносторонній циліндр, тобто в такий де висота циліндра дорівнює діаметру основи:

$$BB_1 = AB.$$

Візьмемо радіус циліндра

$AO_2 = x$, тоді $AB = BB_1 = 2x$. Звідси з $\triangle ABB_1$ ($\angle ABB_1 = 90^\circ$) за теоремою Піфагора

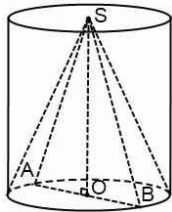
$AB_1 = 2x\sqrt{2}$, то радіус кулі $AO = x\sqrt{2}$.

Виходячи з цього маємо відношення поверхонь цих тіл:

$$\frac{S_{\text{кулі}}}{S_{\text{пов. цил.}}} = \frac{4\pi R_{\text{кулі}}^2}{2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бічн. цил.}}} = \frac{4\pi x^2}{2\pi x^2 + 2\pi x \cdot 2x} = \frac{2}{3}.$$

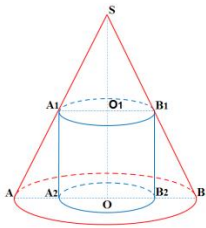
Відповідь: $\frac{S_{\text{кулі.}}}{S_{\text{пов. цил.}}} = \frac{2}{3}$.

6. КОМБІНАЦІЇ КОНУСА І ЦИЛІНДРА



Означення. Конус називається *вписаним у циліндр*, якщо основа конуса збігається з однією з основ циліндра, а вершина конуса лежить у центрі другої основи циліндра.

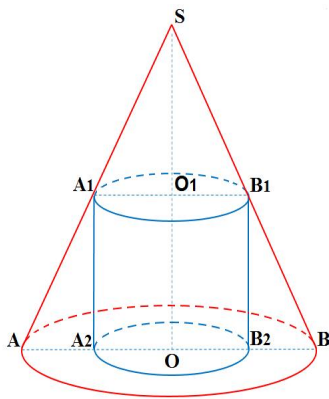
При цьому циліндр називається описаним навколо конуса.



Означення. Циліндр називається *вписаним в конус*, якщо одна основа циліндра лежить у площині основи конуса, а коло другої лежить на бічній поверхні конуса.

Конус при цьому називається описаним навколо циліндра.

Задача 6.1. Радіус основи конуса дорівнює 39 см, а висота – 52 см. У нього вписано циліндр такої висоти, що його бічна поверхня рівновелика бічній поверхні малого конуса, який стоїть на його верхній основі. Знайдіть висоту циліндра.



Розв'язання.

Нехай на малюнку дано зображення конуса, радіус основи якого $OB = 39$ см, висота $SO = 52$ см. В цей конус вписано прямий циліндр, бічна поверхня якого рівновелика бічній поверхні малого конуса, тобто

$$S_{\text{бічн. цил.}} = S_{\text{бічн. кон. } SA_1B_1},$$

$$S_{\text{бічн. цил.}} = 2\pi R_{\text{ц}} H_{\text{ц}},$$

$$S_{\text{бічн. кон. } SA_1B_1} = \pi R_K l,$$

$$2\pi \cdot O_1B_1 \cdot OO_1 = \pi \cdot O_1B_1 \cdot SB_1,$$

$$2 \cdot OO_1 = SB_1,$$

$$SB_1 = 2OO_1.$$

З $\triangle SOB$ ($\angle SOB = 90^\circ$) за теоремою Піфагора: $SB^2 = SO^2 + OB^2$,

$$SB = \sqrt{52^2 + 39^2} = \sqrt{4225} = 65 \text{ см.}$$

Оскільки, $\triangle SOB \sim \triangle SO_1B_1$ за I ознакою подібності трикутників, то $\frac{SO}{SO_1}$

$$= \frac{OB}{O_1B_1} = \frac{SB}{SB_1}, \text{ де}$$

$$SO_1 = SO - OO_1 = 52 - OO_1.$$

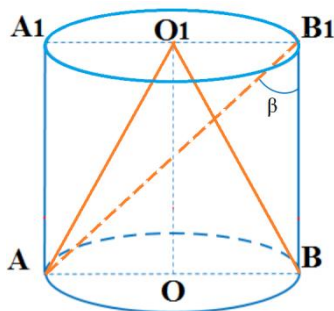
$$\text{Звідси } \frac{SO}{SO_1} = \frac{SB}{SB_1},$$

$$\frac{52}{52 - OO_1} = \frac{65}{2 \cdot OO_1},$$

$$OO_1 = 20 \text{ см.}$$

Відповідь: висота циліндра 20 см.

Задача 6.2. Конус вписано в циліндр так, що основа конуса збігається з нижньою основою циліндра, а вершина конуса збігається з центром верхньої основи циліндра. Знайдіть об'єм конуса, якщо осьовим перерізом прямого циліндра є прямокутник з діагоналлю d , яка утворює з висотою прямокутника кут β .



Розв'язання.

Нехай на малюнку дано зображення прямого циліндра, осьовим перерізом якого є прямокутник AA_1B_1V з діагоналлю $AB_1 = d$. Ця діагональ утворює з висотою прямокутника V_1V кут β , тобто $\angle AB_1V = \beta$.

В цей циліндр вписано конус, основа якого збігається з нижньою основою циліндра, а його вершина збігається з центром верхньої основи циліндра.

$$\text{З } \triangle AB_1V (\angle AVB_1 = 90^\circ): B_1V = d \cos \beta, \quad AV = d \sin \beta.$$

$$\text{Звідси радіус конуса } OB = \frac{d}{2} \sin \beta.$$

Виходячи з цього, обчислимо об'єм конуса, вписаного в прямий циліндр:

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi \cdot OB^2 \cdot B_1B,$$

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{d^2}{4} \sin^2 \beta \cdot d \cos \beta = \frac{\pi d^3}{24} \sin 2\beta \sin \beta.$$

$$\text{Відповідь: } V_{\text{кон.}} = \frac{\pi d^3}{24} \sin 2\beta \sin \beta.$$

7. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПІДГОТОВКИ

Варіант 1

I рівень

1. Якщо ребро куба дорівнює a , то радіус кулі, вписаної в куб, дорівнює:

а) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{a}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{a}{2}$; г) a . (1 бал)

2. Якщо кулю радіуса r вписано в циліндр, то площа бічної поверхні циліндра дорівнює:

а) πr^2 ; б) $2\pi r^2$; в) $3\pi r^2$; г) $4\pi r^2$. (1 бал)

3. Якщо в конус, висота і радіус основи якого відповідно дорівнюють 3 і 4 см, вписано правильну трикутну піраміду, то її бічне ребро дорівнює:

а) 2см; б) 3см; в) 4см; г) 5см. (1 бал)

II рівень

1. Відношення об'ємів кулі і куба, описаного навколо кулі, дорівнює:

а) $\pi:4$; б) $\pi:6$; в) $\pi:8$; г) $2\pi:9$. (1 бал)

2. Відношення площі поверхні куба, до площі описаної навколо нього кулі дорівнює:

а) $6:\pi$; б) $3:2\pi$; в) $3:\pi$; г) $2:\pi$.(2 бал)

3. Відношення об'єму циліндра до об'єму кулі, вписаної в циліндр, дорівнює:

а) $4:3$; б) $3:2$; в) $\pi:2$; г) $2:1$. (1 бал)

III рівень

1. Якщо в рівносторонній конус вписано кулю, то відношення площі повної поверхні конуса до площі поверхні кулі дорівнює:

а) $3:1$; б) $3:2$; в) $9:2$; г) $4:1$. (2 бали)

2. Якщо в кулю вписано рівносторонній конус, то відношення об'єму кулі до об'єму конуса дорівнює:

а) $3:2$; б) $27:5$; в) $32:27$; г) $32:9$. (2 бали)

3. Якщо в циліндр вписано куб, то відношення повної поверхні циліндра до повної поверхні куба дорівнює:

а) $\pi(1 + \sqrt{2}):6$; б) $\pi:2$; в) $2\pi:3$; г) $\pi(2 + \sqrt{2}):6$. (2 бали)

IV рівень

1. Об'єм куба відноситься до об'єму тетраедра, вершинами якого є кінці мимобіжних діагоналей двох паралельних граней куба, як:

а) $2:1$; б) $3:1$; в) $3:2$; г) $4:1$. (3 бали)

2. Якщо навколо кулі радіуса 3 см описано деякий многогранник, площа поверхні якого дорівнює 400 см^2 , то об'єм многогранника дорівнює:

а) 8000 см^3 ; б) $12\,000 \text{ см}^3$; в) 400 см^3 ; г) $\frac{400}{3} \text{ см}^3$. (3 бали)

3. Якщо ребро правильного тетраедра дорівнює a , то радіус кулі, вписаної в даний тетраедр, дорівнює:

а) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; в) $\frac{a\sqrt{6}}{9}$; г) $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. (3 бали)

Варіант 2

І рівень

1. Якщо діагональ куба дорівнює d , то радіус кулі, описаної навколо куба, дорівнює:

а) $\frac{d}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{d}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{d}{2}$; г) d . (1 бал)

2. Якщо куля радіуса r вписана в циліндр, то об'єм циліндра дорівнює:

а) πr^3 ; б) $2\pi r^3$; в) $3\pi r^3$; г) $4\pi r^3$. (1 бал)

3. Якщо в правильну чотирикутну піраміду, висота і сторона основи якої відповідно дорівнюють 4 і 6 см, вписано конус, то твірна конуса дорівнює:

а) 4 см; б) 5 см; в) 6 см; г) 8 см. (1 бал)

II рівень

1. Відношення об'єму кулі до об'єму вписаного в неї куба дорівнює:

а) $\pi : 1$; б) $3\pi : 2$; в) $\pi\sqrt{3} : 1$; г) $\pi\sqrt{3} : 2$. (1 бал)

2. Відношення площі поверхні куба до площі вписаної в нього кулі дорівнює:

а) $\pi : 4$; б) $6 : \pi$; в) $8 : \pi$; г) $9 : 2\pi$. (1 бал)

3. Відношення бічної поверхні правильно шестикутної призми до поверхні вписаної в неї кулі дорівнює:

а) $3 : 2\pi$; б) $\sqrt{3} : \pi$; в) $2\sqrt{3} : \pi$; г) $2\sqrt{3} : 3\pi$. (1 бал)

III рівень

1. Якщо в рівносторонній конус вписано кулю, то відношення об'єму конуса до об'єму кулі дорівнює:

а) $3 : 1$; б) $9 : 4$; в) $27\pi : 4$; г) $27 : 4$. (2 бали)

2. Якщо в кулю вписано рівносторонній конус, то відношення площі поверхні кулі до площі повної поверхні конуса дорівнює:

а) $2 : 1$; б) $3 : 2$; в) $4 : 3$; г) $16 : 9$. (2 бали)

3. Якщо в куб вписано циліндр, то відношення повної поверхні куба до повної поверхні циліндра дорівнює:

а) $6 : \pi$; б) $4 : \pi$; в) $3\sqrt{2} : \pi$; г) $\pi : 4$. (2 бали)

IV рівень

1. Об'єм куба відноситься до об'єму октаедра, вершинами якого є центри граней куба, як:

а) $2 : 1$; б) $3 : 1$; в) $4 : 1$; г) $6 : 1$. (2 бали)

2. Якщо навколо кулі з радіусом 3 см описано деякий многогранник, об'єм якого дорівнює 400 см^3 , то площа повної поверхні цього многогранника дорівнює:

а) $\frac{400}{3} \text{ см}^2$; б) 400 см^2 ; в) 1200 см^2 ; г) 3600 см^2 . (3 бали)

3. Якщо ребро правильного тетраедра дорівнює a , то радіус кулі, описаної навколо тетраедра, дорівнює:

а) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; в) $\frac{a\sqrt{6}}{9}$; г) $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. (3бали)

8. Відповіді на тестові завдання для самопідготовки

Рівень	Номер завдання	Варіант I	Варіант II
I	1	В	В
	2	Г	Б
	3	Г	Б
II	1	Б	Г
	2	Г	Б
	3	Б	В
III	1	В	Б
	2	Г	Г
	3	А	Б
IV	1	Б	Г
	2	В	Б
	3	Г	Б

9. Формули стереометрії

Призма

Площа бічної поверхні

Похила призма: $S_{\text{б}} = S_1 + S_2 + S_3 \dots$ де $S_1, S_2, S_3 \dots$ - площі бічних граней (паралелограмів).

Похила призма: $S_{\text{б}} = Pl$, де P - периметр перпендикулярного перерізу, l - бічне ребро.

Пряма призма: $S_{\text{б}} = P_o H$, де P_o - периметр основи, H - висота, ребро.

Площа повної поверхні:

$S_n = S_{\text{б}} + 2S_o$, де $S_{\text{б}}$ - площа бічної поверхні, S_o - площа основи.

Об'єм:

Довільна призма: $V = S_o H$, де S_o - площа основи, H - висота призми.

Похила призма: $V = S_{n.n} l$, де $S_{n.n}$ - площа перпендикулярного перерізу, l - ребро призми.

Прямокутий паралелепіпед: $V = abc$, де a, b, c - виміри паралелепіпеда.

Піраміда

Площа бічної поверхні

Довільна піраміда: $S_{\text{б}} = S_1 + S_2 + S_3 \dots$, де $S_1, S_2, S_3 \dots$ - площі бічних граней (трикутників).

Правильна піраміда: $S_{\text{б}} = p_o h$, де p_o - півпериметр основи, h - апофема (висота бічної грані).

Піраміда, в якій грані нахилені під однаковим кутом φ : $S_{\phi} = \frac{S_o}{\cos \varphi}$,

де S_o - площа основи.

Площа бічної поверхні зрізаної піраміди: $S_{\phi} = (p_1 + p_2)h$, де p_1, p_2 - півпериметри основ, h - апофема(висота бічної грані).

Площа повної поверхні

Довільна піраміда: $S_n = S_{\phi} + S_o$, де S_{ϕ} - площа бічної поверхні, S_o - площа основи.

Зрізана піраміда: $S_n = S_{\phi} + S_1 + S_2$, де S_{ϕ} - площа бічної поверхні, S_1, S_2 - площі основ.

Об'єм

Довільна піраміда: $V = \frac{1}{3} S_o H$, де S_o - площа основи, H - висота піраміди.

Зрізана піраміда: $V = \frac{1}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2) H$, де S_1, S_2 - площі основ, H - висота піраміди.

Фігури обертання

Площа бічної поверхні

Циліндр: $S_{\phi} = 2\pi R H$, де R - радіус основи, H - висота циліндра.

Конус: $S_{\phi} = \pi R l$, де R - радіус основи, l - твірна конуса.

Зрізаний конус: $S_{\phi} = \pi(R_1 + R_2)l$, де R_1, R_2 - радіуси основ, l - твірна конуса.

Площа повної поверхні

Циліндр: $S_n = 2\pi R(H + R)$, де R - радіус основи, H - висота циліндра

Конус: $S_n = \pi R l + \pi R^2 = \pi R(l + R)$, де $S_n = \pi \cdot l(R_1 + R_2) + \pi(R_1^2 + R_2^2)$ l - твірна.

Зрізаний конус: $S_n = \pi \cdot l(R_1 + R_2) + \pi(R_1^2 + R_2^2)$, де R_1, R_2 - радіуси основ, l - твірна конуса.

Сфера: $S_n = 4\pi R^2$, де R - радіус сфери.

Об'єм

Циліндр: $V = S_o H = \pi R^2 H$, де R - радіус основи, H - висота циліндра.

Конус: $V = \frac{1}{3} S_o H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$, де R - радіус основи, H - висота конуса.

Зрізаний конус: $V = \frac{1}{3} \pi H (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$, де R_1, R_2 - радіуси основ, H - висота конуса.

Куля: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, де R - радіус сфери.

10. Список використаної літератури:

1. Геометрія: 11 кл.: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, профл. рівень/ Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова, В.М. Владіміров. – К.: Генеза, 2011. – 336 с.:іл.
2. Погорєлов О.В. Геометрія: Стереометрія: Підруч. для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закл./ О.В. Погорєлов. – К.: Освіта, 2001. – 128 с.:іл.
3. Бевз Г. П. Геометрія: Підруч. для 10-11 кл. шк. з поглибл. вивченням математики. - К.: Освіта, 2000. - 218 с.
4. Чехова А.М. Геометрія в таблицях, 7-11 кл.: Навч. посіб. – Х.: Науково-методич. центр, 2003. – 115 с.

Зміст

ВСТУП.....	3
1. КОМБІНАЦІЇ МНОГОГРАННИКІВ І ЦИЛІНДРА	5
2. КОМБІНАЦІЇ МНОГОГРАННИКІВ І КОНУС.....	10
3. КОМБІНАЦІЇ МНОГОГРАННИКІВ І КУЛІ	15
4. КОМБІНАЦІЇ КУЛІ І КОНУСА	17
5. КОМБІНАЦІЇ КУЛІ І ЦИЛІНДРА	19
6. КОМБІНАЦІЇ КОНУСА І ЦИЛІНДРА	21
7. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПІДГОТОВКИ....	23
8.ВІДПОВІДІ НА ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПІДГОТОВКИ.....	27
9.ФОРМУЛИ СТЕРЕОМЕТРІЇ.....	28
10.СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	31