

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Марченко С. В.

Конспект лекцій

з дисципліни

«Сигнали та процеси в радіотехніці»

(Частина 1)

освітньо-професійної програми першого(бакалаврського) рівня
вищої освіти
зі спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка»
за освітньо-професійною програмою «Телекомунікації та радіотехніка»

Затверджено:

Редакційно-видавничою

секцією науково-методичної

ради ДДТУ

від _____ 20__ р. протокол № _____

Кам'янське
2019

Розповсюдження і тиражування без офіційного дозволу Дніпровського державного технічного університету заборонено.

Конспект лекцій з дисципліни «Сигнали та процеси в радіотехніці» освітньо-професійної програми першого(бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» за освітньо-професійною програмою «Телекомунікації та радіотехніка», укл. Марченко С. В., Кам'янське; ДДТУ, 2019 р. – 96с.

Укладач: к.ф.-м.н., доц. Марченко С. В.

Відповідальний за випуск:

Зав. каф. «АРРТ»

Рязанцев О. В., к.ф.-м.н.

Рецензент: С'янов О. М., д.т.н., проф. каф. АРРТ

Затверджено на засіданні кафедри апаратури радіозв'язку, радіомовлення і телебачення, від «31» січня 2019 р., протокол № 1.

Цей конспект не є оригінальним науковим текстом та укладач не претендує на авторство і першоджерело. Цей текст створено на основі існуючих європейських і вітчизняних практик, нормативних документів, методичних розробок окремих закладів вищої освіти, а також на матеріалах і кейсах Національного агентства і забезпечення якості вищої освіти.

Коротка анотація видання. В конспекті лекцій описані основні електричні сигнали та їх характеристики, які застосовуються в радіотехніці. Освітлені питання спектрального аналізу періодичних та неперіодичних сигналів, розглянуті загальні питання кореляційного аналізу радіотехнічних сигналів. Описані основні види аналогових різновидів модуляції, розглянуті їх спектральні та кореляційні характеристики.

Зміст

1 Вступ в радіотехніку.....	6
1.1 Основні завдання радіотехніки.....	6
1.2 Основні радіотехнічні процеси.....	6
1.2.1 Перетворення неелектричної величини в електричну.....	6
1.2.2 Підсилення сигналів первинних перетворювачів.....	7
1.2.3. Кодування переданого повідомлення.....	7
1.2.4. Генерування несучого.....	8
1.2.5. Модуляція високочастотних коливань.....	8
1.2.6. Підсилення потужності високочастотного коливання.....	9
1.2.7. Випромінювання і прийом високочастотних коливань.....	9
1.2.8. Частотна вибірковість.....	10
1.2.9. Підсилення слабких високочастотних сигналів.....	10
1.2.10.Перетворення частоти.....	10
1.2.11. Детектування високочастотних коливань.....	11
1.2.12 Декодування.....	11
1.2.13.Перетворення електричного сигналу в неелектричний.....	11
1.3. Основні області застосування радіотехніки.....	11
2. Електричні сигнали і їх характеристики.....	12
2.1. Визначення електричного сигнали.....	12
2.2 Класифікація сигналів.....	13
2.2.1. Класифікація сигналів по ймовірнісним.....	13
характеристикам	
2.2.2. Класифікація сигналів по частотним властивостями.....	16
2.2.3 Класифікація сигналів по амплітудно-часовим.....	18
характеристикам	
2.3. Енергетичні характеристики сигналів.....	18
2.3.1. Миттєва потужність сигналу.....	19
2.3.2. Енергія сигналу на інтервалі часу.....	19
2.3.3. Повна енергія сигналу.....	19

2.3.4. Середня потужність на кінцевому інтервалі часу.....	20
2.3.5 Середня потужність на нескінченному інтервалі часу.....	20
2.3.6. Чинне значення періодичного сигналу.....	20
2.3.7. Взаємна енергія двох сигналів.....	21
2.4. Розкладання сигналу по системі ортогональних функцій.....	22
3. Спектральний Фур'є-аналіз періодичних сигналів.....	24
3.1 Постановка задачі.....	24
3.2 Розклад періодичних сигналів в комплексний ряд Фур'є.....	25
3.3 Ряд Фур'є у тригонометричній формі.....	27
3.4 Спектри парних і непарних функцій в часі.....	27
3.5 Розподіл середньої потужності періодичного сигналу по спектру. Ефективна ширина спектра	30
3.6 Спектр періодичної послідовності імпульсів прямокутної форми...	31
3.7 Меандр та його спектр.....	34
4. Спектральний Фур'є-аналіз неперіодичних сигналів	36
4.1 Постановка задачі.....	36
4.2 Перетворення Фур'є. Спектральна щільність сигналу.....	37
4.3 Деякі уявлення спектральної щільності.....	38
4.4 Спектральна щільність парних та непарних функцій часу.....	39
4.5 Властивості спектральної щільності сигналу.....	40
4.6 Розподіл енергії в спектрі неперіодичного сигналу. Ефективна ширина спектру	44
4.7 Спектр одиночного імпульсу прямокутної форми.....	45
4.8 Функція Дирака (δ -функція) та її властивості.....	47
4.9 Спектральна щільність постійної напруги.....	50
4.10 Спектральна щільність гармонійного коливання.....	51
4.11 Спектральна щільність довільного періодичного процесу.....	52
4.12 Взаємозв'язок між спектрами одиночного імпульсу та сигналу, одержуваного періодичним повторенням цього імпульсу	53
4.13 Спектр пачки різновеликих імпульсів прямокутної форми.....	53

5 Застосування перетворення Лапласа для спектрального аналізу.....	55
5.1 Постановка задачі.....	55
5.2 Перетворення Лапласа.....	56
5.3 Методика визначення спектральної щільності з.....	57
використанням перетворення Лапласа	
5.4 Методика визначення оригіналу по спектральній.....	57
щільності з використанням перетворення Лапласа	
5.5 Функція Хевісайда та її спектр.....	58
5.6 Спектральна щільність гармонійного коливання.....	60
6 Кореляційний аналіз детермінованих сигналів.....	62
6.1 Автокореляційна функція сигналів з кінцевою енергією.....	62
6.2 Автокореляційна функція імпульсу прямокутної форми.....	63
6.3 Автокореляційна функція пачки прямокутних імпульсів.....	64
6.4 Автокореляційна функція періодичних сигналів.....	66
6.5 Автокореляційна функція гармонійного коливання.....	67
6.6 Взаємозв'язок АКФ та спектральної щільності.....	68
детермінованих сигналів	
6.7 Взаємна кореляційна функція.....	69
7 Радіосигнали та їх характеристики.....	70
7.1 Загальні положення.....	70
7.2 Радіосигнали з амплітудною модуляцією.....	71
7.3 Радіосигнали з кутовою модуляцією.....	81
7.4 Радіоімпульс з лінійною частотною модуляцією (ЛЧМ).....	88
Перелік посилань.....	92

1. ВСТУП В РАДІОТЕХНІКУ

1.1. Основне завдання радіотехніки

Термін **"радіотехніка"** виник від латинського слова **"radio"**. Що вперекладі означає **"випромінюю"**. Цей термін визначає основне завдання радіотехніки, яке сформулюємо наступним чином. *Основним завданням радіотехніки як галузі науки і техніки є прийом і передача інформації за допомогою електромагнітних хвиль.*

Суміжними для радіотехніки є такі галузі як *електрозв'язок* та *електротехніка*. Слід пам'ятати, що основні завдання, які вирішуються цими галузями, відрізняються від основного завдання радіотехніки. Основним завданням електрозв'язку є прийом і передача інформації по дротах, а основним завданням електротехніки є передача електричної енергії на відстань.

1.2. Основні радіотехнічні процеси

Основні радіотехнічні процеси розглянемо на прикладі збільшеної структурної схеми радіотехнічної системи (рис.1.1). Ця система складається з двох частин: передавальної і приймальної. Розглянемо послідовність процесів, які здійснюються над сигналами при передачі повідомлення від джерела до споживача.

У передавальній частині здійснюються наступні операції.

1.2.1. Перетворення неелектричної величини в електричну

Ця операція необхідна, оскільки повідомлення, яке підлягає передачі, носить, як правило, Неелектричний характер. Перетворення здійснюють за допомогою так званих первинних перетворювачів (наприклад, за допомогою мікрофона, відеокамери, термопар, тощо.). На виході первинних перетворювачів отримуємо вже електричний сигнал.

1.2.2. Підсилення сигналів первинних перетворювачів

Сигнали, що знімаються з первинних перетворювачів, є відносно низько-частотними (по відношенню до несучої частоти передавача). Тому для посилення сигналів в цій частині системи застосовують аперіодичні підсилювачі з відповідною пропускну здатністю (УНЧ, імпульсні підсилювачі, відеопідсилювачі).

1.2.3. Кодування переданого повідомлення

Ця операція не є обов'язковою. Її використовують у випадках, якщо необхідно забезпечити скритність, або підвищити стійкість передачі даних, а також при передачі цифрових даних. Кодування здійснюється за допомогою спеціальних пристроїв, званих кодерами

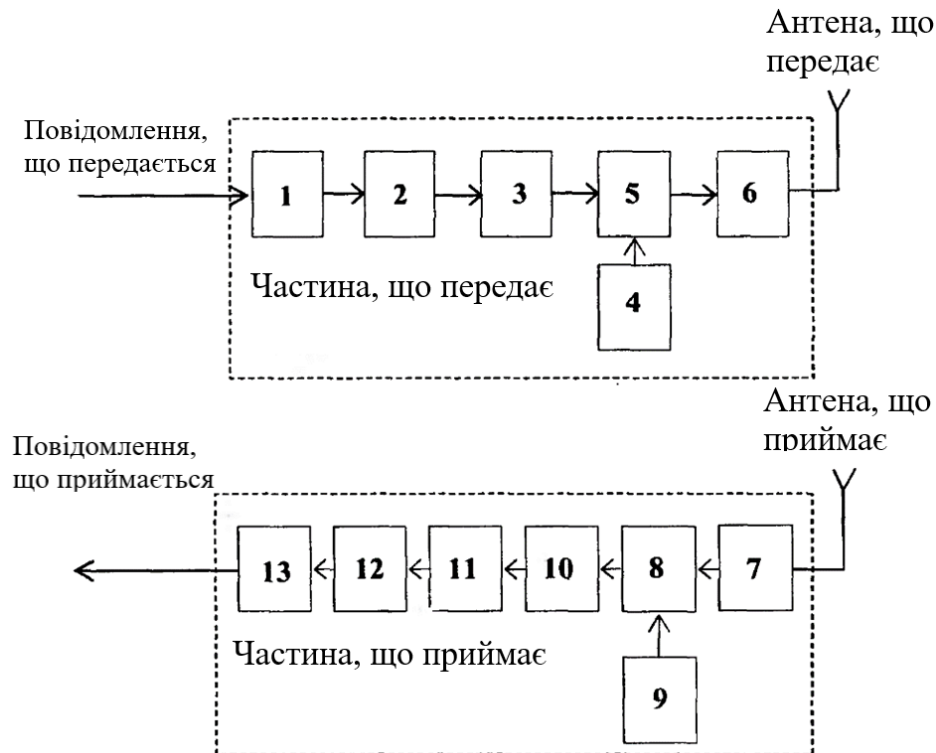


Рисунок 1.1 – Прийом і передача повідомлень

- Позначення:
- 1 - перетворювач неелектричного сигналу в електричний;
 - 2 - підсилювач сигналу первинного перетворювача;
 - 3 - пристрій для кодування;
 - 4 - генератор несучого коливання;
 - 5 - модулятор високочастотного коливання;
 - 6 - підсилювач потужності високочастотного сигналу;
 - 7 - підсилювач високої частоти (ПВЧ);
 - 8 - перетворювач частоти;
 - 9 - малопотужний автогенератор (гетеродин);
 - 10 - підсилювач проміжної частоти (ППЧ);

11 - детектор;

12 - підсилювач продетектованого сигналу;

13 - перетворювач електричного сигналу в неелектричний.

1.2.4. Генерування несучого коливання

Несуче коливання - це високочастотне коливання, параметри якого можуть змінюватися за законом переданого повідомлення. Це коливання називають несучим, оскільки воно здатне нести повідомлення.

У кожному радіопередавальному пристрої є власний генератор несучого коливання. Як правило, в якості несучого коливання використовують гармонійне коливання.

1.2.5. Модуляція високочастотних коливань

Модуляція - це процес зміни одного або декількох параметрів високочастотного коливання за законом переданого повідомлення. У результаті модуляції під впливом переданого повідомлення змінюється або амплітуда (амплітудна модуляція), або частота (частотна модуляція), або початкова фаза (фазова модуляція) високочастотного коливання.

Доцільність проведення модуляції визначається наступними факторами: необхідністю зменшення розмірів антени; необхідністю здійснювати виборчий прийом. Проаналізуємо ці чинники.

1). Для ефективного випромінювання електромагнітних коливань розмір антени повинен бути, як відомо, сумірним з довжиною хвилі. Розглянемо випадок передачі акустичних повідомлень. Неважко підрахувати, що довжина електромагнітної хвилі на частоті 1000 Гц (середня частота телефонного каналу) становить $\lambda = 300$ км. Навіть при розмірі антени $L = \lambda/4$ вона практично не реалізується ($L = 75$ км). Тому необхотімо перейти на істотно вищу частоту. Так на частоті 10 МГц розмір антени складатиме всього 7,5 м.

2). Без застосування модуляції не представляється можливим здійснення простого виборчого прийому, при якому в приймальному здійснюється вибір по-

трібної радіостанції з усіх працюючих станцій. Модуляція дозволяє легко вирішити цю задачу.

Для вирішення цього завдання кожен передавач працює на своїй, відмінній від інших передавачів, несучій частоті. Це дозволяє рознести частоти передавальних станцій без їх перекриття. У приймальнику за допомогою вузькосмугових фільтрів здійснюється вибір (частотна селекція, вибірковість) потрібної станції з одночасним придушенням сигналів інших станцій.

Модуляція в передавачі здійснюється за допомогою пристроїв, названих модуляторами.

1.2.6. Підсилення потужності високочастотного коливання

Для забезпечення необхідної дальності дії радіоелектронної системи антена повинна випромінювати електромагнітні хвилі необхідної потужності. Тому після модуляції високочастотний сигнал підсилюють підсилювачем потужності.

1.2.7. Випромінювання і прийом високочастотних коливань

Для прийому і передачі повідомлень В радіотехніці використовують електромагнітні хвилі. Створення вільно поширених електромагнітних хвиль в навколишньому передавач просторі і прийом цих хвиль приймачем здійснюється за допомогою різних антен і антенних систем.

В приймальній частині здійснюють такі операції.

1.2.8. Частотна вибірковість

Частотна вибірковість -це властивість приймальної частини системи здійснювати вибір потрібного сигналу з усієї сукупності сигналів, що впливають на антену приймача. Ця операція здійснюється в приймальнику за допомогою вузькосмугових фільтрів (LC-контури, активні фільтри, твердотільні фільтри тощо). Ці фільтри розташовують у входному ланцюзі приймача, а також в підсилювачах високої і проміжної частоти.

1.2.9. Підсилення слабких високочастотних сигналів

Високочастотні сигнали, що наводяться в антені, як правило, мають низький рівень (одиниці і десятки мікровольт). Тому іноді потрібне попереднє посилення цих сигналів. Це посилення здійснюється підсилювачем високої частоти (ПВЧ), який представляє собою вузькосмуговий фільтр, що настроюється на несучу частоту сигналу.

1.2.10.Перетворення частоти

Ця операція, в результаті якої в приймальнику формується радіосигнал з однією і тією ж **проміжною частотою** (ПЧ) незалежно від несучої частоти сигналу. По суті, ПЧ виступає в якості фіксовані несучої частоти для всіх сигналів. При цьому вид і параметри модуляції зберігаються такими ж, як у прийнятого сигналу. Приймачі з перетворенням частоти називають **супергетеродинами**. Для отримання ПЧ в таких приймачах застосовують перетворювач частоти, що складається з змішувача і малопотужного генератора гармонійних коливань, званого **гетеродином**. Перетворення частоти дозволяє вирішити такі завдання:

а) забезпечити основне підсилення сигналу на фіксованій проміжній частоті з допомогою неперебудовуваного підсилювача проміжної частоти (ППЧ), що володіє високою частотною вибірковістю;

б) підвищити чутливість приймача, оскільки на проміжній частоті (як правило, більш низької, ніж несуча частота сигналу що приймається) легко забезпечити великий коефіцієнт посилення без втрати стійкості.

1.2.11. Детектування високочастотних коливань

Детектування- це операція зворотня модуляції. Детектування здійснюється за допомогою пристроїв, званих детекторами. На виході детектора отримують сигнал, величина якого прямо пропорційна модулюючому параметру вхідного високочастотного сигналу.

1.2.12.Декодування

Декодування- операція зворотна кодуванню. Ця операція здійснюється за допомогою пристроїв, званих декодерами, і проводиться тільки в тому випадку, коли при передачі здійснювалося кодування.

1.2.13.Перетворення електричного сигналу в неелектричний

Електричний сигнал на останньому етапі обробки, як правило, перетворюється в неелектричний (акустичне коливання, оптичне зображення, механічне переміщення та ін.). Це перетворення здійснюють за допомогою спеціальних пристроїв (гучномовця, електронно-променевої трубки, електричного двигуна та ін.).

1.3. Основні області застосування радіотехніки

Перелічимо найбільш важливі області застосування радіотехніки і дамо їм коротку характеристику.

Радіозв'язок - зв'язок між декількома абонентами за допомогою електромагнітних хвиль. При цьому кожен з абонентів може зв'язатися з будь-яким іншим абонентом за допомогою приймача.

Радіомовлення - одностороння зв'язок, при якій джерела інформації мають тільки передавачі, а споживачі - тільки приймачі.

Вся Земна куля покрита мережею радіомовних станцій.

Телебачення - передача зображення на відстань за допомогою електромагнітних хвиль. Телебачення на сьогоднішній день є потужним інформаційним засобом у всіх розвинених країнах.

Радіолокація - виявлення об'єктів, визначення їх швидкості і координат за допомогою електромагнітних хвиль. Збройні сили розвинених країн широко використовують радіолокацію для цілей протиповітряної оборони. Розвиток цивільної та військової авіації не можливо уявити без радіолокації.

Радіотелемеханіка - управління об'єктами на відстані. Ця галузь знайшла своє застосування в космічній і військовій техніці, в системах дистанційного керування технологічними процесами та ін.

Радіонавігація - визначення власних координат об'єктів за допомогою радіотехнічних засобів. До навігаційного обладнання відносять також системи сліпої посадки літаків, стикування космічних кораблів і ін.

Існує також безліч інших областей застосування радіотехніки: радіоастрономія, радіотелеметрія, радіовиміри, побутова радіотехніка, факсимільний зв'язок та ін. Не перебільшуючи, можна сказати, що радіотехніка проникає в усі сфери діяльності людини.

2. ЕЛЕКТРИЧНІ СИГНАЛИ І ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

2.1. Визначення електричного сигналу

Термін "**сигнал**" (signum) в перекладі з грецького означає "знак". Це поняття пов'язують з певним фізичним процесом (повідомленням). Повідомлення в загальному випадку містять інформацію і породжують в радіотехнічних системах електричні сигнали.

Електричний сигнал-деяка зміна струму або напруги, однозначно пов'язана з повідомленням. Фізичні процеси змінюються в часі. Тому електричний сигнал в майбутньому будемо представляти функцією часу. Позначення сигналів: $i(t)$ - струм; $u(t)$ - напруга; $s(t)$ - відеосигнал (НЧ); $a(t)$ - радіосигнал (ВЧ); $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - випадкові сигнали.

2.2. Класифікація сигналів

2.2.1. Класифікація сигналів по ймовірнісним характеристикам

За цією ознакою сигнали ділять на детерміновані і випадкові.

Детерміновані сигнали - це сигнали, значення яких в будь-який момент часу відомі, тобто передбачувані з ймовірністю, яка дорівнює одиниці. Ці сигнали можуть бути задані аналітично (у вигляді математичних формул), графічно,

або у вигляді таблиць. детерміновані сигнали не несуть інформації, оскільки вони повністю визначені.

Випадкові сигнали - це такі сигнали, значення яких в довільний момент часу не можуть бути визначені з ймовірністю, яка дорівнює одиниці, а може лише задаватися ймовірність попадання значень цих сигналів в певний інтервал. Модель випадкового сигналу будемо використовувати в двох випадках: для опису шумів і перешкод; при розгляді інформаційних характеристик сигналів. Даний вид сигналів може містити інформацію, наприклад: мова, музика, сигнали зображення, тощо.

Детерміновані сигнали поділяють в свою чергу на періодичні та неперіодичні.

Періодичними називають сигнали, для яких на інтервалі часу $-\infty < t < \infty$ виконується умова

$$s(t) = s(t + kT) \quad (2.1)$$

де $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ цілі числа; T - період функції $s(t)$

До числа таких сигналів відносять періодичні послідовності імпульсів, приклади яких зображені на рисунку 2.1: періодична послідовність прямокутних імпульсів (діаграма а); періодична послідовність трикутних імпульсів (діаграма б).

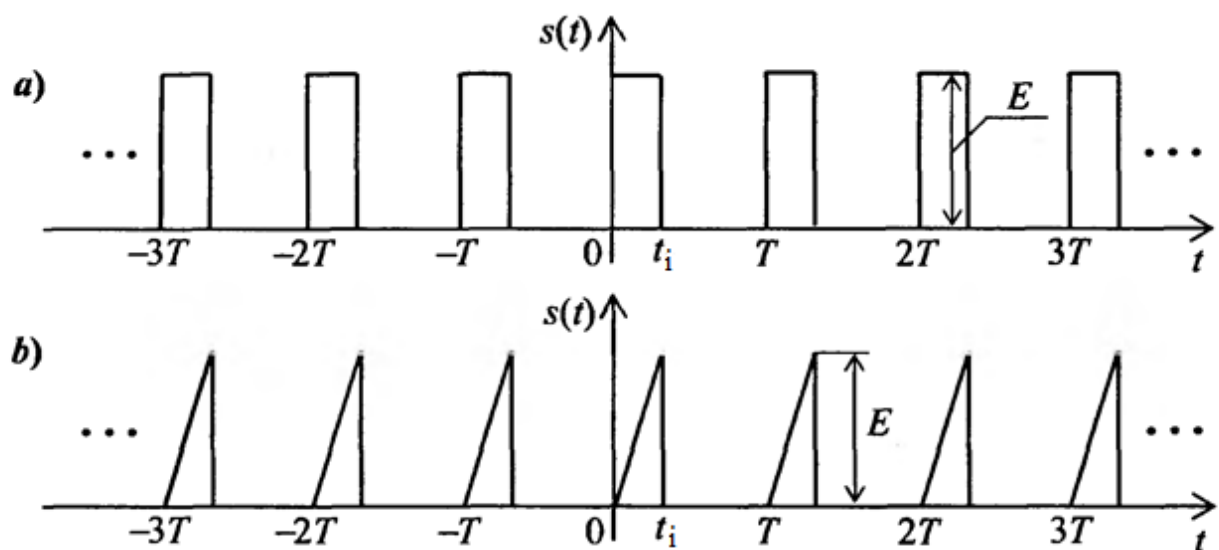


Рисунок 2.1 – періодична послідовність прямокутних імпульсів (діаграма а); періодична послідовність трикутних імпульсів (діаграма б).

Для імпульсних послідовностей запроваджується поняття шпаруватості. **Шпаруватість**- це відношення періоду сигналу T до тривалості окремого імпульсу t_i .

$$Q = T / t_i \quad (2.2)$$

Число Q задовольняє умові: $Q \geq 1$.

Іншим прикладом періодичного сигналу є гармонійне коливання (рис. 2.2).

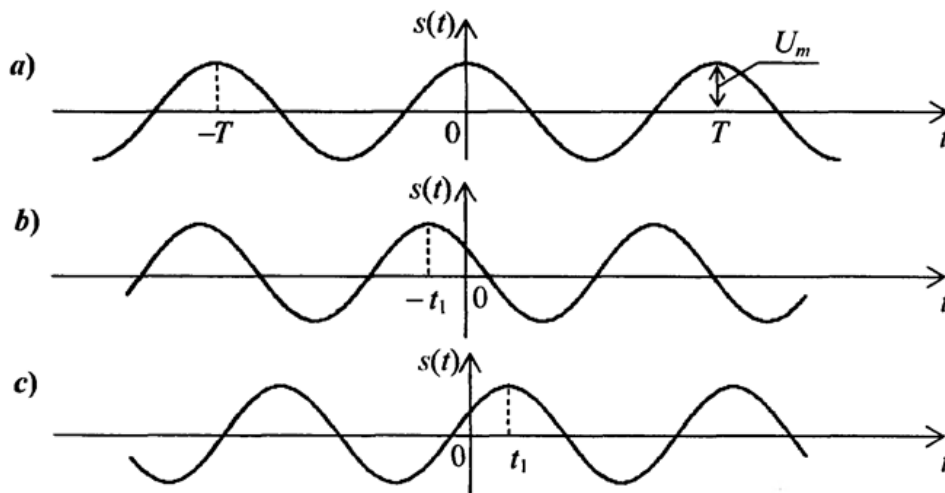


Рисунок 2.2 – Гармонійне коливання

Аналітичний запис такого сигналу має вигляд:

$$s(t) = U_m \cos(\omega t + \theta), \quad (2.3)$$

де U_m - амплітуда, що вимірюється в вольтах (амперах); $\omega = 2\pi f$ – кругова частота, що вимірюється в рад / сек; $f = 1/T$ - частота, що вимірюється в герцах; T - період сигналу, що вимірюється в секундах; θ - початкова фаза, що вимірюється в радіанах.

На рисунку 2.2 діаграми побудовані при різних початкових фазах θ : а) $\theta = 0$; б) $\theta = +\omega t_1 > 0$ (зрушення вліво); в) $\theta = -\omega t_1 < 0$ (зрушення вправо).

Періодичні сигнали є математичною абстракцією, оскільки відповідно до визначення вони повинні існувати в інтервалі часу від $-\infty$ до $+\infty$. Очевидно, що повна енергія таких сигналів дорівнює нескінченності. І все ж модель періодичного сигналу часто використовують для теоретичного опису повторюваних процесів. Якщо час спостереження сигналу значно перевищує інтервал T , то можна вважати, що процес що повторюється - періодичний. На практиці використовують повторювані сигнали у вигляді часових відрізків періодичних функцій.

Неперіодичними називають сигнали, для яких не виконується умова (2.1). Зазвичай це сигнали, які відмінні від нуля на кінцевому інтервалі часу. Наприклад, поодинокі імпульси і пачки імпульсів.

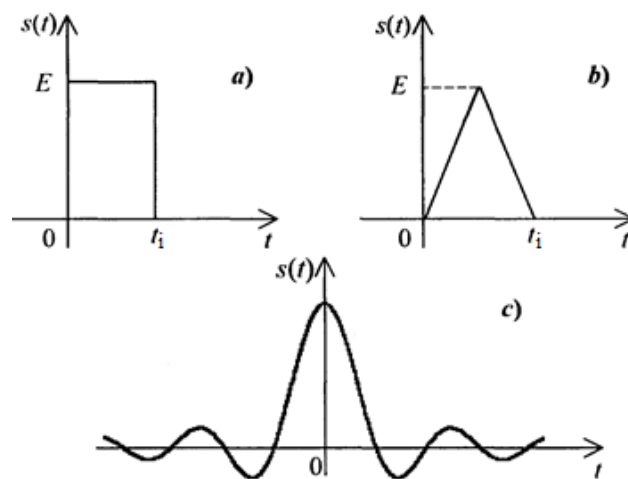


Рисунок 2.3 – Приклади неперіодичних процесів: поодинокі імпульси (діаграми а і б); сигнал виду $\sin(kt)/kt$ (діаграма с).

Пачкою називають сигнал, що містить кінцеве число одиночних імпульсів. Однак можна задати неперіодичні сигнали, які відмінні від нуля і на нескінченному інтервалі часу, наприклад сигнал виду $\sin(kt)/kt$, де $k = \text{const}$. На рисунку 2.3 зображені деякі приклади неперіодичних процесів: поодинокі імпульси (діаграми а і б); сигнал виду $\sin(kt)/kt$ (діаграма с).

2.2.2. Класифікація сигналів по частотним властивостям

Особливе місце в класифікації сигналів займає поділ їх на дві групи: радіосигнали і відеосигнали.

Радіосигнали - це високочастотні коливання, що несуть повідомлення. Повідомлення в радіосигнал закладається шляхом модуляції. У радіосистемі радіосигнали отримують в передавачі на виході модулятора, і вони існують аж до детектора приймача (тракт радіочастоти).

Як зазначалося раніше, модуляція - це процес зміни параметрів радіосигналу за законом переданого повідомлення.

Розрізняють три основних види модуляції:

-амплітудная модуляція (АМ) - процес, при якому за законом переданого повідомлення змінюється амплітуда радіосигналу.

-частотная модуляція (ЧМ) - процес, при якому за законом переданого повідомлення змінюється частота радіосигналу.

-фазовая модуляція(ФМ) - процес, при якому за законом переданого повідомлення змінюється початкова фаза.

Два останні види модуляції (ЧМ і ФМ) об'єднують загальною назвою - **кутова модуляція (КМ)**, так як і в тому і в іншому випадках зміни піддається повна фаза сигналу.

У відсутності модуляції радіосигнал являє собою **несуче коливання** (рис. 2.4, *a*). Амплітуда і період цього коливання постійні $A_0, T_0 = const$. В якості несучих коливань найбільш часто використовують часові відрізки високочастотних гармонійних сигналів виду (2.3).

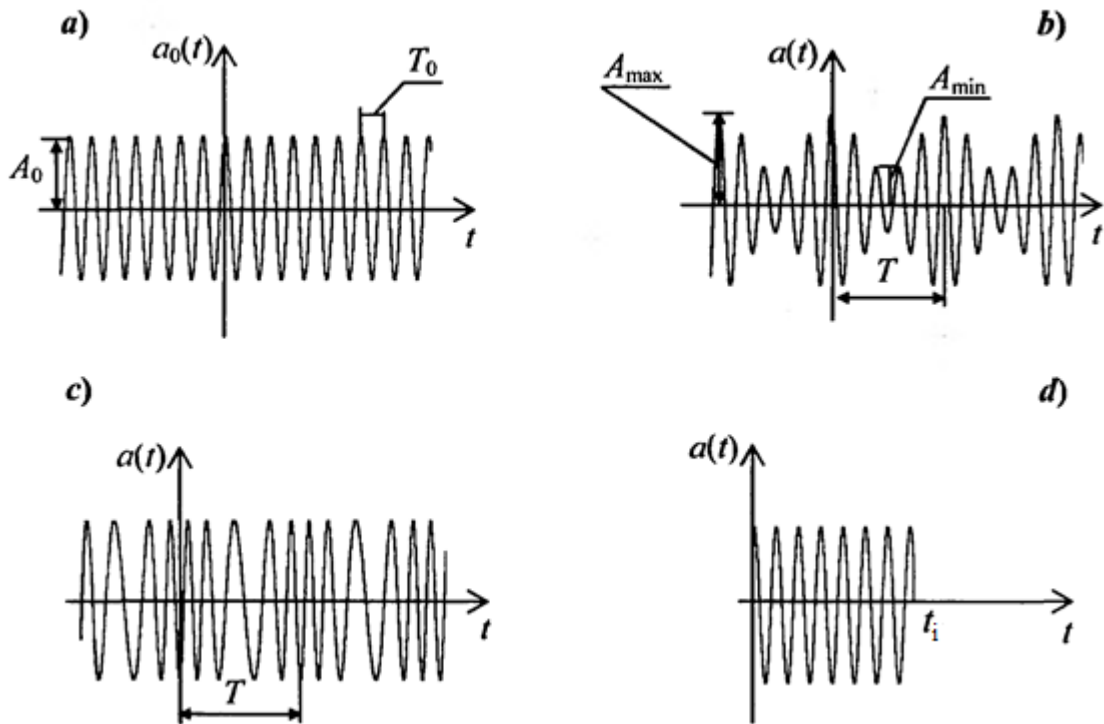


Рисунок 2.4 – Несуче коливання (а); діаграма радіосигналу з тональної АМ (b); діаграма радіосигналу з тональної ЧС (c); радіоімпульс з прямокутною обвідної тривалістю t_i . (d)

Модуляцію, при якій сигнал, що модулює являє собою гармонійне коливання, називають **тональної (гармонійної)**. На рисунку 2.4, **b**, зображена тимчасова діаграма радіосигналу з тональної АМ, а на рисунку 2.4, **c** - з тональної ЧС. На цих рисунках позначено: $A_{\max}, A_{\min}$ - максимальне і мінімальне значення амплітуди; T_Ω період модулюючого сигналу; Ω - частота модуляції.

На рисунку (2.4, **d**) зображений радіоімпульс з прямокутною обвідної тривалістю t_i .

Відеосигнал - це низькочастотні (відносно радіосигналів) коливання, які безпосередньо пов'язані з переданим повідомленням. Їх називають ще модулюють сигналами. Відеосигнали використовують в передавачі до модулятора і в приймачі після детектора (відеотракт).

2.2.3. Класифікація сигналів по амплітудно-часовим характеристикам

За цією ознакою сигнали розбивають на 4 основні групи: аналогові; дискретні в часі; квантовані за рівнем; цифрові.

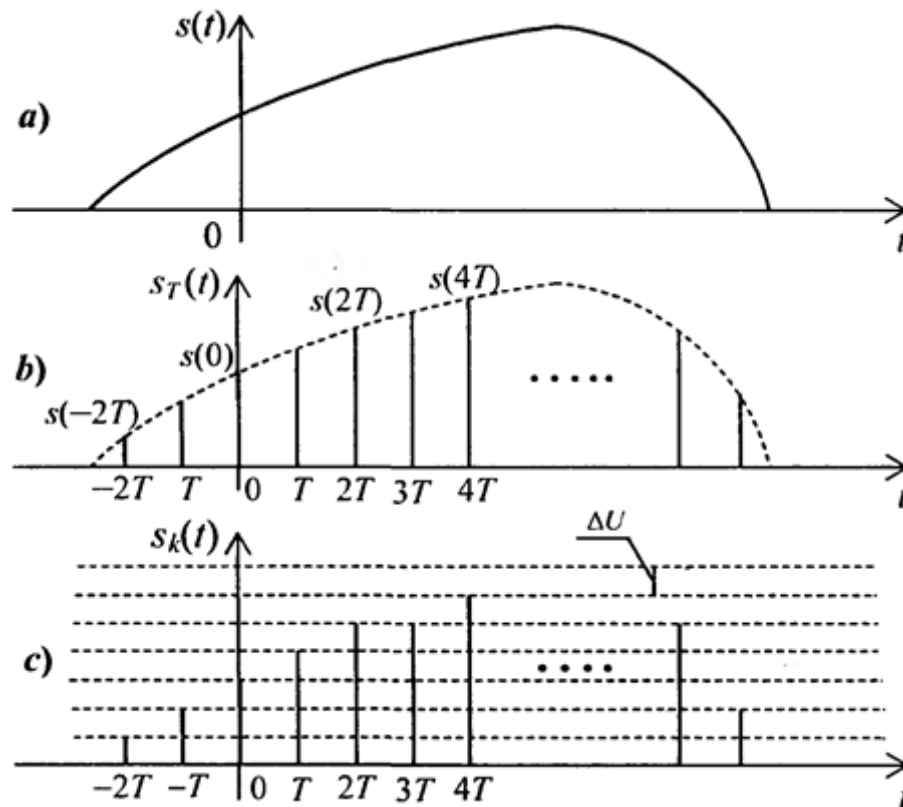


Рисунок 2.5 – Аналоговий (континуальний) сигнал (а); Дискретний у часі сигнал (b); Квантований за рівнем і дискретний за часом сигнал (с)

Аналоговий (континуальний) сигнал - це безперервний за часом і безперервний за рівнем сигнал (рисунок 2.5, *a*). Такий сигнал може приймати будь-які значення (в межах динамічного діапазону цього сигналу).

Дискретний у часі сигнал - це сигнал, безперервний по рівню і дискретний за часом. Такий сигнал може приймати будь-які значення (в межах динамічного діапазону) в дискретні моменти часу, а в проміжках між цими моментами він дорівнює нулю (рисунок 2.5, *b*).

Квантований за рівнем і дискретний за часом сигнал – це дискретний у часі сигнал, який може приймати тільки ряд дискретних значень, кратних деякої постійної величини, яка називається кроком квантування (рис 2.5, *c*).

Цифровий сигнал - це квантований за рівнем сигнал, представлений цифровими кодами. Найбільш часто використовуються двійкові коди.

2.3. Енергетичні характеристики сигналів

Потужність і енергія є важливими характеристиками сигналів. В радіотехніці використовують такі основні енергетичні характеристики [1,2].

2.3.1. Миттєва потужність сигналу

Це потужність $p(t)$, що розвивається сигналом $s(t)$ на опорі R в момент часу t . В відповідно до закону Джоуля-Ленца: $p(t) = s^2(t)R$, якщо $s(t)$ є струмом і $p(t) = s^2(t)/R$, якщо $s(t)$ є напругою. Прийнято говорити про потужності, що розвивається на опорі величиною 1 Ом. Тоді, незалежно від того, є $s(t)$ струмом або напругою, миттєва потужність дорівнює

$$p(t) = s^2(t). \quad (2.4)$$

2.3.2. Енергія сигналу на інтервалі часу

Це енергія, що виділяється сигналом $s(t)$ на опорі 1 Ом на інтервалі часу (t_1, t_2) . Енергія визначається як інтеграл від миттєвої потужності:

$$E_{t_1 \div t_2} = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt \quad (2.5)$$

2.3.3. Повна енергія сигналу

Це енергія, що виділяється сигналом $s(t)$ на опорі 1 Ом на нескінченному інтервалі часу:

$$E_{t_1 \div t_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt \quad (2.6)$$

Повна енергія одиночного прямокутного імпульсу (рис.2.3,а) дорівнює:

$$E_{t_1 \div t_2} = \int_0^{t_i} E^2 dt = E^2 t_i \quad (2.7)$$

2.3.4. Середня потужність на кінцевому інтервалі часу

Ця потужність визначається відношенням енергії, що виділяється на опорі 1 Ом на деякому інтервалі часу (t_1, t_2) , до величини цього інтервалу

$$P_{cep} = \frac{E_{t_1 \div t_2}}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt \quad (2.8)$$

2.3.5. Середня потужність на нескінченному інтервалі часу

Ця потужність визначається як межа

$$P_{cep} = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow -\infty \\ t_2 \rightarrow +\infty}} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt \quad (2.9)$$

Для періодичних сигналів результати усереднення на нескінченному інтервалі часу і на інтервалі, рівному періоду T , збігаються, тому

$$P_{cep} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt \quad (2.10)$$

Зокрема, для гармонійного коливання (рисунок 2.2) середня потужність дорівнює:

$$P_{cep} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} U_m^2 \cos^2(\omega t + \theta) dt = \frac{U_m^2}{2} \quad (2.11)$$

Для періодичної послідовності прямокутних імпульсів (рисунок 2.1, а)

$$P_{cep} = \frac{1}{T} \int_0^{t_i} E^2 dt = \frac{E_{t_n}^2}{T} = \frac{E^2}{Q} \quad (2.12)$$

2.3.6 Діюче значення періодичного сигналу

На підставі середньої потужності вводиться поняття чинного (ефективного) значення періодичного сигналу

$$S_u = \sqrt{P_{\text{сеп}}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt} \quad (2.13)$$

З урахуванням (2.11) знайдемо діюче значення для гармонійного сигналу:

$$U_d = U_m / \sqrt{2} \quad (2.14)$$

З урахуванням (2.12) визначимо діюче значення для періодичної послідовності прямокутних імпульсів:

$$U_u = E / \sqrt{Q} \quad (2.15)$$

2.3.7. Взаємна енергія двох сигналів

Розглянемо два сигналу $s_1(t)$ і $s_2(t)$. Енергія суми цих сигналів на інтервалі часу (t_1, t_2) відповідно до (2.16) дорівнює

$$\begin{aligned} E_{t_1+t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} s_1^2(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} s_2^2(t) dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} s_1(t) s_2(t) dt = E_1 + E_2 + 2E_{12}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

де E_1 і E_2 - енергія першого і другого сигналів, відповідно.

Величину E_{12} називають взаємної енергією цих сигналів. Виходячи зотриманої формули, робимо висновок про те, що в загальному випадку енергія суми двох сигналів не дорівнює сумі їх енергій і відрізняється від цієї суми на величину $2E_{12}$, тобто енергетичні характеристики сигналів в загальному випадку неадитивні.

Винятком становлять сигнали, для яких взаємна енергія дорівнює нулю: $E_{12} = 0$. Такі сигнали називають ортогональними. Умовою ортогональності двох сигналів на інтервалі (t_1, t_2) є рівність нулю їх взаємної енергії

$$\int_{t_1}^{t_2} s_1(t) s_2(t) dt = 0 \quad (2.17)$$

Система ортогональних функцій - це нескінченний набір функцій, в якому всі функції попарно ортогональні.

Умовою ортогональності системи $\varphi_n(t)$ На інтервалі часу (t_1, t_2) є наступне співвідношення:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \|\varphi_n\|^2, & n = m \end{cases} \quad (2.18)$$

де n, m - цілі числа; $\|\varphi_n\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n^2(t) dt$ - енергія функції $\varphi_n(t)$ на інтервалі

(t_1, t_2) , звана **квадратом норми цієї функції**.

Якщо $\varphi_n(t)$ - комплексна функція, то в цьому випадку миттєва потужність, квадрат норми і умови ортогональності виглядають наступним чином:

$$p(t) = \varphi_n(t) \varphi_n^*(t) = |\varphi_n(t)|^2; \quad (2.19)$$

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |\varphi_n(t)|^2 dt; \quad (2.20)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \|\varphi_n\|^2, & n = m \end{cases} \quad (2.21)$$

формулі (2.21) символ "*" позначає комплексне сполучення. Формули (2.19) - (2.21) є загальними і справедливі як для комплексних, так і для дійсних сигналів.

2.4. Розкладання сигналу по системі ортогональних функцій

На практиці часто необхідно складний сигнал уявити як суму простих сигналів.

Важливе місце при вирішенні таких завдань займає розкладання сигналів по системі ортогональних функцій, так як для таких функцій дотримується принцип адитивності енергетичних характеристик. У цьому випадку енергія сигналу розподіляється між складовими, на які розкладається цей сигнал.

Теорема: Нехай заданий сигнал $s(t)$, який на інтервалі (t_1, t_2) володіє кінцевою енергією $\int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt < \infty$, і є система ортогональних на цьому інтервалі функцій $\varphi_n(t)$. Тоді сигнал на інтервалі (t_1, t_2) можна розкласти в *ряд по системі ортогональних функцій*

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \varphi_n(t), \quad (2.22)$$

де $\dot{C}_n$ - коефіцієнти розкладання в ряд, що не залежать від часу (в загальному випадку комплексні).

Ряд (2.22) називають *узагальненим рядом Фур'є*.

Визначимо коефіцієнти $\dot{C}_n$. Для цього помножимо ліву і правучастини співвідношення (2.22) на $\varphi_n^*(t)$ і інтегруємо на проміжку (t_1, t_2) . З урахуванням умови ортогональності (2.21) в правій частині залишиться тільки один член

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t) \varphi_n^*(t) dt = \dot{C}_n \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t) \varphi_n^*(t) dt = \dot{C}_n \|\varphi_n\|^2 \quad (2.23)$$

Із (2.23) виразимо шукану величину

$$\dot{C}_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{t_1}^{t_2} s(t) \varphi_n^*(t) dt \quad (2.24)$$

Таким чином, формула (2.24) дозволяє визначити коефіцієнти розкладання для використовуваної системи ортогональних функцій.

З розкладанням в ряд по системі ортогональних функцій пов'язано узагальнене уявлення про спектр сигналу. *Спектр сигналу в узагальненому сенсі* - це набір ортогональних функцій, на які розкладається даний сигнал. Часом під спектром розуміють набір коефіцієнтів $\dot{C}_n$ які визначають внесок n -ої складової ряду в сигнал.

3. Спектральний Фур'є-аналіз періодичних сигналів

3.1 Постановка задачі

Як вказувалося раніше, найбільше розповсюдження в радіотехніці знайшло розкладання сигналів по системі гармонійних функцій.

З цим розкладанням пов'язано визначення спектра по Фур'є, який довів, що складні функції можна уявити як суми гармонійних функцій. Спектром сигналу по Фур'є називають набір гармонійних функцій, на які розкладається даний сигнал. Спектр по Фур'є (спектр) визначає частотний склад сигналу.

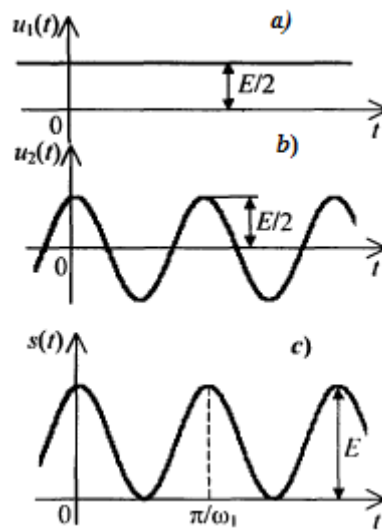


Рисунок 3.1 – Часове представлення сигналів

Для з'ясування цього поняття визначимо спектр сигналу $s(t) = E \cos^2 \omega_1 t$.

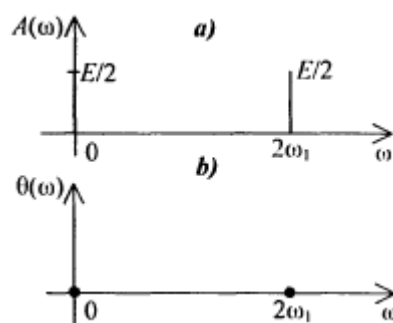


Рисунок 3.2 – Спектрограма амплітуд (а) та спектрограма фаз для розглянутого сигналу (б).

Даний сигнал є періодичною, але не гармонійною функцією. Для розкладання сигналу $s(t)$ в спектр скористаємось відомим з тригонометрії співвідношенням $\cos^2 \alpha = [1 + \cos(2\alpha)]/2$, з урахуванням якого отримуємо

$$s(t) = \frac{E}{2} + \frac{E}{2} \cos(2\omega_1 t).$$

Таким чином, сигнал $s(t)$ можна уявити у вигляді двох гармонійних складових (рис 3.1). Перша складова, зображена на діаграмі **a**, є константою $u_1(t) = E/2$ (вироджений випадок гармонійного коливання з нульовою частотою). Друга складова зображена на діаграмі **b**, представляє собою гармонійне коливання з частотою $2\omega_1$: $u_2(t) = \frac{E}{2} \cos(2\omega_1 t)$. Ці дві складові в сумі дають сигнал $s(t)$, який зображений на діаграмі **c**.

За результатами спектрального аналізу періодичних сигналів будують спектрограми. **Спектрограма амплітуд** – залежність амплітуд складових спектра від частоти. **Спектрограма фаз** – залежність початкових фаз складових спектра від частоти. На рис. 3.2,**a** побудована спектрограма амплітуд, а на рис. 3.2,**b** – спектрограма фаз для розглянутого сигналу.

3.2 Розклад періодичних сигналів в комплексний ряд Фур'є

Розглянемо задачу гармонійного аналізу періодичного сигналу в загальній постановці. Нехай дано періодичний сигнал $s(t)$ частотою повторень $\omega_1 = 2\pi/T$ (рис. 3.3), для якого на інтервалі часу, що дорівнює періоду, виконується умова абсолютного інтегрування:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |s(t)| dt < \infty \quad (3.1)$$

А також виконується умова Дірихле (кінцеве число екстремумів і розривів першого роду на інтервалі, який дорівнює періоду). Необхідно розкласти цей сигнал в спектр по системі гармонійних ортогональних функцій.

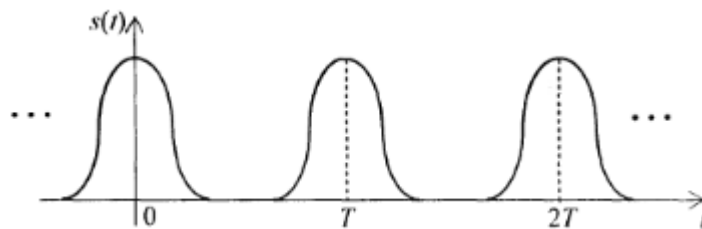


Рисунок 3.3 – Періодичний сигнал $s(t)$ частотою повторень $\omega_1 = 2\pi/T$

Виберемо в якості повної системи ортогональних функцій систему комплексних експоненціальних функцій:

$$\varphi_n(t) = e^{jn\omega_1 t}. \quad (3.2)$$

Доведемо, що система функцій (3.2) є ортогональною на інтервалі $(-T/2, T/2)$. Для цього, перевіримо виконання вимог ортогональності (2.20):

$$\int_{-T/2}^{T/2} \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt = \begin{cases} \text{при } m \neq n: \int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\omega_1 t} e^{-jm\omega_1 t} dt = 0; \\ \text{при } m = n: \int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\omega_1 t} e^{-jn\omega_1 t} dt = \|\varphi_n\|^2 = T \end{cases} \quad (3.3)$$

У випадку $m \neq n$ інтеграл береться наступним чином:

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\omega_1 t} e^{-jm\omega_1 t} dt = \frac{1}{j(n-m)} e^{j(n-m)\omega_1 t} \Big|_{-T/2}^{T/2} = 0.$$

Таким чином, сигнал можна уявити у вигляді ряду (2.21), який у даному окремому випадку називається гармонійним рядом Фур'є в комплексній формі

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3.4)$$

Коефіцієнти розкладання визначимо відповідно з (2.23):

$$\dot{C}_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \varphi_n^*(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3.5)$$

Розглянемо деякі властивості спектра сигналу, який представлений поруч (3.4). Спектр сигналу в даному вигляді представляє собою нескінченний набір комплексних гармонійних функцій з тривалим та негативними частотами. Внесок цих функцій в сигнал визначається коефіцієнтами $\dot{C}_n$, які вираховуються по формулі (3.5) та, по суті є комплексними амплітудами гармонійних коливань з частотами $n\omega_1$.

Ці коефіцієнти в загальному випадку є комплексними числами та їх можна представити в алгебраїчній та показовій формах

$$\dot{C}_n = C_{nc} + jC_{ns} = |\dot{C}_n| e^{j\theta_n} \quad (3.6)$$

Де C_{nc} , C_{ns} — дійсна та уявна частини, що визначається по формулам:

$$C_{nc} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt; \quad (3.7)$$

$$C_{ns} = -\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt; \quad (3.8)$$

Модуль і аргумент коефіцієнта розкладання розраховують по формулам:

$$|\dot{C}_n| = \sqrt{C_{nc}^2 + C_{ns}^2}; \quad (3.9)$$

$$\theta_n = \argum(\dot{C}_n) = \arctg \quad (3.10)$$

Відзначимо, що C_{nc} та $|\dot{C}_n|$ є парними функціями аргументу n , а C_{ns} та θ_n – не парними. Підставимо в (3.4) коефіцієнт $\dot{C}_n$, представлений через модуль та аргумент:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\dot{C}_n| e^{j(n\omega_1 t + \theta_n)} \quad (3.11)$$

Дана форма комплексного ряду Фур'є зручна для побудови спектрограм. На рисунку 3.4, **a** зображений приклад спектрограми модуля, а на рисунку 3.4, **b** – аргументу.

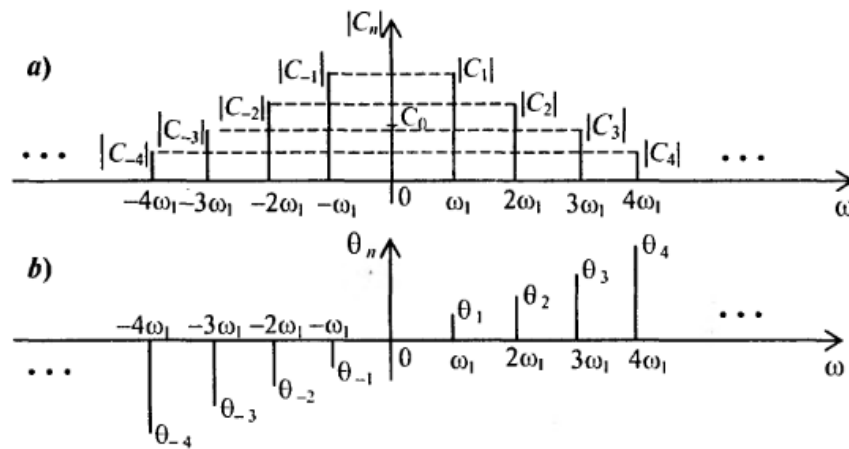


Рисунок 3.4 – **a** приклад спектрограми модуля, **b** – аргументу

3.3 Ряд Фур'є у тригонометричній формі

Комплексний ряд Фур'є (3.11) містить складові як позитивними, так і з негативними частотами. Оскільки коливання з негативними частотами не мають фізичного сенсу, то на практиці широке застосування знаходить ряд Фур'є, який представляє собою суму дійсних гармонійних функцій з тривалими частотами. Такий ряд називають рядом Фур'є в тригонометричній формі. Здійснимо перехід до такого ряду Фур'є. для цього розіб'ємо ряд (3.11) на дві суми, виділивши при цьому у вигляді окремого члена коефіцієнт C_0 :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} |\dot{C}_n| e^{j(n\omega_1 t + \theta_n)} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |\dot{C}_n| e^{j(n\omega_1 t + \theta_n)}. \quad (3.12)$$

В останньому виразі перший та третій доданок – це коливання що представляють собою комплексні експоненти негативними та позитивними частотами відповідно.

Підсумуємо ці коливання, змінивши попередньо у першій сумі знак n на протилежний. При цьому врахуємо, що $|\dot{C}_n|$ є парною функцією параметра n , а θ_n – непарною:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} |\dot{C}_{-n}| e^{j(-n\omega_1 t + \theta_{-n})} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |\dot{C}_n| e^{j(n\omega_1 t + \theta_n)} = s(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} |\dot{C}_n| e^{-j(n\omega_1 t + \theta_n)} + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |\dot{C}_n| e^{j(n\omega_1 t + \theta_n)}. \quad (3.13)$$

Враховуючи що:

$$|\dot{C}_n| [e^{-j(n\omega_1 t + \theta_n)} + e^{j(n\omega_1 t + \theta_n)}] = 2|\dot{C}_n| \cos(n\omega_1 t + \theta_n), \quad (3.14)$$

Та, підставляючи (3.14) в (3.13), отримуємо:

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|\dot{C}_n| \cos(n\omega_1 t + \theta_n). \quad (3.15)$$

Вираз (3.15) представляє собою гармонійний ряд Фур'є в тригонометричному вигляді, який не містить членів з від'ємними частотами. Представимо (3.15) у наступному вигляді:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \theta_n). \quad (3.16)$$

де $\frac{a_0}{2} = C_0$ - постійна складова, яка не залежить від часу;

$A_n = 2|\dot{C}_n|$ – амплітуда гармонійного коливання з частотою $n\omega_1$; θ_n - початкова фаза гармонійного коливання з частотою $n\omega_1$.

Кожен член ряду Фур'є (3.16) представляє собою гармонійне коливання з амплітудою A_n , частотою $n\omega_1$ та початковою фазою θ_n . Амплітуда A_n та початкова фаза θ_n отримується наступними співвідношеннями

$$A_n = 2\sqrt{C_{nc}^2 + C_{ns}^2} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad (3.17)$$

$$\theta_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}, \quad (3.18)$$

де коефіцієнти розкладання a_n та b_n визначають по формулам:

$$a_n = 2C_{nc} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt; \quad (3.19)$$

$$b_n = 2C_{ns} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt. \quad (3.20)$$

Встановимо фізичний сенс постійної складової, вираз для якого отримаємо з формули (3.5), поклавши в ній $n=0$. В результаті отримаємо

$$\frac{a_0}{2} = C_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt. \quad (3.21)$$

Формула (3.21) представляє собою теорему про середнє. Тому постійна складова чисельно дорівнює середньому значенні функції $s(t)$ за період T .

Збудуємо спектрограми амплітуд та початкових фаз тригонометричного ряду Фур'є (рис. 3.5). порівнюючи спектрограми для комплексного та тригонометричного рядів Фур'є (рисунки 3.4 та 3.5), бачимо, що в другому випадку відсутні негативні частоти, а амплітуди гармонік A_n в два рази більше, ніж модулі коефіцієнтів розкладання $|\dot{C}_n|$, за виключенням постійної складової, величина якої залишається незмінною.

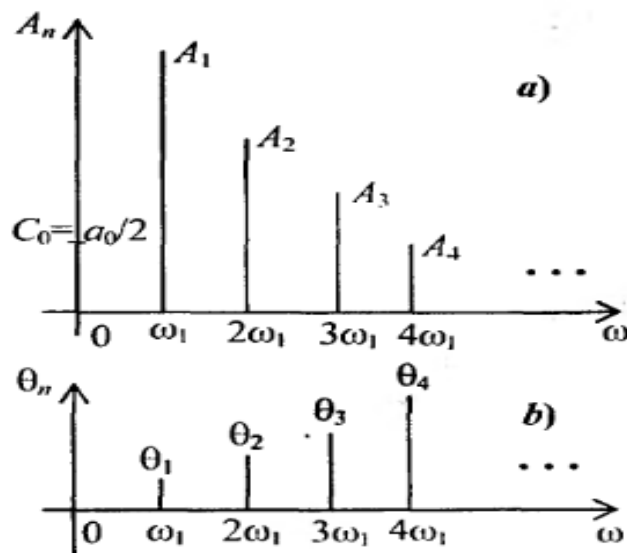


Рисунок 3.5 – Спектрограми амплітуд та початкових фаз тригонометричного ряду Фур'є

Проведений аналіз дозволяє зробити наступні висновки.

1. Періодичні сигнали мають дискретну (лінійчасту) структуру спектра. Дискретний спектр – це такий спектр, в склад якого входять гармонійні коливання з дискретними значеннями частот.

Спектр періодичного сигналу складається з гармонійних коливань з кратними частотами $n\omega_1$, де $\omega_1 = 2\pi/T$ – частота сигналу, розкладаемого в спектр. Гармонійні коливання з кратними частотами називають гармоніками.

Тому можна сказати, що спектр періодичного сигналу – це набір гармонік.

2. В спектрі сигналу може бути присутня постійна складова, яка

розглядається як вироджене гармонійне коливання з нульовою частотою.

3. Спектральний підхід дозволяє розглядати сигнал в двох областях: часовій та частотній (спектральній). Причому, будь-які зміни сигналу в часі призводять до зміни його спектра та навпаки.

3.4 Спектри парних і непарних функцій в часі

3.4.1 Нехай $s(t)$ – парна функція в часі: $s(t)=s(-t)$. в такому випадку з формули (3.20) випливає, що коефіцієнти $b_n = 0$, а коефіцієнти a_n можна розрахувати по більш простій формулі

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt. \quad (3.22)$$

Тоді амплітуди та початкові фази гармонік спектру дорівнюють:

$$A_n = |a_n| = \frac{4}{T} \left| \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt \right|; \quad (3.23)$$

$$\theta_n = \arctg\left(\frac{0}{a_n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } a_n > 0; \\ \pi & \text{при } a_n < 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

3.4.2 Нехай $s(t)$ – непарна функція часу: $s(t)=-s(-t)$. В цьому випадку з формули (3.19) виходить, що коефіцієнти $a_n=0$, а коефіцієнти b_n можна розрахувати по більш простій формулі:

$$b_n = -\frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt. \quad (3.25)$$

Тоді амплітуди та початкові фази гармонік спектру дорівнюють:

$$A_n = |b_n| = \frac{4}{T} \left| \int_0^{T/2} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt \right|; \quad (3.26)$$

$$\theta_n = \arctg\left(\frac{b_n}{0}\right) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \text{при } b_n > 0; \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } b_n < 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

3.5 Розподіл середньої потужності періодичного сигналу по спектру. Ефективна ширина спектра

При виконанні умови $\int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt < \infty$ ряд Фур'є при

нескінченному числі членів забезпечує збіжність до сигналу з нульовою середньоквадратичною похибкою. Теоретично ширина спектра нескінченна, а на практиці спектр обмежується деякою смугою частот, званою ефективною шириною спектра. Найбільш частіше в якості критерія обмеження ширина спектра використовують так званий енергетичний критерій, в відповідності з яким ефективна ширина спектра – це смуга частот, в межах якої знаходиться основна частина (зазвичай 90%) середньої потужності періодичного сигналу.

Середня потужність періодичного сигналу визначається за формулою

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t) dt. \quad (3.28)$$

В силу ортогональності складових спектра ця потужність розподіляється між постійною складовою та гармоніками. Потужність, зосереджена в смузі частот аж до k -ої гармоніки, можна отримати за формулою:

$$P_k = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k A_n^2. \quad (3.29)$$

Частка потужності, зосередженої в цій смузі по відношенню до середньої потужності сигналу, визначається відношенням P_k/P_{cp} . Складемо рівняння

$$\frac{P_k}{P_{cp}} = \frac{\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k A_n^2}{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt} = \gamma(k), \quad (3.30)$$

де $\gamma(k)$ - частковий коефіцієнт, що залежить від номера k .

Приймаючи до уваги γ (зазвичай приймають $\gamma = 0,9$), добиваємось виконання рівності (3.30) шляхом підбору k . Тоді ефективна ширина спектру дорівнює $\Delta\omega_{ef} = k\omega_1$.

3.6 Спектр періодичної послідовності імпульсів прямокутної форми

Графік періодичної послідовності прямокутних імпульсів зображено на рис. 3.6. Початок відліку обрано так, що даний сигнал є парною функцією часу. При цьому достатньо задати аналітичний вираз сигналу на інтервалі $(0, T/2)$ (п. 3.4):

$$s(t) = \begin{cases} E & \text{при } 0 < t < t_n/2; \\ 0 & \text{при } \frac{t_n}{2} < t < T/2. \end{cases} \quad (3.31)$$

В даному випадку $b_n = 0$, а коефіцієнти a_n визначимо за формулою (3.23), використовуючи (3.31). В результаті отримуємо:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{t_n/2} E \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{2E}{Q} \frac{\sin\left(\frac{n\omega_1 t_i}{2}\right)}{\frac{n\omega_1 t_i}{2}}. \quad (3.32)$$

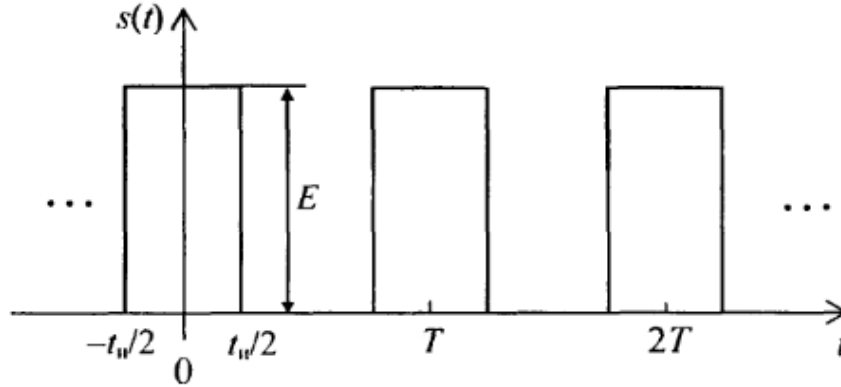


Рисунок 3.6 – Графік періодичної послідовності прямокутних імпульсів

Використовуючи формулу (3.32), визначаємо постійну складову, амплітуди і початкові фази гармонік спектра:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{E}{Q}; \quad (3.33)$$

$$A_n |a_n| = \frac{2E}{Q} \left| \frac{\sin\left(\frac{n\omega_1 t_i}{2}\right)}{\frac{n\omega_1 t_i}{2}} \right|; \quad (3.34)$$

$$\theta_n = \begin{cases} 0 & \text{при } a_n > 0; \\ \pi & \text{при } a_n < 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Введемо поняття огибаючої спектра амплітуд. Огибаюча спектра – це лінія, що з’єднує максимальне значення дискретної функції A_n .

Визначимо вираз для огибаючої спектра амплітуд. Для цього в формулі (3.34) дискретний аргумент $n\omega_1$ замінимо безперервним аргументом ω . В результаті одержимо

$$A(\omega) = \frac{2E}{Q} \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega t_i}{2}\right)}{\frac{\omega t_i}{2}} \right|. \quad (3.36)$$

Визначимо розташування нульової огибаючої, порівнявши (3.36) до нуля. В результаті рішення знаходимо

$$\omega_{0k} = \frac{2\pi}{t_i} k, \text{ або } \frac{f_{0k1}}{t_i} k, \quad (3.37)$$

де $k = 0, 1, 2 \dots$

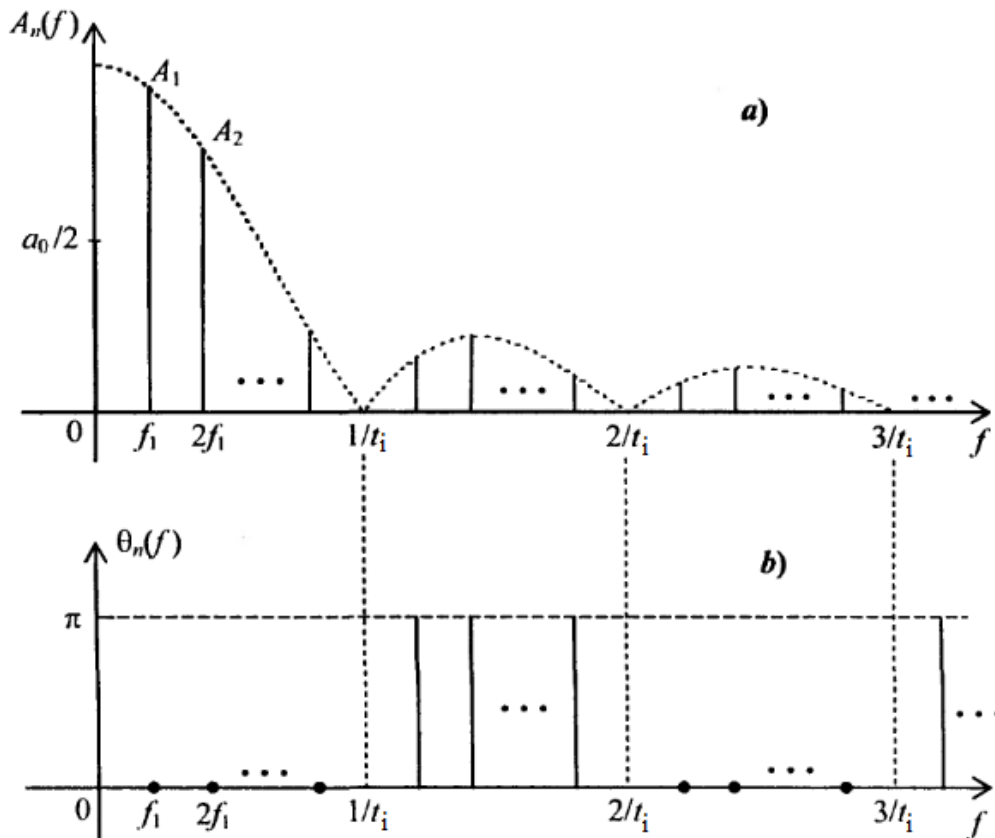


Рисунок 3.7 – Спектрограми амплітуд та початкових фаз

З урахуванням проведених розрахунків побудуємо спектрограми амплітуд та початкових фаз (рисунок 3.7).

Зі спектра можуть випадати окремі складові з частотами $\omega = m\omega_1$. Це станеться, якщо нуль огинаючої збігається з частотою гармоніки:

$$\omega_{0k} = m\omega_1. \quad (3.38)$$

З умови (3.38) з урахуванням (3.37) визначимо номери гармонік, що випадають:

$$m = \frac{\omega_{0k}}{\omega_1} = Qk. \quad (3.39)$$

Якщо шпаруватість Q – ціле число, то із спектра випадають гармоніки, номери яких кратні Q . Так при $Q = 3$ із спектра випадають гармоніки з номерами $m = 3, 6, 9, \dots$. Якщо Q не є цілим числом, то номери гармонік що випадають відповідають цілочисельним значенням добутку Qk .

Розглянемо питання про зміщення сигналу вздовж осі часу (зміни початку відліку). Відповідно з теоремою про зсув спектр амплітуд при цьому не

зміниться, а спектр фаз визначається співвідношенням

$$\overline{\theta}_n = \theta_n + n\omega_1 t_0, \quad (3.40)$$

де $\overline{\theta}_n$ – початкова фаза n -ої гармоніки зсунутого сигналу; t_0 – зсуву сигналу вздовж осі часу ($t_0 > 0$, якщо зсув вліво; $t_0 < 0$, якщо зсув вправо).

На рисунку 3.8 зображений, сигнал $\hat{s}(t)$, зсунутий відносно сигналу

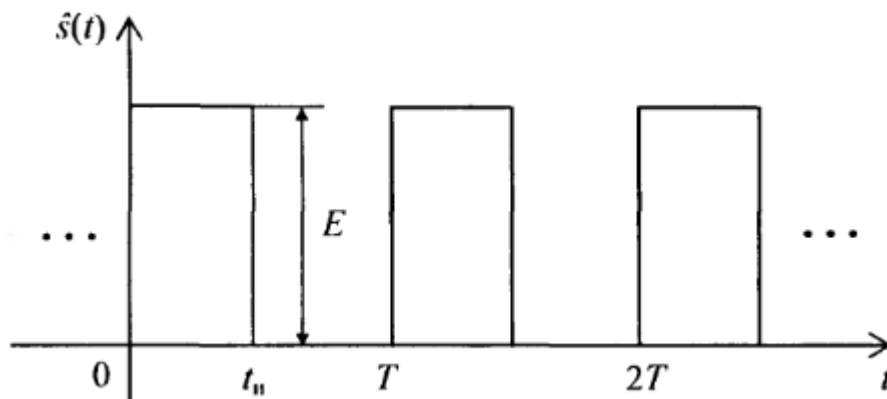


Рисунок 3.8 – Сигнал $\hat{s}(t)$, зсунутий відносно сигналу

$s(t)$, (див. рисунок 3.6) на $t_0 = -t_n/2$. При цьому початкова фаза кожної гармоніки відповідно з (3.40) набуває приріст: $-n\omega_1 t_n/2$. Спектрограма фаз зсунутого сигналу зображена на рисунку 3.9.

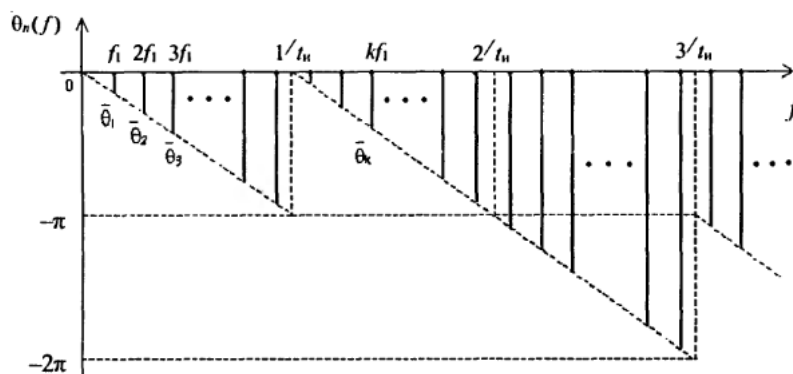


Рисунок 3.9 – Спектрограма фаз зсунутого сигналу

3.7 Меандр та його спектр

Меандр (в перекладі «орнамент») – це періодична послідовність прямокутних імпульсів зі шпаруватістю $Q = 2$ (рисунок 3.10).

З формули (3.32) отримаємо наступний вираз для a_n :

$$a_n = E \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) / \frac{\pi n}{2}. \quad (3.41)$$

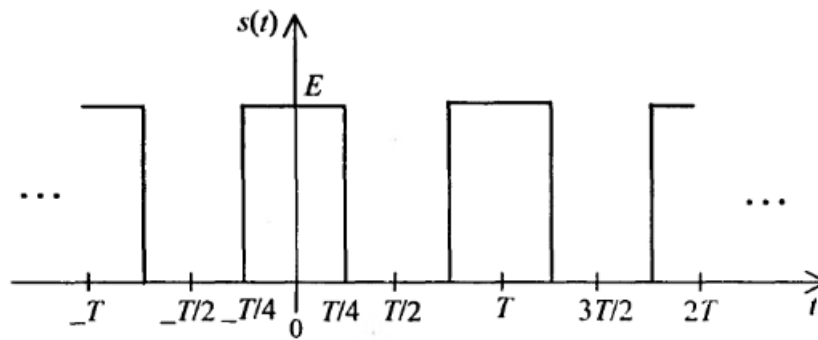


Рисунок 3.10 – Меандр

Зі співвідношення (3.41) слідує, що a_n відноситься до нуля при парних значеннях n , тобто зі спектра меандра випадають всі парні гармоніки, що відповідає раніше викладеному.

Проведемо підсумовування складових спектру меандру. Результат підсумовування постійної складової (діаграма a), першої (діаграма b) та третьою (діаграма c) гармонік, ілюструється рисунком 3.11.

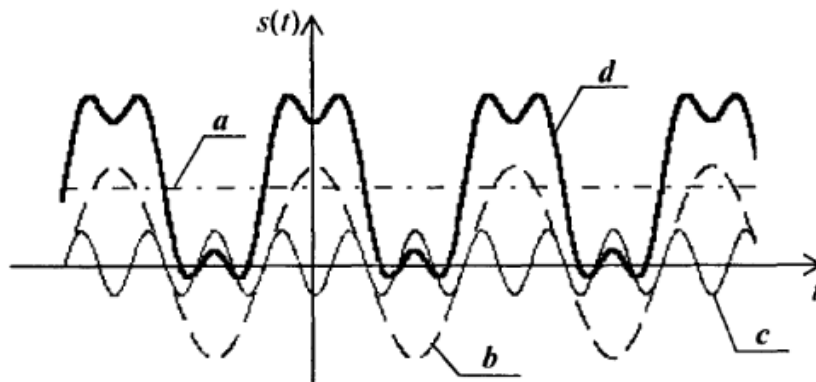


Рисунок 3.11 – . Результат підсумовування постійної складової (діаграма a), першої (діаграма b) та третьою (діаграма c) гармонік

Отримана сума (діаграма d) нагадує меандр. Якщо підсумувати додаткову кількість гармонік, то результуюче коливання за формою в великій мірі наближається до меандру. При прагненні кількість складових до нескінченності, сума ряду сходиться до меандру. Виняток становлять точки розриву, в яких сума сходиться до величини $1,18E$. Однак тривалість цих викидів при нескінченному збільшенні членів ряду прямує до нуля, і вони не впливають на середньоквадратичну похибку, яка в межі рівна нулю.

4. Спектральний Фур'є-аналіз неперіодичних сигналів

4.1 Постановка задачі

Поняття «спектр» можна розповсюдити і на неперіодичні сигнали, для яких виконується умова абсолютного інтегрування (3.1) на нескінченному інтервалі часу. Розглянемо одиночний імпульс тривалістю t_1 довільної форми (рис. 4.1, суцільна лінія). Необхідно визначити спектр цього сигналу.

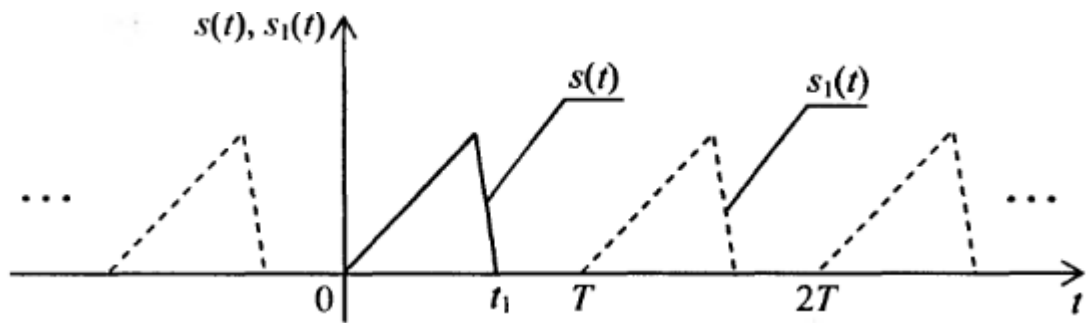


Рисунок 4.1 – Одиночний імпульс тривалістю t_1 довільної форми

Збудуємо періодичне положення $s_1(t)$ сигналу $s(t)$ з періодом повторення $T > t_1$ (рисунок 4.1, штрихована лінія). Цілком очевидно, що при устремлінні періоду T до некінченості в межах виконується рівність: $s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} s_1(t)$. Таким чином, спектр неперіодичного сигналу можна отримати шляхом паралельного переходу від спектру періодичного сигналу при нескінченному збільшенні періоду T . При такому переході з'являються дві нових якісних властивостей, властивих спектру неперіодичного сигналу. Проаналізуємо ці властивості.

1). Частотне розповсюдження між спектральними лініями в спектрі періодичного сигналу $s_1(t)$ дорівнює $\omega_1 = 2\pi/T$ (див. рисунок 3.5), тому в межах $\lim_{T \rightarrow \infty} (\omega_1 = 2\pi/T) = 0$. Таким чином, спектр неперіодичного сигналу $s(t)$ стає суцільним. Суцільний спектр – спектр, що складається з гармонійних коливань, фізичні частоти яких можуть приймати будь-які значення від нуля до $+\infty$. Частоти цих коливань утворюють безперервний (суцільний) безліч.

2). Амплітуди спектральних складових періодичного сигналу відповідно с формулами (3.17), (3.19), (3.20) обернено пропорційні періоду T , тому в межах во-

ни наближаються до нуля: $\lim_{T \rightarrow \infty} A_n = 0$. Таким чином, амплітуда складових спектру неперіодичного сигналу являють собою нескінченно малі величини.

В результаті проведеного аналізу показано, що спектр неперіодичного сигналу це нескінченний набір нескінченно малих по амплітуді гармонійних коливань, фізичні частоти яких приймають будь-які значення від 0 до $+\infty$.

4.2 Перетворення Фур'є. Спектральна щільність сигналу

Перейдемо до кількісного аналізу.

Періодичний сигнал $s_1(t)$ можна уявити у вигляді ряду Фур'є:

$$s_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{j\omega_1 n t}, \quad (4.1)$$

Коефіцієнти розкладу якого визначаються співвідношенням:

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j\omega_1 n t} dt. \quad (4.2)$$

Вважаючи $T = 2\pi/\omega_1$ та враховуючи (4.2), перетворимо формулу (4.1):

$$s_1(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j\omega_1 n t} dt \right) e^{-j\omega_1 n t} \cdot \omega_1. \quad (4.3)$$

Спрямуємо період T до нескінченності. Тоді в межі, на основі вище сказаного, у формулі (4.3) параметр ω_1 слід замінити на $d\omega$, $n\omega_1$ на ω , а операцію підсумовування – операцією інтегрування. В результаті граничного переходу отримаємо:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.4)$$

Інтеграл в дужках у (4.4) є функцією частоти і називається спектральною щільністю сигналу, яку позначають тією ж буквою, що й сигнал, тільки прописною. Якщо написання прописною буквою відрізняється тільки масштабом, то знизу вона підкреслюється прямою лінією. В даному випадку спектральні щільності сигналу $s(t)$ позначимо як $\underline{S}(j\omega)$ та отримаємо пару інтегральних перетворень Фур'є (ПФ), сполучних часову та спектральну функції сигналу:

$$\underline{S}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (4.5)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.6)$$

Вираз (4.5) називають прямим, а вираз (4.6) – зворотнім ПФ. Пряме ПФ дозволяє перейти від сигналу, як часової функції, до спектральної щільності цього сигналу, а зворотнє ПФ - перехід від спектральної щільності сигналу до його часової функції.

4.3 Деякі уявлення спектральної щільності

Як випливає із (4.5) спектральна щільність в загальному випадку являє собою комплексну функцію. Використовуючи формулу Ейлера у виразі (4.5), уявимо спектральну щільність в алгебраїчній формі:

$$\underline{S}(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega), \quad (4.7)$$

де $A(\omega)$ та $B(\omega)$ – дійсна і уявна частини спектральної щільності, обчислювані за формулами:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt; \quad (4.8)$$

$$B(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(\omega t) dt. \quad (4.9)$$

Зауважимо, що $A(\omega)$ є парною, а $B(\omega)$ – непарною функціями аргументу ω , що слідує із (4.8) та (4.9). Перейдемо до показової форми уявлення:

$$\underline{S}(j\omega) = |\underline{S}(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}, \quad (4.10)$$

де $|\underline{S}(j\omega)|$ та $\theta(\omega)$ – модуль та аргумент спектральної щільності, обчислювані за формулами:

$$|\underline{S}(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}; \quad (4.11)$$

$$\theta(\omega) = \arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)}. \quad (4.12)$$

Зауважимо, що $|\underline{S}(j\omega)|$ є парною, а $\theta(\omega)$ – непарною функціями аргументу ω , що випливає з парності $A(\omega)$ і непарності $B(\omega)$.

Підставляючи (4.10) в (4.6), перейдемо до тригонометричної форми зворотного перетворення Фур'є:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{S}(j\omega)| e^{j\theta(\omega)} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{S}(j\omega)| e^{j[\omega t + \theta(\omega)]} d\omega = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{S}(j\omega)| \cos[\omega t + \theta(\omega)] d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{S}(j\omega)| \sin[\omega t + \theta(\omega)] d\omega \quad (4.12)$$

В останньому виразі другий інтеграл (уявна частина) дорівнює нулю

зважаючи парності $|\underline{S}(j\omega)|$ та непарності $\theta(\omega)$. В силу цих же причин перший інтеграл можна спростити, про інтегрувавши в межах від нуля до нескінченності та подвоївши результат. У підсумку приходимо до наступного виразу:

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\underline{S}(j\omega)| \cos[\omega t + \theta(\omega)] d\omega. \quad (4.13)$$

Вираз (4.13) є зворотне ПФ в тригонометричному вигляді. Слід звернути увагу на те, що інтегрування ведеться тільки в області позитивних (фізичних) частот. Це дозволяє виявити фізичний сенс спектральної щільності.

Порівнюючи формулу (4.13) та ряд (3.16), можна провести наступну аналогію. У виразу (4.13) аналогом амплітуди коливання виступає мала величина ΔA , що дорівнює:

$$\Delta A \approx \frac{1}{\pi} |\underline{S}(j\omega)| \Delta\omega = 2 |\underline{S}(j\omega)| \Delta f.$$

Із останнього рівняння отримаємо:

$$2 |\underline{S}(j\omega)| = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta f}. \quad (4.14)$$

Таким чином, подвоєна величина модуля спектральної щільності на деякій частоті являє собою межу відношення амплітуди коливання, яке отримується сумуванням складових спектра у вузькій смузі частот, враховуючи дану частоту, до ширини цієї смуги при прагненні її до нуля.

4.4 Спектральна щільність парних та непарних функцій часу

Якщо сигнал $s(t)$ являє собою парну або непарну функцію часу, то спектральний аналіз в даному випадку спрощується.

Нехай $s(t)$ - парна функція часу. В даному випадку із (4.9) випливає, що уявна частина спектральної щільності $B(\omega) = 0$. При цьому спектральна щільність виражається у вигляді дійсної функції частоти $A(\omega)$, яку в даному випадку можна розрахувати побільш простій, що випливає із (4.8), формули:

$$\underline{S}(j\omega) = A(\omega) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt. \quad (4.15)$$

Тоді модуль та аргумент спектральної щільності дорівнюють:

$$|\underline{S}(j\omega)| = |A(\omega)|; \quad (4.16)$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } A(\omega) > 0; \\ \pm\pi & \text{при } A(\omega) < 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Нехай $s(t)$ – непарна функція часу. В даному випадку із (4.8) слідує, що дійсна частина спектральної щільності $A(\omega) = 0$. При цьому спектральна щільність виражається у вигляді уявної функції частоти $jB(\omega)$, яку в даному випадку можна розрахувати побільш простій, що випливає із (4.9) по формулі:

$$\underline{S}(j\omega) = jB(\omega) = -j2 \int_0^\infty s(t) \sin(\omega t) dt. \quad (4.18)$$

Тоді модуль і аргумент спектральної щільності дорівнюють:

$$|\underline{S}(j\omega)| = |B(\omega)|; \quad (4.19)$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} +\pi/2 & \text{при } B(\omega) > 0; \\ -\pi/2 & \text{при } B(\omega) < 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

4.5 Властивості спектральної щільності сигналу

Властивості спектральної щільності, по суті, є властивостями прямого перетворення Фур'є. Розглянемо деякі з них.

Значення спектральної щільності сигналу при $\omega = 0$. Покладемо частоту у виразі (4.5), що дорівнює нулю: $\omega = 0$. Тоді значення спектральної щільності дорівнює

$$\underline{S}(j\omega)|_{\omega=0} = \underline{S}(0) = \int_{-\infty}^\infty s(t) dt. \quad (4.21)$$

Інтеграл в (4.21) назвемо «площею сигналу». Таким чином, значення спектральної щільності при $\omega = 0$ чисельно дорівнює площі сигналу $s(t)$.

Спектральна щільність суми сигналів. Нехай сигнал $s(t)$ являє собою суму n сигналів :

$$s(t) = \sum_{k=1}^n S_k(t). \quad (4.22)$$

Необхідно визначити спектр суми. Виконаємо пряме перетворення Фур'є лівої і правої частин (4.22). В результаті приходимо до співвідношення

$$\underline{S}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \underline{S}_k(j\omega). \quad (4.23)$$

Таким чином, спектральна щільність суми сигналів дорівнює сумів спектральних щільностей сумарних сигналів.

Зсув сигналу в часі (теорема зсуву). Нехай заданий сигнал $s_1(t)$ і йому відповідає спектральна щільність $S_1(j\omega)$. Здійснимо зсув цього сигналу вздовж осі часу, наприклад в сторону запізнювання. В результаті отримаємо сигнал $s_2(t)$ (рис. 4.2), який пов'язаний з початковим сигналом співвідношенням

$$s_2(t) = s_1(t - t_0). \quad (4.24)$$

Потрібно визначити спектральну щільність сигналу $s_2(t)$.

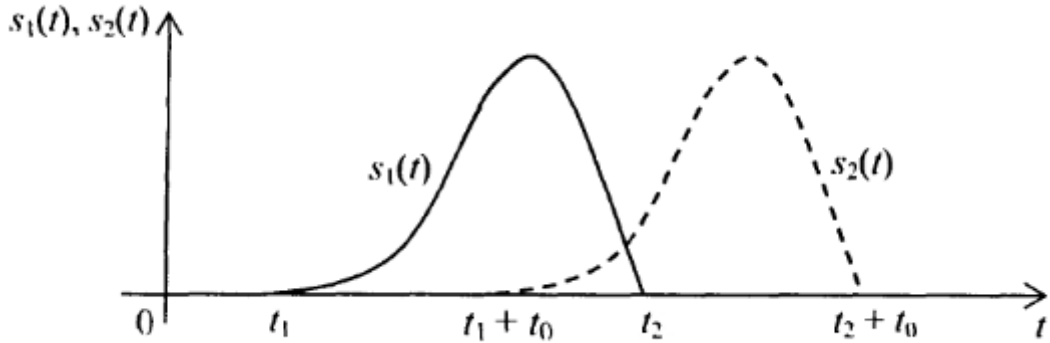


Рисунок 4.2 – сигнал $s_2(t)$

Застосуємо до (4.24) пряме перетворення Фур'є:

$$\underline{S}_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t - t_0) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.25)$$

Зробимо в інтегралі (4.25) заміну змінної, поклавши $t - t_0 = \tau$, тоді $dt = d\tau$, а межі інтегрування по новій змінній від $-\infty$ до $+\infty$.

З урахуванням цього, перепишемо (4.25) в вигляді:

$$\underline{S}_2(j\omega) e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = \underline{S}_1(j\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (4.26)$$

Таким чином, зсув сигналу в часі відповідає помноженню спектральної щільності на $e^{\pm j\omega t_0}$, причому знак мінус вибирається при запізнюванні, а знак плюс при випередженні. Визначимо модуль та аргумент спектральної щільності зсунутого сигналу, використовуючи (4.26):

$$\begin{cases} |\underline{S}_2(j\omega)| = |\underline{S}_1(j\omega)|; \\ \theta_2(\omega) = \theta_1(\omega) \pm \omega t_0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Отже, зсув сигналу в часі не змінює модуля спектральної щільності, а призводить до зміни тільки її аргументу. Зміни виражаються в підсумовуванні аргументу спектральної щільності вихідного сигналу та лінійного члена $\pm \omega t_0$.

Зміна масштабу часу. Під змінами масштабу часу розуміють як стиснення, так і розтягнення сигналу в часі. Нехай заданий сигнал $s_1(t)$ і йому відповідає спектральна щільність $\underline{S}_1(j\omega)$. Зміна масштабу часу здійснюють шляхом помноження аргументу t на константу n ($n > 1$ відповідає стисненню сигналу, а $n < 1$ – розтягнення). В результаті отримаємо сигнал $s_2(t)$ (рис.4.3), який зв'язаний з вихідним сигналом співвідношенням:

$$s_2(t) = s_1(nt). \quad (4.28)$$

Потрібно визначити спектральну щільність сигналу $s_2(t)$.

Визначимо спектральну щільність сигналу $s_2(t)$, стосовно (4.28)

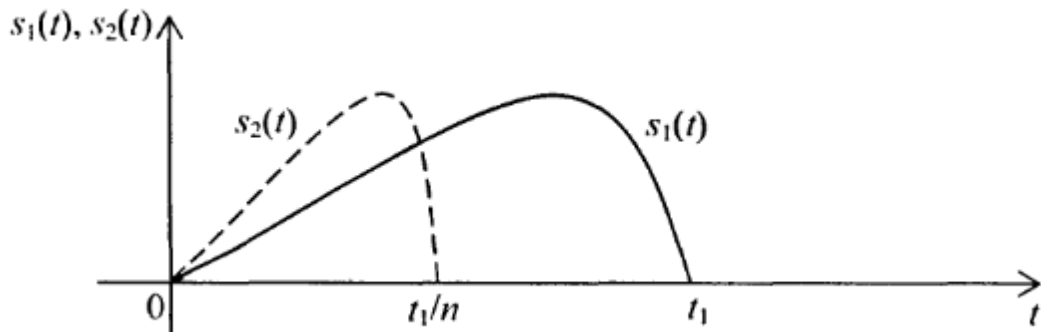


Рисунок 4.3 – Сигнал $s_2(t)$

Пряме перетворення Фур'є:

$$\underline{S}_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(nt) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.29)$$

Виконуючи в інтегралі (4.29) заміну змінної $nt = \tau$, отримуємо $dt = d\tau/n$. Нові межі інтегрування по змінній τ від $-\infty$ до $+\infty$. З урахуванням цього, перепишемо (4.29) в вигляді:

$$\underline{S}_2(j\omega) = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) e^{-j\frac{\omega}{n}\tau} d\tau = \frac{1}{n} \underline{S}_1\left(j\frac{\omega}{n}\right). \quad (4.30)$$

Таким чином, помноження аргументу t на n призводить до ділення аргументу ω на цю ж величину n . Отже, стиснення сигналу у часі в n разів викликає розширення його спектральної щільності в стільки ж разів і навпаки.

Слід запам'ятати впливаюче з цього правило: чим менше тривалість сигналу, тим ширше його спектр та, навпаки, чим більше тривалість сигналу, тим вужче його спектр.

Диференціювання сигналів за часом. Нехай заданий сигнал $s_1(t)$ та

йому відповідає спектральна щільність $\underline{S}_1(j\omega)$. Здійснимо операцію диференціювання цього сигналу за часом. В результаті одержимо сигнал $s_2(t)$, який пов'язаний з вихідним сигналом співвідношенням:

$$s_2(t) = \frac{ds_1(t)}{dt}. \quad (4.31)$$

Визначимо спектральну щільність сигналу $s_2(t)$. Шляхом простих викладок можна показати, що:

$$\underline{S}_2(j\omega) = \underline{S}_1(j\omega) \cdot j\omega. \quad (4.32)$$

Отже, диференціювання сигналу за часом відповідає помноженню спектральної щільності цього сигналу на $j\omega$.

Інтегрування сигналів за часом. Нехай заданий сигнал $s_1(t)$, та йому відповідає спектральна щільність $\underline{S}_1(j\omega)$. Розглянемо випадок, коли виконується умова $\underline{S}_1(0) = 0$. Здійснимо операцію інтегрування цього сигналу за часом. В результаті одержимо сигнал $s_2(t)$, який пов'язаний з вихідним сигналом співвідношенням:

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^t \dot{s}_1(t) dt. \quad (4.33)$$

З (4.33) сигнал $s_1(t)$ можна виразити у вигляді:

$$s_1(t) = \frac{ds_2(t)}{dt}.$$

Тоді на основі попередньої властивості (4.32) запишемо:

$$\underline{S}_1(j\omega) = \underline{S}_2(j\omega) \cdot j\omega. \quad (4.34)$$

З (4.34) виразимо спектральну щільність $\underline{S}_2(j\omega)$:

$$\underline{S}_2(j\omega) = \frac{\underline{S}_1(j\omega)}{j\omega}. \quad (4.35)$$

Таким чином, інтегрування сигналу за часом відповідає діленню його спектральної щільності на $j\omega$. Якщо значення спектральної щільності $\underline{S}_1(0) \neq 0$, то відповідно формулу (4.35) слід доповнити складовою $\pi\delta(\omega)\underline{S}_1(0)$.

Добуток двох сигналів. Нехай сигнали $g(t)$ та $f(t)$, яким відповідають спектральні щільності $G(j\omega)$ та $F(j\omega)$. Добуток заданих сигналів:

$$s(t) = g(t)f(t). \quad (4.36)$$

Застосуємо пряме перетворення Фур'є до (4.36):

$$\underline{S}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (4.37)$$

Підставимо в (4.37) сигнал $g(t)$, виражений через його спектральну щільність, замінивши параметр ω на параметр x (щоб уникнути збігу літерних позначень параметра та змінної інтегрування у (4.37)). В результаті отримаємо:

$$\underline{S}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(jx)e^{jxt} dx \right] e^{-j\omega t} dt. \quad (4.38)$$

Вносячи зовнішній інтеграл, незалежний від x , під внутрішній, приходимо до наступного співвідношення:

$$\underline{S}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)F[j(\omega - x)]dx. \quad (4.39)$$

З (4.39) випливає, що спектральна щільність добутку двох функцій часу з точністю до коефіцієнта $1/2 \pi$ дорівнює згортці спектральних щільностей перемножуваних функцій.

Розглянемо окремий випадок формули (4.39). Покладемо $\omega = 0$ в цій формулі. В результаті після зворотної заміни x на ω одержимо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)F^*(j\omega)d\omega. \quad (4.40)$$

У формулі (4.40) символ "*" позначає комплексне сполучення.

Співвідношення (4.40) називають формулою Релея. Із цієї формули випливає, що скалярний добуток двох функцій часу дорівнює скалярному добутку їх спектральних щільностей (з коефіцієнтом $1/2 \pi$).

4.6 Розподіл енергії в спектрі неперіодичного сигналу.

Ефективна ширина спектру

Неперіодичні сигнали, як правило, мають кінцевою енергією, яка розподілена по спектру. Кількісно задача розподілу енергії по спектру може бути вирішена з використанням формули Релея (4.40).

Поклавши в цій формулі $g(t) = f(t) = s(t)$, отримуємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{S}(j\omega)|^2 d\omega. \quad (4.41)$$

Ліва частина рівності (4.41) представляє собою повну енергію сигналу $\mathcal{E}$, розраховану в часовій області, а права частина – ту ж величину, але розраховану в частотній області. Вираз (4.41) називають рівністю Парсеваля. Із (4.41) видно,

що енергія сигналу залежить тільки від модуля спектральної щільності сигналу і не залежить від її аргументу. З урахуванням того, що $|\underline{S}(j\omega)|$ є парною функцією частоти, перепишемо рівність Парсеваля у вигляді:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\underline{S}(j\omega)|^2 d\omega. \quad (4.42)$$

Нехай потрібно розрахувати енергію, зосереджену в смузі частот $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. В цьому випадку використовують (4.42), змінюючи в ній межі інтегрування:

$$E_{\Delta\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |\underline{S}(j\omega)|^2 d\omega. \quad (4.43)$$

Квадрат модуля спектральної щільності називають також енергетичним спектром сигналу $W(\omega)$. Отже енергія сигналу в смузі частот визначається інтегруванням енергетичного спектру в цій смузі.

Спектри кінцевих в часі сигналів не обмежені. Для сигналів з кінцевою енергією вводять наступні визначення ефективної ширини спектру. Ефективна ширина спектру – це смуга частот, в межах якої міститься основна частина (зазвичай 90%) повної енергії сигналу. Доля енергії, зосереджена в смузі частот $\Delta\omega$, по відношенню до повної енергії сигналу, визначається виразом:

$$\frac{E_{\Delta\omega}}{E} = \frac{\frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |\underline{S}(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt} = \gamma(\Delta\omega), \quad (4.44)$$

де $\gamma(\Delta\omega)$ – частковий коефіцієнт, залежний від смуги частот ($\gamma \leq 1$).

Задаючи значення γ (зазвичай, приймають $\gamma = 0,9$), та, підбираючи межі інтегрування, можна вирішити рівність (4.44) для конкретного сигналу відносно $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Знайдене значення $\Delta\omega$ і є ефективною шириною спектра сигналу $\Delta\omega_{\text{еф}}$.

4.7 Спектр одиночного імпульсу прямокутної форми

Одиночний імпульс прямокутної форми зображено на рис. 4.4. Початок координат обрано так, щоб сигнал $s(t)$ представляв собою парну функцію часу, що спростить викладки. Визначимо спектральну щільність даного імпульсу.

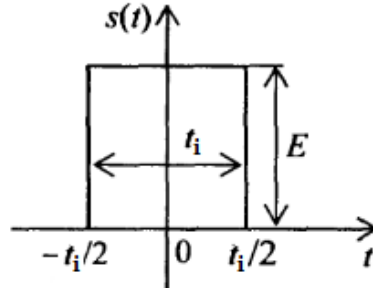


Рисунок 4.4 - Одиночний імпульс прямокутної форми

Задамо сигнал $s(t)$ на інтервалі часу $(0, +\infty)$, що, як зазначалося раніше, є достатнім для парної функції часу

$$s(t) = \begin{cases} E & \text{при } 0 < t < t_i/2; \\ 0 & \text{при } t > t_i/2. \end{cases} \quad (4.45)$$

Визначимо спектральну щільність, використовуючи (4.15):

$$\underline{S}(j\omega) = A(\omega) = 2 \int_0^{t_i/2} E \cos(\omega t) dt = \frac{2E}{\omega} \sin\left(\frac{\omega t_i}{2}\right) = E t_i \frac{\sin\left(\frac{\omega t_i}{2}\right)}{\frac{\omega t_i}{2}}. \quad (4.46)$$

Розрахуємо модуль та аргумент спектральної щільності:

$$|\underline{S}(j\omega)| = |A(\omega)| = E t_i \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega t_i}{2}\right)}{\frac{\omega t_i}{2}} \right|; \quad (4.47)$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } A(\omega) > 0; \\ \pm\pi & \text{при } A(\omega) < 0. \end{cases} \quad (4.48)$$

Спектрограми модуля та аргументу одиночного імпульсу прямокутної форми зображені на рис. 4.5. Із спектрограми модуля випливає, що з ростом частоти спектр немонотонно зменшується до нуля. Даний імпульс є відеоімпульсом, оскільки спектр істотно відмінний від нуля на частотах, що примикають до нульової частоти. Якщо зменшити тривалість імпульсу t_i , то нулі спектрограми модуля прагнуть вправо, тобто спектр розширюється.

Визначимо ефективну ширину спектру одиночного прямокутного імпульсу. Для цього спочатку розрахуємо повну енергію імпульсу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} E^2 dt = E^2 t_i. \quad (4.49)$$

Оскільки це відеосигнал, то, вважаючи $\omega_1 = 0$, одержимо $\Delta\omega = \omega_2$. З урахуванням цього складемо вираз для часткового коефіцієнта (4.44):

$$\gamma(\Delta\omega) = \frac{1}{\pi} t_i \int_0^{\Delta\omega} \left(\sin\left(\frac{\omega t_i}{2}\right) / \frac{\omega t_i}{2} \right)^2 d\omega. \quad (4.50)$$

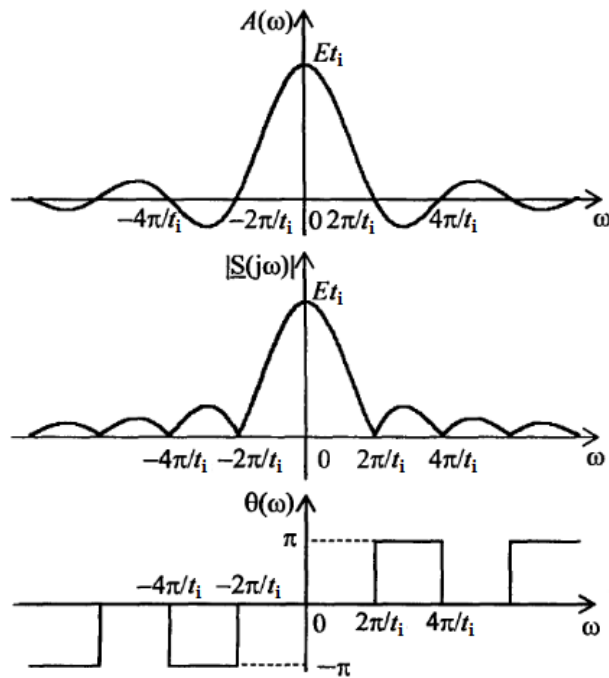


Рисунок 4.5 – Спектрограми модуля та аргументу одиночного імпульсу прямокутної форми

Рівність (4.50) не має аналітичного рішення відносно $\Delta\omega$. На рис. 4.6 зображена залежність $\gamma(\Delta\omega)$, отримана чисельним інтегруванням (4.50). Задамося $\gamma(\Delta\omega_{\text{еф}}) = 0,9$. В результаті графічного рішення знаходимо (рис. 4.6)

$$\Delta\omega_{\text{еф}} = 2\pi/t_i, \text{ або } \Delta f_{\text{еф}} = 1/t_i. \quad (4.51)$$

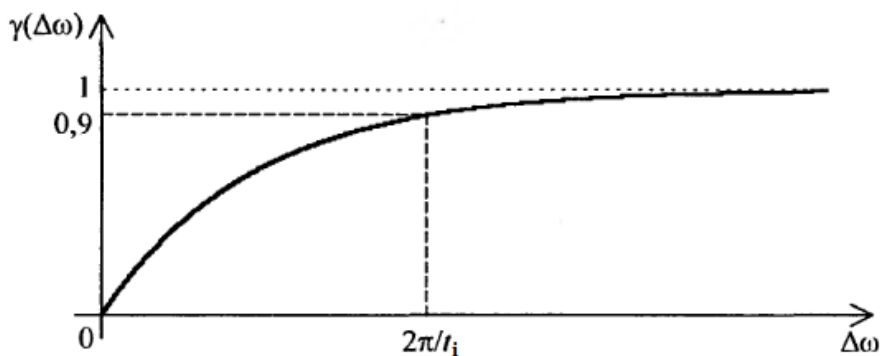


Рисунок 4.6 – Залежність $\gamma(\Delta\omega)$, отримана чисельним інтегруванням

Наприклад, якщо тривалість відеоімпульсу $t_i = 10^{-6}\text{с}$, то, відповідно (4.51), ефективна ширина спектра дорівнює $\Delta f_{\text{еф}} = 1\text{МГц}$.

4.8 Функція Дірака (δ -функція) та її властивості

Функцією Дірака (δ -функцією) називають нескінченно короткий імпульс з нульовою тривалістю і нескінченною амплітудою, площа якого дорівнює одини-

ці. Сигнал у вигляді функції Дірака фізично не реалізується, тому це поняття є математичною абстракцією. Проте модель такого сигналу застосовується в теорії для аналізу характеристик пристроїв і систем, а також для аналітичного уявлення дискретних сигналів.

Розглянемо прямокутний імпульс, розмах обернено пропорційний тривалості: $E=1/t_i$ (рис. 4.7). Спрямуємо t_i до нуля. При цьому амплітуда імпульсу спрямується до нескінченності, а площа імпульсу залишається дорівнювати одиниці не залежно від його тривалості. В межі отримаємо δ -функцію, позначення якої $\delta(t)$ (рис. 4.8).

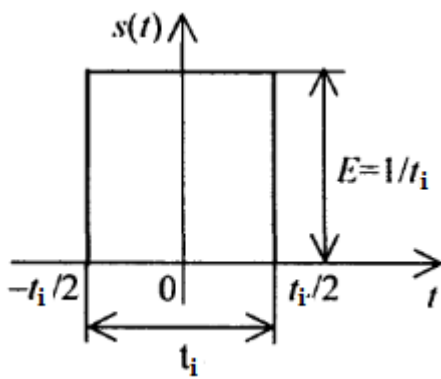


Рисунок 4.7 – Прямокутний імпульс з розмахом обернено пропорційний тривалості: $E=1/t_i$

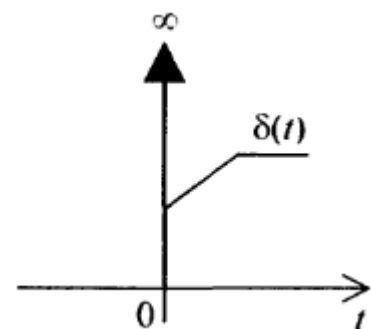


Рисунок 4.8 - δ -функція

Взагалі, δ -функція може розташовуватися не тільки на початку ординат, але і в будь-якій точці часової осі t_0 . В цьому випадку функцію записують у вигляді: $\delta(t - t_0)$. Аналітичний вираз, описуючий δ -функція, має вигляд:

$$\begin{cases} \delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = t_0; \\ 0 & \text{при } t \neq t_0; \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \end{cases} \quad (4.52)$$

При помноженні δ -функції на константу відбувається зміни в часі її площі. Цю константу називають ваговим коефіцієнтом.

Фільтруюча властивість δ -функції. Візьмемо інтеграл від добутку функції часу $f(t)$ на δ -функцію $\delta(t - t_0)$. Припустимо, що функція $f(t)$ безперервна в околиці точки $t - t_0$. Оскільки функція $\delta(t - t_0)$ дорівнює нулю у всіх точках, крім точки $\delta(t - t_0)$, то інтервал інтегрування стягується в одну точку, в якій значення функції $f(t)$ є константою $f(t_0)$. При цьому $f(t_0)$ можна винести за

знак інтегралу. Враховуючи, що площа δ -функції дорівнює одиниці, приходимо до наступного:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = f(t_0). \quad (4.53)$$

Таким чином, доведено основна властивість δ -функції: інтеграл добутку δ -функції та довільної функції часу $f(t)$ дорівнює значенню останньої в точці t_0 розміщення δ -функції на часовій осі. Цю властивість називають фільтруючою.

Спектр δ -функції. Нехай дана дельта функція $\delta(t - t_0)$. Потрібно визначити її спектр. Для цього запишемо пряме ПФ від цієї функції:

$$\Delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-j\omega t}dt. \quad (4.54)$$

З урахуванням фільтруючої властивості δ -функції (4.53) одержимо спектральну щільність в вигляді:

$$\Delta(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \quad (4.55)$$

Визначимо модуль та аргумент спектральної щільності (4.55):

$$|\Delta(j\omega)| = 1; \quad (4.56)$$

$$\theta(\omega) = -\omega t_0. \quad (4.57)$$

Таким чином, модуль спектральної щільності не залежить від частоти, тобто спектр δ -функції рівномірний у всій смузі частот. Спектрограми модуля і аргументу δ -функції зображені на рис. 4.9, а та 4.9 б, відповідно.

Використовуючи рівняння Парсеваля, визначимо повну енергію δ -функції:

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\Delta(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega = \infty. \quad (4.58)$$

Як і слід було очікувати, енергія δ -функції дорівнює нескінченності, що також говорить про неможливість її фізичної реалізації.

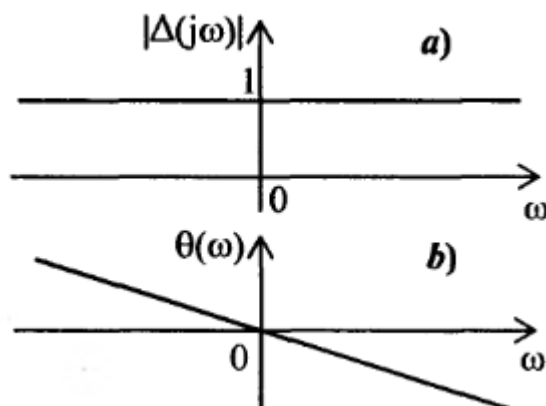


Рисунок 4.9 - Спектрограми модуля і аргументу δ -функції

Деякі уявлення δ -функції. В часі δ -функцію можна уявити як обернене перетворення Фур'є від її спектральної щільності:

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega(t-t_0)} d\omega. \quad (4.59)$$

Знак показника експоненти в формулі (4.59) можна обирати будь-який, оскільки він не впливає на результат.

Виконаємо взаємну заміну змінних ω та t у (4.59) при цьому приходимо до поняття δ -функції в частотній області $\delta(\omega - \omega_0)$

$$\delta(\omega - \omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega(t-t_0)} dt. \quad (4.60)$$

Це поняття застосовують при аналізі дискретних сигналів та їх спектрів.

4.9 Спектральна щільність постійної напруги

Спектральна щільність – поняття універсальне і може застосовуватися не тільки до неперіодичних сигналів. Поширимо це поняття на постійну напругу. Нехай заданий сигнал в вигляді постійної напруги $s(t) = C_0 = \text{const}$ (рис. 4.10,а). Для цього сигналу умова абсолютної інтегрованості не виконується. Однак введення поняття δ -функції дозволяє вирішити задачу. Застосуємо пряме перетворення Фур'є до цього сигналу. Використовуючи (4.60), отримаємо:

$$\underline{S}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = C_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi C_0 \delta(\omega). \quad (4.61)$$

Отже, спектральна щільність постійної напруги являє собою δ -функцію у частотній області, яка розташована на початку координат. Це говорить про те, що спектр постійної напруги містить тільки одну складову нульової частоти.



Рисунок 4.10 – (а) заданий сигнал в вигляді постійної напруги $s(t) = C_0 = \text{const}$, б спектрограма модуля постійної напруги

Інформація про величину постійної напруги C_0 міститься в ваговому коефіцієнті, який дорівнює $2\pi C_0$. Спектрограма модуля постійної напруги зображена на рис. 4.10 *b*.

4.10 Спектральна щільність гармонійного коливання

Нехай дано гармонійне коливання:

$$s(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1). \quad (4.62)$$

Уявимо вираз у вигляді (4.62):

$$s(t) = A_1 \frac{e^{j\omega_1 t + \theta_1} + e^{-j\omega_1 t - \theta_1}}{2}. \quad (4.63)$$

Застосуємо до (4.63) пряме перетворення Фур'є:

$$\begin{aligned} \underline{S}(j\omega) &= \frac{A_1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1 t + \theta_1)} e^{-j\omega t} dt + \frac{A_1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_1 t + \theta_1)} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{A_1}{2} e^{j\theta_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_1)t} dt + \frac{A_1}{2} e^{-j\theta_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega_1)t} dt. \end{aligned}$$

Відповідно з (4.60) останній вираз являє собою суму двох δ -функцій

$$\underline{S}(j\omega) = A_1 \pi e^{j\theta_1} \delta(\omega - \omega_1) + A_1 \pi e^{-j\theta_1} \delta(\omega + \omega_1). \quad (4.64)$$

Отже, спектральна щільність гармонійного коливання являє собою суму двох δ -функцій, розташованих на частотах ω_1 та $-\omega_1$. Ці функції мають однакові вагові коефіцієнти πA_1 та протилежні по знаку аргументи.

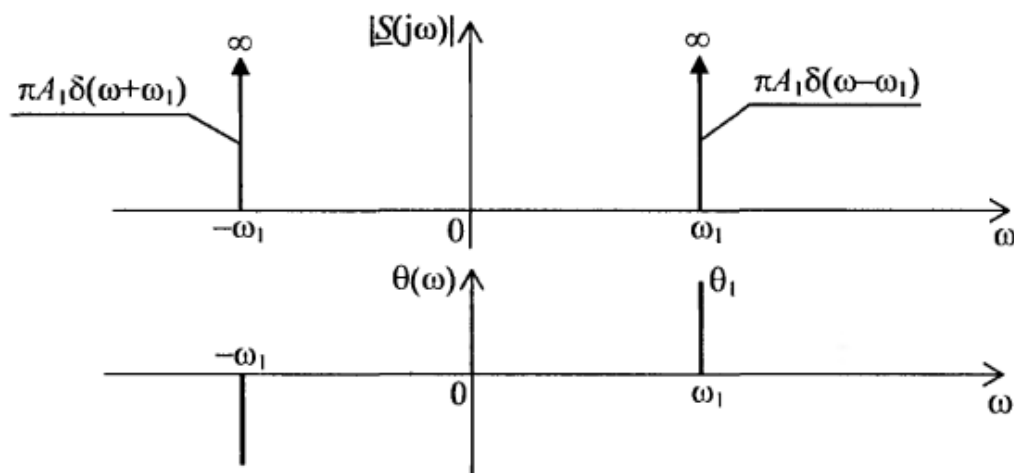


Рисунок 4.11 – Спектрограми модуля та аргументу

Наявність δ -функцій в спектральній щільності говорить про те, що амплітуда складової на частоті ω_1 має кінцеву величину. Спектрограми модуля та аргументу зображені на рис. 4.11.

4.11 Спектральна щільність довільного періодичного процесу

Уявимо довільний періодичний сигнал у вигляді ряду Фур'є, що містить постійну складову та набір гармонік.

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \theta_n). \quad (4.65)$$

З урахуванням результатів, отриманих в двох попередніх підрозділах, можна записати вираз для спектральної щільності в вигляді:

$$\underline{S}(j\omega) = 2\pi C_0 \delta(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \pi A_n [\delta(\omega - n\omega_1) e^{j\theta_n} + \delta(\omega + n\omega_1) e^{-j\theta_n}]. \quad (4.66)$$

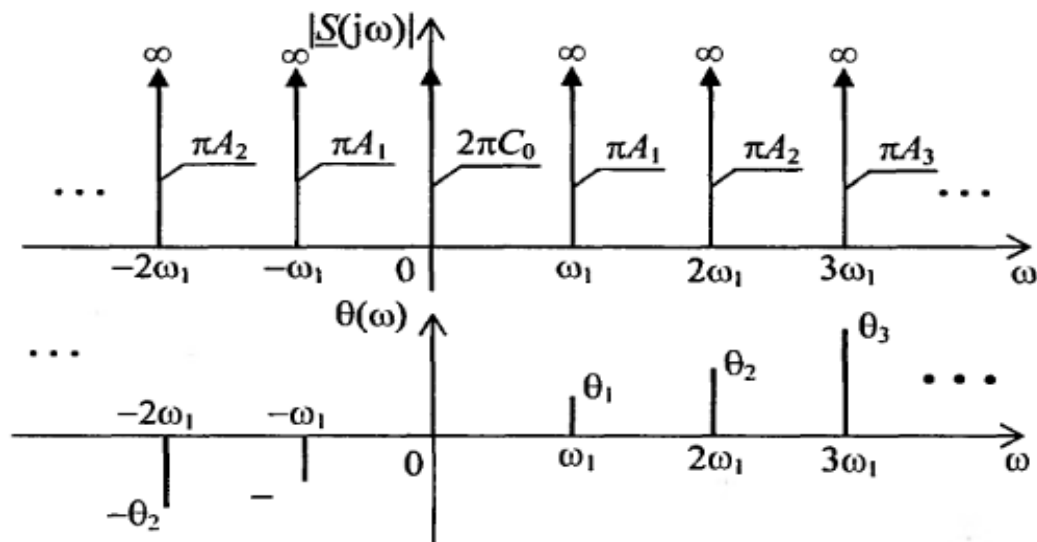


Рисунок 4.12 – Спектрограми довільного періодичного сигналу

Як видно з формули, спектр періодичного сигналу складається з безлічі δ -функцій, розташованих в дискретних частотних точках $\pm n\omega_1$. Спектрограми довільного періодичного сигналу зображені на рис 4.12.

Необхідно відзначити, що поширення поняття спектральної щільності на періодичні сигнали не дає, природно, якісно нових результатів. Проте цей підхід зручний, оскільки уніфікує процедуру спектрального аналізу.

4.12 Взаємозв'язок між спектрами одиночного імпульсу та сигналу, одержуваного періодичним повторенням цього імпульсу

Порівняємо вираз для спектральної щільності імпульсного процесу (4.5) з виразом для коефіцієнта розкладання $\dot{C}_n$ періодичного процесу в комплексний ряд Фур'є (3.5). Ці вирази відрізняються тільки коефіцієнтом $1/T$. Звідси випливає взаємозв'язок спектральної щільності окремого імпульсу з комплексною амплітудою гармонік сигналу, одержуваного шляхом періодичного повторення цього імпульсу. Якщо врахувати, що $\dot{A}_n = 2\dot{C}_n$, то одержимо:

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \underline{S}(jn\omega_1). \quad (4.67)$$

З формули (4.67) випливає, що модуль спектральної щільності окремого імпульсу і огинаюча спектру сигналу, одержуваного шляхом періодичного повторення цього імпульсу, співпадають по формі, відрізняючись тільки масштабним коефіцієнтом $2/T$. Застосування (4.67) дозволяє уникнути громіздких викладок, що ілюструються в наступному підрозділі.

4.13 Спектр пачки різновеликих імпульсів прямокутної форми

На рис. 4.13 зображений сигнал у вигляді пачки, що складається із чотирьох різновеликих прямокутних імпульсів однакової тривалості t_i , що прямують один за одним з інтервалом, що дорівнює T_1 . Розмах кожного імпульсу позначений через P_i , де $i = 0, 1, 2, 3$.

Даний сигнал можна розглядати як суму чотирьох прямокутних імпульсів зсунутих відносно один одного на інтервал T_1 . Тому, відповідно з (4.23) спектральну щільність пачки визначимо як суму спектральних щільностей цих імпульсів. Враховуючи теорему зсуву (4.26), а також виразу для спектральної щільності одиночного прямокутного імпульсу (4.46), одержимо:

$$\underline{S}(j\omega) = \frac{2}{\omega} \text{Sin} \omega t_i (P_0 + P_1 e^{-j\omega T_1} + P_2 e^{-j2\omega T_1} + P_3 e^{-j3\omega T_1}) e^{-j\frac{\omega t_i}{2}}. \quad (4.68)$$

Визначимо модуль спектральної щільності:

$$|\underline{S}(j\omega)| = \frac{2}{|\omega|} \left| \text{Sin} \frac{\omega t_i}{2} \right| |P_0 + P_1 e^{-j\omega T_1} + P_2 e^{-j2\omega T_1} + P_3 e^{-j3\omega T_1}|. \quad (4.69)$$

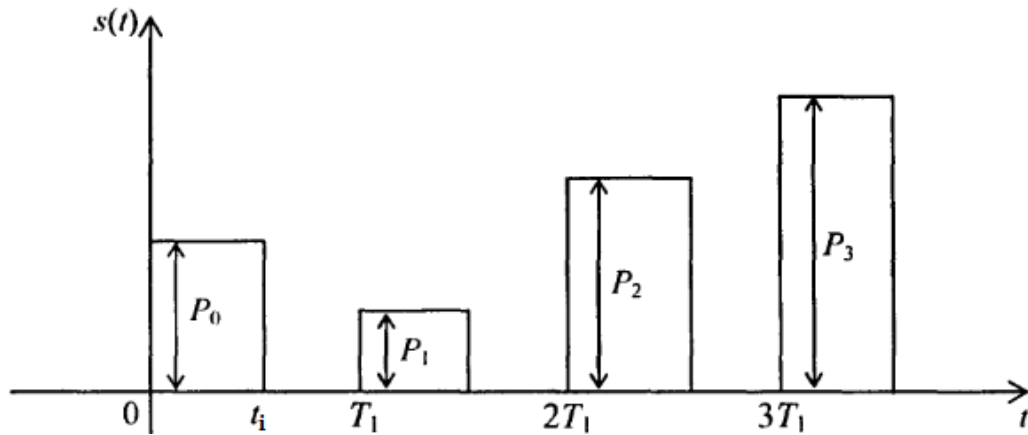


Рисунок 4.13 – сигнал у вигляді пачки, що складається із чотирьох різновеликих прямокутних імпульсів однакової тривалості t_i , що прямують один за одним з інтервалом, що дорівнює T_1

Результати розрахунку на ЕРМ модуля спектральної щільності (4.69) при $T_1/t_i=2$ ілюструється рис. 4.14. На рис. 4.14, а зображена спектрограма при значеннях $P_0=P_1=P_2=P_3$. Цей окремий випадок розглянуто в [1]. Він відповідає пачці рівновеликих імпульсів і характеризується сплесками спектральної щільності на частотах, кратних $\omega_1 = 2\pi/T_1$, а також відсутністю складових з частотами: $\omega_1/4$; $\omega_1/2$; $3\omega_1/4$. Зміна розмаху будь-якого з імпульсів в пачці призводить до істотної зміни структури спектру в смузі частот від нуля до ω_1 . На рис. 4.14, б в якості прикладу зображена спектрограма при значеннях $P_0=1$ В, $P_1=1,5$ В, $P_2=2$ В, $P_3=2,5$ В.

Розглянута властивість спектру може бути використана для проведення функціональних перетворень над амплітудами імпульсів в пачці. Для цього сформуємо періодичну послідовність таких пачок, що слідує з періодом $T=4T_1$, та визначимо амплітуду першої гармоніки частоти $\Omega = 2\pi/T = \omega_1/4$. При цьому розглянемо окремий випадок, поклавши $t_i T_1$. Відповідно з (4.67) амплітуда першої гармоніки дорівнює:

$$A_1 = \frac{2}{T} |\underline{S}(j\Omega)| = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left| P_0 + P_1 e^{-j\frac{\pi}{2}} + P_2 e^{-j\pi} + P_3 e^{-j\frac{3\pi}{2}} \right|. \quad (4.70)$$

Перетворюючи (4.70), приходимо до наступного:

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} |(P_0 - P_2) - j(P_1 - P_3)|. \quad (4.71)$$

Взявши модуль в останньому виразі, одержимо:

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{(P_0 - P_2)^2 + (P_1 - P_3)^2}. \quad (4.72)$$

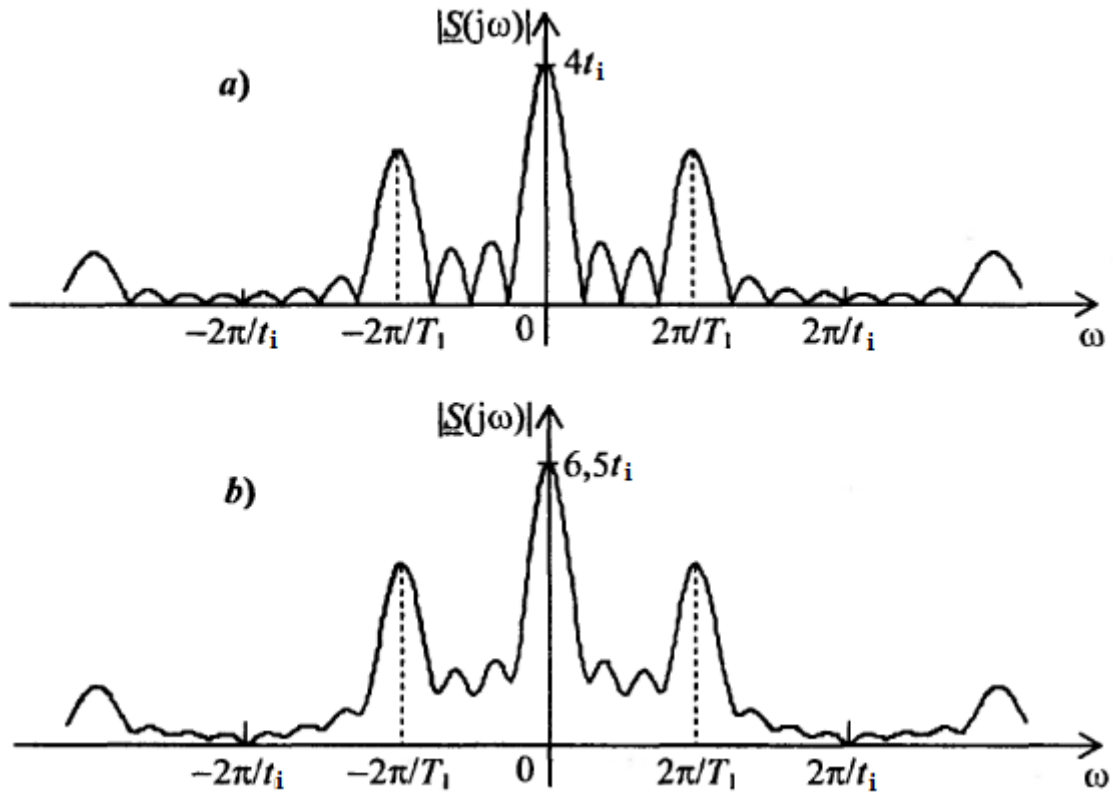


Рисунок 4.14 – *a* спектрограма при значеннях $P_0=P_1=P_2=P_3$, *b* в якості прикладу зображена спектрограма при $P_0=1$ В, $P_1=1,5$ В, $P_2=2$ В, $P_3=2,5$ В

Таким чином, виділяючи за допомогою смугового фільтра першу гармоніку та вимірюючи її амплітуду, можна здійснити функціональне перетворення (4.72). Зокрема, з (4.72) випливає, що амплітуда першої гармоніки дорівнює нулю тільки у випадку, коли амплітуди імпульсів попарно дорівнюють: $P_0 = P_2$ та $P_1 = P_3$.

5 Застосування перетворення Лапласа для спектрального аналізу

5.1 Постановка задачі

Відомо, що при виконанні умові абсолютної збіжності

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty \quad (5.1)$$

застосування перетворень Фур'є призводить до гладких функцій. Ця обставина обмежує область застосування цього перетворення. Для ряду сигналів, не задовільних (5.1), все ж вдається знайти спектральну щільність, використовуючи поняття δ -функції у частотній області (деякі з цих випадків розглянуто в розділі 4).

Для усунення вказаного недоліка помножимо сигнал $s(t)$ на так званий множник збіжності $e^{-\sigma t}$. В результаті множення отримуємо функцію $s_1(t)$:

$$s_1(t) = s(t)e^{-\sigma t}. \quad (5.2)$$

Функція $s_1(t)$ задовольняє умову (5.1) для (при виборі $\sigma > 0$) для переважної більшості сигналів, використовуваних на практиці.

Необхідною умовою збіжності інтегралу (5.1) для $s_1(t)$ є рівність нулю сигналу $s(t)$ при $t = 0$. В іншому випадку множник $e^{-\sigma t}$ призводить до розбіжності інтегралу (5.1).

5.2 Перетворення Лапласа

Застосуємо пряме перетворення Фур'є до функції $s_1(t)$:

$$\underline{S}_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \underline{S}(\sigma + j\omega). \quad (5.3)$$

Визначимо $s_1(t)$, застосовуючи перетворення Фур'є до спектральної щільності $\underline{S}_1(j\omega)$:

$$s_1(t) = s(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

З останньої формули виразимо $s(t)$:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega. \quad (5.4)$$

Зробимо в (5.3) та (5.4) заміну змінної: $\sigma + j\omega = p$. При цьому $d\omega = dp/j$, а межі інтегрування в (5.4) від $\sigma - j\infty$ до $\sigma + j\infty$. В результаті одержимо:

$$\underline{S}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-pt} dt; \quad (5.5)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \underline{S}(p) e^{pt} dp. \quad (5.6)$$

Вирази (5.5) та (5.6) уявляють собою пару перетворень Лапласа, де $\underline{S}(p)$ називають зображенням, а $s(t)$ – оригіналом. Перетворення Фур'є можна розг-

лядати як окремий випадок перетворення Лапласа при $\sigma = 0$. Перехід від однієї пари перетворень до іншої здійснюють шляхом заміни p на $j\omega$ та навпаки.

Комплексну змінну $p = \sigma + j\omega$ називають комплексною частотою, а її реальну частину σ – абсцисою збіжності перетворення Лапласа. Коливання з комплексною частотою являє собою функцію, осцилюючу з частотою ω і спадаючою по закону $\exp(-\sigma t)$ амплітудою. В цьому сенсі зображення являє собою спектральну щільність, яка визначається для комплексної частоти $p = \sigma + j\omega$.

5.3 Методика визначення спектральної щільності з використанням перетворення Лапласа

Методика визначення спектральної щільності складається з наступних етапів.

1. Знаючи часову функцію $s(t)$, знаходять її зображення $\underline{S}(p)$. Цю операцію виконують з використанням таблиць відповідності оригіналів та зображень (див. додаток А).
2. Визначають полюса зображення $\underline{S}(p)$ та наносять їх на площини комплексної змінної p .
3. Проводять формальну заміну змінної p в зображенні змінної $j\omega$. Якщо зображення $\underline{S}(p)$ не має полюсів на осі $j\omega$, то отримана функція є спектральною щільністю сигналу.
4. Якщо $\underline{S}(p)$ має полюси на осі $j\omega$, визначають напівсуму відрахувань а цих полюсах та до результату, отриманому в пункті 5.3.3, додають спектральну щільність цієї напівсуми відрахувань.

5.4 Методика визначення оригіналу по спектральній щільності з використанням перетворення Лапласа

Методика визначення оригіналу складається з наступних етапів.

1. У виразі для спектральної щільності $\underline{S}(j\omega)$ змінну $j\omega$ замінюють змінною p . У результаті отримують зображення $\underline{S}(p)$.

2. Виконують зворотне перетворення Лапласа. При цьому можливі наступні варіанти:

- використання таблиць відповідності зображень та оригіналів;
- застосування теореми розкладання з наступним використанням таблиць відповідності;
- безпосереднє обчислення інтегралу (5.6).

В останньому випадку інтеграл (5.6) зводиться до визначення суми відрахувань в особливих точках (полюсах) зображення

$$s(t) = \sum_i res_i,$$

де res_i – відрахування в i -ом полюсі зображення.

У випадку, коли зображення представлено у вигляді правильної дробі:

$$\underline{S}(p) = \frac{M(p)}{N(p)}, \quad (5.7)$$

а полюс p_i являється простим, відрахування обчислюють по формулі:

$$res_i = \frac{M(p)}{N'(p)} e^{pt} \Big|_{p=p_i} \quad (5.8)$$

У випадку, коли полюс p_i має кратність k , відрахування у цьому полюсі обчислюється за формулою:

$$res_i = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \left[\frac{M(p)}{N(p)} e^{pt} (p - p_t)^k \right] \Big|_{p=p_i}. \quad (5.9)$$

5.5 Функція Хевісайда та її спектр

Функція Хевісайда являє собою одиничний стрибок напруги або струму (рис. 5.1). Модель такого сигналу широко використовується в радіотехніці при шматочно-безперервних функцій, а також в якості тестового сигналу при аналізі характеристик кіл. Аналітичний запис функції Хевісайда має вигляд:

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

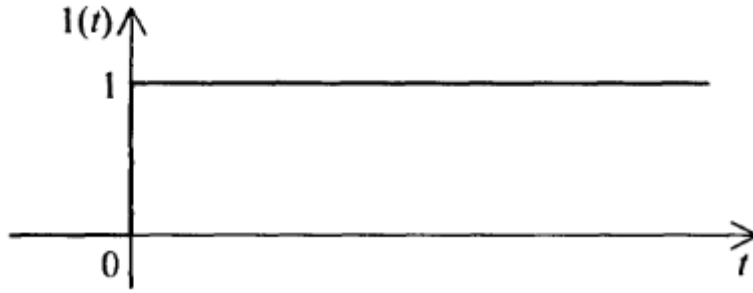


Рисунок 5.1 - Функція Хевісайда яка являє собою одиничний стрибок напруги (струму)

Зображення одиничного стрибка дорівнює:

$$\underline{1}(p) = \frac{1}{p}. \quad (5.11)$$

Зображення (5.11) має один простий полюс в точці $p_1 = 0$. Визначимо відповідно з (5.8) відрахування в точці $p_1 = 0$

$$res_1 = \left. \frac{e^{pt}}{1} \right|_{p=0} = 1.$$

Напівсума відрахувань в даному випадку є постійною величиною 1/2. Замінюючи у (5.11) змінну p на змінну $j\omega$ та враховуючи, що спектральна щільність константи виражається у вигляді δ -функції (4.61), отримуємо:

$$\underline{1}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + 2\pi \frac{1}{2} \delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega). \quad (5.12)$$

Визначимо модуль та аргумент спектральної щільності:

$$|\underline{1}(j\omega)| = \frac{1}{|\omega|} + \pi \delta(\omega) \quad (5.13)$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{при } \omega > 0; \\ +\pi/2 & \text{при } \omega < 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

Графіки модуля і аргумента спектральної щільності одиничного стрибка зображені на рис. (5.2). Таким чином, спектр функції Хевісайда складається із суцільної та дискретної констант. Внесок складових суцільного спектру плавно зменшується з ростом частоти. Основний внесок в сигнал вкладає постійна складова, яка на спектрограмі представлена у вигляді δ -функції на нульовій частоті. Це говорить про те, що в спектрі функції Хевісайда міститься постійна складова кінцевої величини, яка дорівнює 0,5.

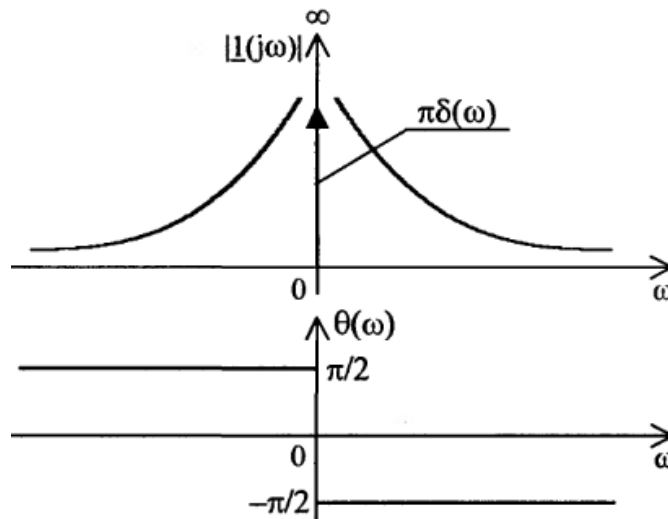


Рисунок 5.2 – Графіки модуля і аргументу спектральної щільності одиничного стрибка

5.6 Спектральна щільність гармонійного коливання

Нехай в момент часу $t=0$ здійснюється включення синусоїдального сигналу (рис. 5.3). Аналітичний запис такого сигналу має вигляд:

$$s(t) = E \sin(\omega_0 t) + 1(t). \quad (5.15)$$

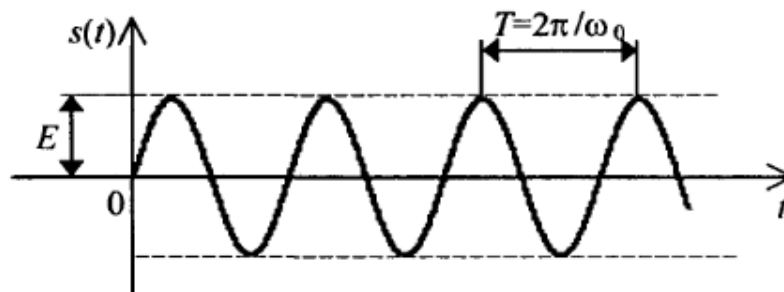


Рисунок 5.3 – Здійснення включення синусоїдального сигналу в момент часу $t=0$

Зображення функції (5.15) запишемо у вигляді:

$$\underline{S}(p) = \frac{E\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}. \quad (5.16)$$

Зображення (5.16) має два простих полюси в точках $p_1 = j\omega_0$ та $p_2 = -j\omega_0$. Визначимо відповідно з (5.8) відрахування в цих точках:

$$res_i = \left. \frac{\omega_0 E e^{pt}}{2p} \right|_{p=j\omega_0} = \frac{E e^{j\omega_0 t}}{2j}; \quad res_i = \left. \frac{\omega_0 E e^{pt}}{2p} \right|_{p=-j\omega_0} = \frac{E e^{-j\omega_0 t}}{2j}.$$

Тоді напівсума відрахувань дорівнює:

$$\frac{\sum_{i=1}^2 res_i}{2} = \frac{E}{2} \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) = \frac{E}{2} \sin(\omega_0 t).$$

Замінімо в (5.16) змінну p на змінну $j\omega$. З урахуванням (4.64) отримемо:

$$\underline{S}(j\omega) = \frac{\omega_0 E}{\omega_0^2 - \omega^2} + \pi \frac{E}{2} \delta(\omega - \omega_0) e^{-j\frac{\pi}{2}} + \pi \frac{E}{2} \delta(\omega + \omega_0) e^{j\frac{\pi}{2}}. \quad (5.17)$$

Визначимо модуль та аргумент спектральної щільності:

$$|\underline{S}(j\omega)| = \frac{\omega_0 E}{|\omega_0^2 - \omega^2|} + \pi \frac{E}{2} \delta(\omega - \omega_0) + \pi \frac{E}{2} \delta(\omega + \omega_0); \quad (5.18)$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\omega| < \omega_0; \\ +\pi & \text{при } \omega > \omega_0; \\ -\pi & \text{при } \omega < -\omega_0. \end{cases} \quad (5.19)$$

Таким чином, спектр усіченого гармонійного коливання містить як суцільну, так і дискретні частини.

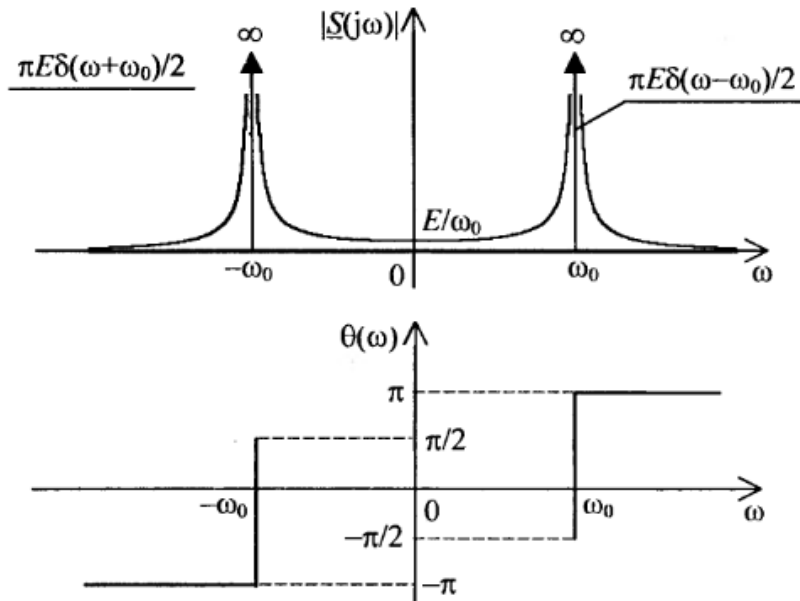


Рисунок 5.4 – Спектр усіченого гармонійного коливання

Спектрограми зображені на рис. 5.4. Суцільна частина істотно відрізняється від нуля в околиці частот $\pm\omega_0$. На цих же частотах розташовуються дві δ -функції, що говорить про наявність в спектрі гармонійного коливання кінченої амплітуди $E/2$.

6 Кореляційний аналіз детермінованих сигналів

Термін «кореляція» означає взаємозв'язок між двома процесами та широко використовується в теорії сигналів. Кореляція сигналів визначається їх часовими характеристиками: швидкістю зміни; тривалістю; формою.

Автокореляція – кореляція між сигналом та його копією, зсунутою в часі.

6.1 Автокореляційна функція сигналів з кінцевою енергією

Для сигналів, що володіють кінцевою енергією, мірою автокореляції може слугувати площа перекриття сигналу та його копії, зсунутої в часі. В цьому випадку автокореляційна функція (АКФ) вводиться як:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t + \tau)dt, \quad (6.1)$$

де $s(t + \tau)$ – копія сигналу $s(t)$, зсунута на час τ , причому $-\infty < \tau < \infty$.

Результат інтегрування за часі вираз (6.1) являє собою функцію часового зсуву τ . Розглянемо основні властивості АКФ сигналів з кінцевою енергією.

1). Значення АКФ при нульовому зсуві τ . Покладемо в (6.1) $\tau = 0$. В результаті отримаємо:

$$B(\tau)|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)dt = E. \quad (6.2)$$

Таким чином, при нульовому зсуві АКФ максимальна, позитивна і дорівнює повній енергії сигналу.

2). Тривалість АКФ (тільки для імпульсних сигналів). Якщо сигнал являє собою імпульс тривалістю T_c , то й АКФ цього сигналу є імпульсом. При чому тривалість АКФ дорівнює подвоєній тривалості сигналу, оскільки зсув копії можливий як в ліво, так і в право. Таким чином в цьому випадку АКФ відмінна від нуля на інтервалі від $-T_c$ до T_c . За межами цього інтервалу вона дорівнює нулю.

3). Властивості парності. З попередньої властивості слідує що АКФ є парною функцією часового зсуву τ :

$$B(\tau) = B(-\tau), \quad (6.3)$$

тобто АКФ володіє симетрією відносно осі ординат.

6.2 Автокореляційна функція імпульсу прямокутної форми

Нехай дано сигнал у вигляді одиночного прямокутного імпульсу, довільно розташованого на осі часу (рис. 6.1, *a*). Визначимо його АКФ. На (рис. 6.1, *b*) зображена зсунута в бік випередження копія цього імпульсу.

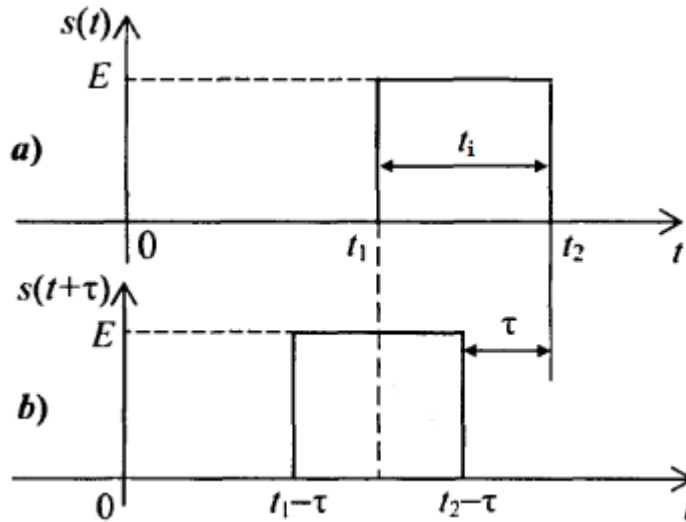


Рисунок 6.1 – Сигнал у вигляді одиночного прямокутного імпульсу, довільно розташованого на осі часу

Розглянемо поведінку АКФ при різних значеннях τ .

1). На інтервалі $0 \leq |\tau| \leq t_i$ в відповідності з (6.1) отримуємо:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt = \int_{t_1}^{t_2-\tau} E^2 dt = E^2 (t_2 - t_1 - \tau) = E^2(t_i - \tau), \quad (6.4)$$

де $t_i = t_2 - t_1$ – тривалість імпульсу.

Таким чином, із збільшенням τ АКФ зменшується по лінійному закону. З причини парності АКФ запишемо її вираз, взявши аргумент τ по модулю:

$$B(\tau) = E^2(t_i - |\tau|). \quad (6.5)$$

2). При $|\tau| = t_i$ АКФ дорівнює нулю, так як сигнал не перекривається зі своєю копією, зміщеною в часі.

На рис. 6.2, *a* зображена АКФ одиночного прямокутного імпульсу, розраховуючи в з (6.5). Вона являє собою рівнобедрений трикутник.

На практиці часто використовують нормовану автокореляційну функцію, яка вводиться наступним чином:

$$R(\tau) = \frac{B(\tau)}{B(0)}. \quad (6.6)$$

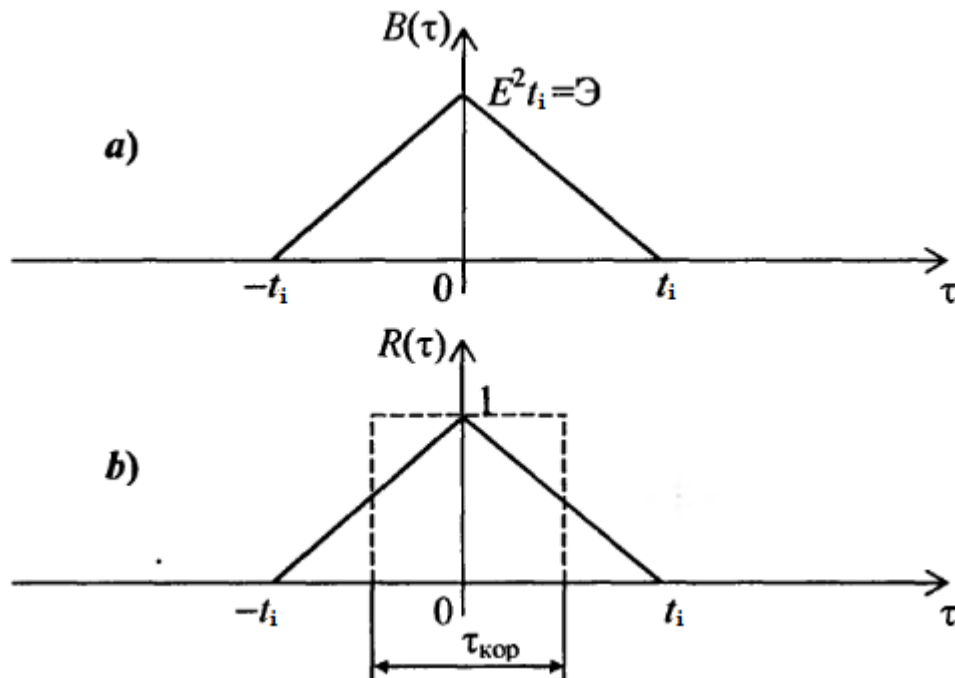


Рисунок 6.2 - *a* АКФ одиночного прямокутного імпульсу, *b* нормована АКФ одиночного прямокутного імпульсу

Нормована АКФ безрозмірна, при $\tau = 0$ максимальна та дорівнює одиниці. Нормована АКФ одиночного прямокутного імпульсу зображена на рис. 6.2, *b*. За допомогою нормованої АКФ можна визначити інтервал кореляції. Під інтервалом кореляції розуміють тривалість нормованої АКФ прямокутної форми, зображеної штриховою лінією на рис. 6.2, *b*, площа якої дорівнює площі нормованої АКФ, взятої за абсолютною величиною. Очевидно, що інтервал кореляції при такому визначенні дорівнює:

$$\tau_{\text{кор}} = \int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau. \quad (6.7)$$

Зокрема, для одиночного прямокутного імпульсу, використовуючи (6.7), можна отримати: $\tau_{\text{кор}} = t_i$.

6.3 Автокореляційна функція пачки прямокутних імпульсів

Розглянемо пачку, що складається з двох однакових прямокутних імпульсів тривалістю t_i , прямуючих з інтервалом T_1 (рис. 6.3, *a*). Тривалість сигналу $T_c = T_1 + t_i$.

Оскільки цей сигнал є шматочно-безперечною функцією, то й АКФ являє собою теж шматочно-безперечну функцію. Проведемо розрахунок АКФ різних ділянок безперечної, здійснюючи зсув в напрямку випередження.

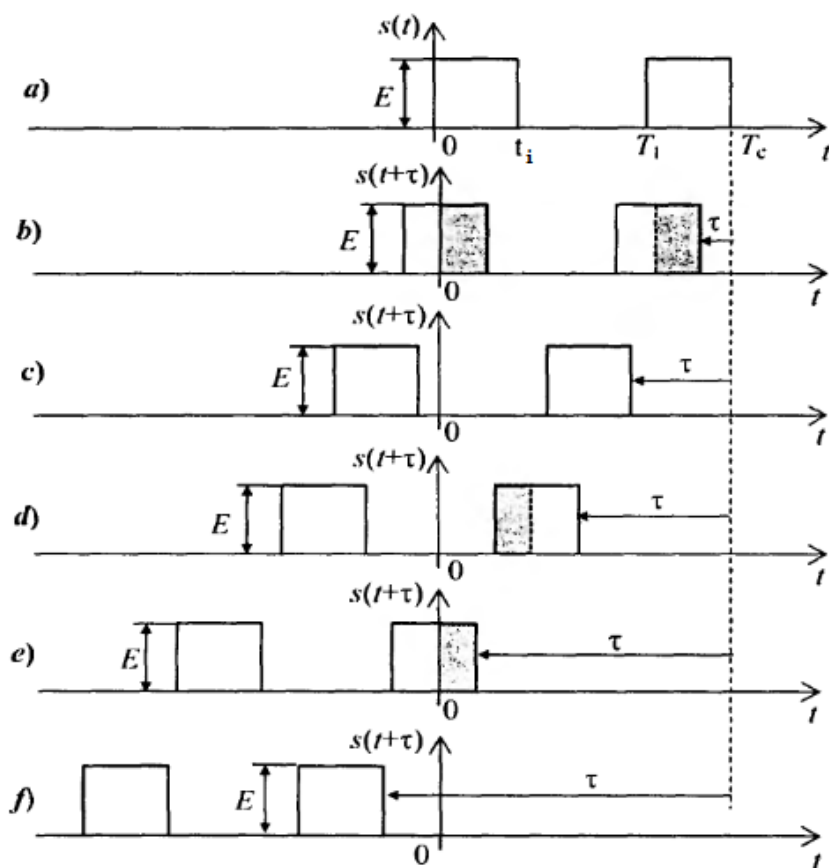


Рисунок 6.3 – а Пачка, що складається з двох однакових прямокутних імпульсів тривалістю t_i , прямокутих з інтервалом T_1 , б на інтервалі $0 \leq |\tau| \leq t_i$, с на інтервалі $t_i \leq |\tau| \leq T_1 - t_i$, d на інтервалі $T_1 - t_i \leq |\tau| \leq T_1$, e на інтервалі $T_1 \leq |\tau| \leq T_1 + t_i$, f на інтервалі $|\tau| > T_1 + t_i$.

1). На інтервалі $0 \leq |\tau| \leq t_i$ (рис. 6.3, b)

$$B(\tau) = \int_0^{t_i-|\tau|} E^2 dt + \int_{T_1}^{T_1+t_i-|\tau|} E^2 dt = 2E^2(t_i - |\tau|). \quad (6.8)$$

Зокрема, при $|\tau| = 0$ отримуємо $B(0) = 2E^2 t_i = 2\mathfrak{E}_1$, де $\mathfrak{E}_1$ – енергія одного імпульсу.

2). На інтервалі $t_i \leq |\tau| \leq T_1 - t_i$ (рис. 6.3, c)

$$B(\tau) = 0. \quad (6.9)$$

3). На інтервалі $T_1 - t_i \leq |\tau| \leq T_1$ (рис. 6.4, d)

$$B(\tau) = \int_{T_1-|\tau|}^{t_i} E^2 dt = E^2(t_i - T_1 + |\tau|). \quad (6.10)$$

Зокрема, при $|\tau| = T_1$ отримуємо $B(T_1) = E^2 t_i = \mathfrak{A}_1$.

4). На інтервалі $T_1 \leq |\tau| \leq T_1 + t_i$ (рис. 6.3, e)

$$B(\tau) = \int_0^{T_1+t_i-|\tau|} E^2 dt = E^2 (T_1 + t_i - |\tau|). \quad (6.11)$$

Зокрема, при $|\tau| = T_c = T_1 + t_i$ отримуємо $B(\tau) = 0$.

5). На інтервалі $|\tau| > T_1 + t_i$ (рис. 6.3, f)

$$B(\tau) = 0. \quad (6.12)$$

На підставі (6.8)...(6.12) збудовано графік АКФ (рис. 6.4). АКФ складається з трьох трикутних імпульсів.

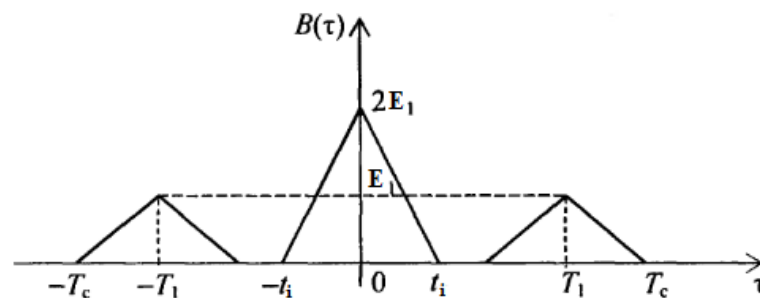


Рисунок 6.4 - Графік АКФ

Розповсюджуючи результат на загальний випадок, приходимо до висновку, що АКФ пачки, що складається з n прямокутних імпульсів, є пачка імпульсів з $(2n - 1)$ трикутних імпульсів. Причому при $\tau = 0$ імпульс має максимальний розмах, що дорівнює повній енергії пачки $B(0) = n\mathfrak{A}_1$.

6.4 Автокореляційна функція періодичних сигналів

Введене раніше поняття АКФ (6.1) не може бути використано для періодичних сигналів, оскільки вони мають нескінченну енергію. Тому для періодичних сигналів вводиться визначення АКФ у вигляді:

$$B_{\text{пер}}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t + \tau)dt. \quad (6.13)$$

Розглянемо основні властивості АКФ періодичних сигналів.

1). Властивість періодичності. З (6.13) випливає, що АКФ періодичного сигналу також періодична функція змінної τ з тим же періодом T , що й сигнал.

2). Тривалість АКФ періодичного сигналу нескінченна. Це випливає з попередньої властивості.

3). Властивість парності. АКФ періодичного сигналу є парною функцією часового зсуву, тобто $B(\tau) = B(-\tau)$.

4). Значення АКФ при нульовому зсуві τ . Покладемо в (6.13) $\tau = 0$. В результаті з урахуванням (2.10) одержимо

$$B_{\text{пер}}(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = P_{\text{ср}}. \quad (6.14)$$

Таким чином, при нульовому зсуві τ АКФ періодичного сигналу позитивна, максимальна і дорівнює середній потужності сигналу.

5). Форма АКФ. З (6.13) випливає, що на інтервалі τ , що дорівнює періоду T , АКФ періодичної послідовності імпульсів співпадають за формою з АКФ одиничного імпульсу з послідовності.

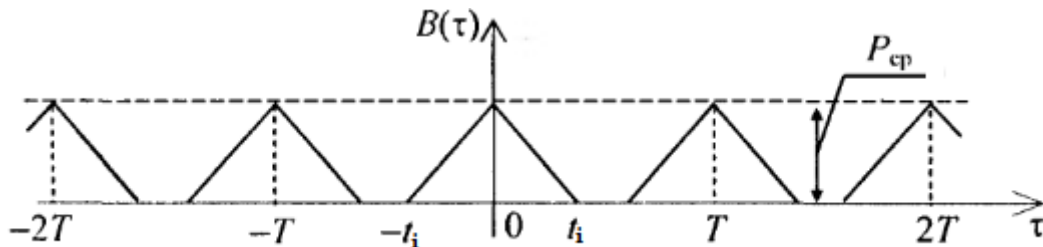


Рисунок 6.5 - АКФ періодичної послідовності прямокутних імпульсів.

З використанням останньої властивості на рис. 6.5 збудована АКФ періодичної послідовності прямокутних імпульсів.

6.5 Автокореляційна функція гармонійного коливання

Визначимо АКФ гармонійного коливання з довільною початковою фазою, заданою наступною формулою:

$$s(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \theta_0). \quad (6.15)$$

Для цього скористаємось співвідношенням (6.13):

$$B_{\text{пер}}(\tau) = \frac{U_m^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_0 t + \theta_0) \cos[\omega_0(t + \tau) + \theta_0] dt.$$

Замінімо в останній формулі добуток косинусів сумою:

$$B_{\text{пер}}(\tau) = \frac{U_m^2}{2T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta_0) dt + \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_0 \tau) dt \right].$$

Перший інтеграл на інтервалі, що дорівнює періоду, перетворюється в нуль.

Наближається до нуля. В результаті отримуємо:

$$B_{\text{пер}}(\tau) = \frac{U_m^2}{2T} \cos(\omega_0 \tau) \int_{-T/2}^{T/2} dt = \frac{U_m^2}{2} \cos(\omega_0 \tau). \quad (6.16)$$

Таким чином, АКФ гармонійного коливання з довільною початковою фазою являють собою гармонійне коливання з такою ж частотою та початковою фазою що дорівнює нулю. Отже, вигляд АКФ не залежить від початкової фази сигналу.

6.6 Взаємозв'язок АКФ та спектральної щільності детермінованих сигналів

Розглянемо взаємозв'язок АКФ та спектральної щільності для сигналів з кінцевою енергією. Для цього скористаємося формулою Релея (4.40), поклавши в неї:

$$g(t) = s(t), f(t) = s(t \pm \tau).$$

Тоді з урахуванням теореми зсуву отримаємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t \pm \tau)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(j\omega)\underline{S}^*(j\omega)e^{\mp j\omega\tau}d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{S}(j\omega)|^2 e^{\mp j\omega\tau}d\omega.$$

Інтеграл в лівій частині отриманого рівняння є АКФ сигналу, а інтеграл в правій частині – зворотне ПФ від $|\underline{S}(j\omega)|^2$. Оскільки $|\underline{S}(j\omega)|^2$ – функція парна, в показнику ступеня в зворотному ПФ може бути будь-яким. Виберемо знак «+».

З урахуванням АКФ запишемо наступні співвідношення:

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{S}(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{S}(j\omega)|^2 \cos(\omega\tau) d\omega; \quad (6.17)$$

$$|\underline{S}(j\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} B(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (6.18)$$

Таким чином, кореляційна функція та квадрат модуля спектральної щільності зв'язані між собою парою перетворень Фур'є.

З проведеного аналізу випливає, що АКФ не залежить від аргументу спектральної щільності. Тому різним по формі сигналам можуть відповідати однакові кореляційні функції, якщо спектральні щільності цих сигналів мають однакові модулі.

6.7 Взаємна кореляційна функція

Розглянемо два імпульсних сигнали $s_1(t)$ та $s_2(t)$ (рис. 6.6, *a*). Для кількісної оцінки ступеня кореляції цих сигналів вводиться поняття взаємна кореляційна функція (ВКФ), яка визначається як площа перекриття першого сигналу зі зсунутою копією другого та навпаки:

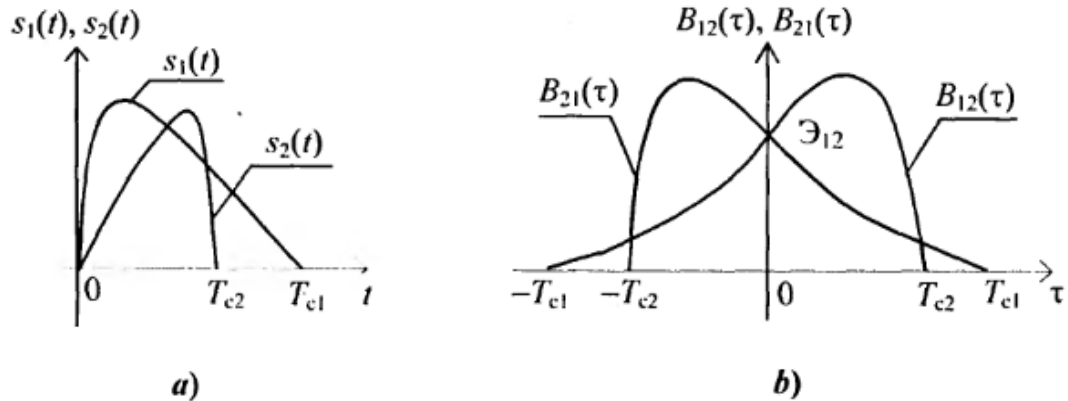


Рисунок 6.6 - *a* імпульсні сигнали $s_1(t)$ та $s_2(t)$, *b* - графіки ВКФ $s_1(t)$ та $s_2(t)$.

$$B_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t + \tau)dt; \quad (6.19)$$

$$B_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t + \tau)s_2(t)dt. \quad (6.20)$$

На рис. 6.6, *b* зображені графіки ВКФ сигналів $s_1(t)$ та $s_2(t)$.

Розглянемо основні властивості ВКФ.

1). Тривалість ВКФ (вводиться для сигналів кінцевої тривалості)

Очевидно, що вданому випадку тривалість ВКФ дорівнює сумі тривалості початкових сигналів: $T_{\text{вк}} = T_{c1} + T_{c2}$.

2). Значення ВКФ при нульовому зсуві τ

Покладемо в (6.19), (6.20) $\tau=0$. В результаті отримаємо:

$$B_{12}(0) = B_{21}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)dt = E_{12} = E_{21}. \quad (6.21)$$

Таким чином, при нульовому зсуві τ ВКФ чисельно дорівнює взаємній енергії сигналів. Зокрема для ортогональних сигналів при $\tau = 0$ ВКФ завжди дорівнює нулю.

3). Властивість дзеркальної симетрії. ВКФ на відміну від АКФ не є парною функцією часового зсуву τ . З приведенного вище визначення ВКФ випливає, що зсув право $s_2(t)$ рівнозначний зсуву в ліво $s_1(t)$. Таким чином, для ВКФ виконується умова дзеркальної симетрії: $B_{12}(\tau) = B_{21}(-\tau)$.

7 Радіосигнали та їх характеристики

7.1 Загальні положення

Для передачі та прийому повідомлень за допомогою електромагнітних хвиль використовують радіосигнали. Повторимо деякі важливі визначення.

Радіосигнал – високочастотне коливання, спроможне донести повідомлення що передається, яке вводять в радіосигнал шляхом модуляції.

Модуляція – процес зміни одного з параметрів радіосигналу по закону повідомлення що передається.

Модуляція піддається так зване несуче коливання, яке в технічній літературі часто називають просто «несучої». В якості несучого коливання зазвичай використовують відрізок гармонійного коливання вигляду:

$$a_0(t) = A_0 \cos[\Psi_0] = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0), \quad (7.1)$$

де A_0 – амплітуда; $\omega_0 = 2\pi f_0$ – кругова частота; t – поточний час; θ_0 – початкова фаза; $\Psi_0(t)$ – повна фаза.

Амплітуда, кругова частота та початкова фаза несучого коливання є постійними величинами: $A_0, \omega_0, \theta_0 = const$. Однак повна фаза несучого коливання $\Psi_0(t)$ змінюється в часі за лінійним законом:

$$\Psi_0(t) = \omega_0 t + \theta_0. \quad (7.2)$$

При модуляції за законом повідомлень що передаються може бути змінений один із наступних параметрів високочастотного коливання:

- амплітуда, що відповідає амплітудній модуляції (АМ);
- частота, що відповідає частотній модуляції (ЧМ);
- початкова фаза, що відповідає фазовій модуляції (ФМ);

Частотну і фазову модуляцію називають кутовою модуляцією (УМ), так як при цих видах модуляції змінам піддається повна фаза радіосигналу.

Загальний вираз для радіосигналу не залежно від виду має модуляції має вигляд:

$$a(t) = A(t) \cos[\Psi(t)], \quad (7.3)$$

де $A(t)$ – амплітуда, яка при АМ є функцією часу; $\Psi(t)$ – повна фаза, яка при ЧМ або ФМ змінюється в часі по закону, що відрізняється від лінійного.

Оскільки несуча є гармонійним коливанням, то її спектр уявляє собою одну складову на частоті ω_0 . Ширина такого спектра дорівнює нулю.

Тепер розглянемо спектр модульованого радіосигналу. В результаті модуляції форма радіосигналу змінюється, що, як нам відомо, призводить до зміни спектрального складу. Тому в спектрі промодульованого сигналу з'являються додаткові складові. Ширина спектра $\Delta\omega$ визначається швидкістю зміни параметра при модуляції. Оскільки модуляція це повільний процес по відношенню до несучої, то при будь-якому вигляді модуляції завжди виконується умова:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1. \quad (7.4)$$

7.2 Радіосигнали з амплітудною модуляцією

а) Представлення сигналів з амплітудною модуляцією. Амплітудна модуляція (АМ) використовується в радіомовленні, радіозв'язку та телебаченні.

При АМ амплітуда радіосигналу змінюється прямопропорційно сигналу що модулюється, а частота та початкова фаза залишаються не змінними. Тому з формули (7.3), не залежно від виду сигналу що модулюється, отримуємо наступний вираз для радіосигналу з АМ:

$$a(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \theta_0). \quad (7.5)$$

Якщо модульований сигнал позначити як $s(t)$, то амплітуда радіосигналу з АМ має вигляд:

$$A(t) = A_0 + \Delta A(t) = A_0 + k_{\text{ам}}s(t), \quad (7.6)$$

де $\Delta A(t)$ – приріст амплітуди, викликаний модулюючим сигналом;

$k_{\text{ам}}$ – коефіцієнт пропорційності.

Підставляючи (7.6) в (7.5), отримаємо

$$a(t) = [A_0 + k_{\text{ам}}s(t)] \cos(\omega_0 t + \theta_0). \quad (7.7)$$

Принцип амплітудної модуляції пояснюється на рис 7.1.

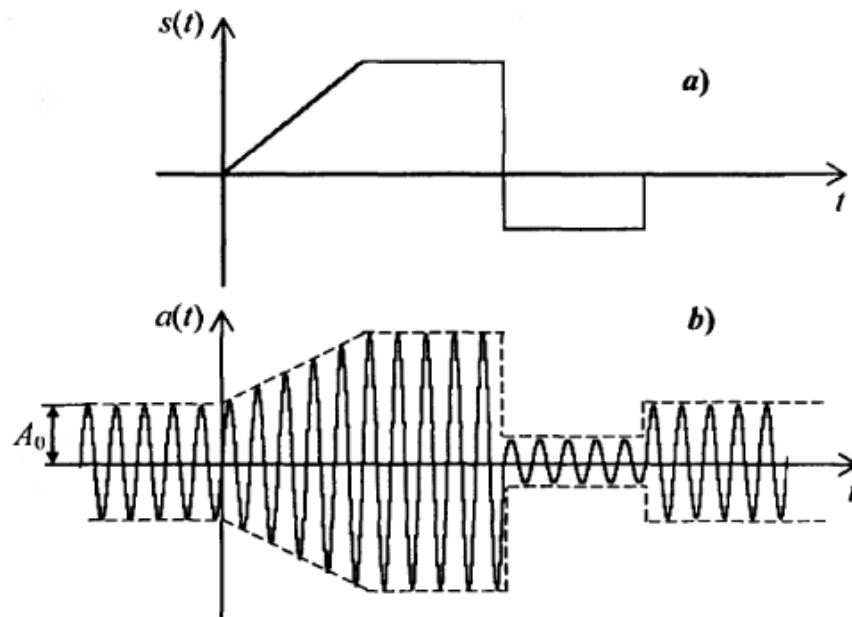


Рисунок 7.1 – а Довільно обраний модульований сигнал. Під дією цього сигналу відбувається синхронні зміни амплітуди радіосигналу b.

В якості модульованого обрано довільний сигнал (рис. 7.1, а) і під дією якого відбувається синхронні зміни амплітуди радіосигналу (рис. 7.1, b).

Огинаюча радіосигналу – уявна лінія, яка з'єднує екстремальні точки радіосигналу (фізична огинаюча). З попереднього аналізу випливає, що функція $A(t)$, обумовлена виразом (7.6), є огинаючою. Огинаючу зображують у вигляді пунктирної лінії, яка торкається максимумів позитивних та (або) негативних напівхвиль радіосигналу. З рис 8.1 видно, що при АМ огинаюча радіосигналу повторює закон зміни в часі повідомлення, що передається.

б) тональна амплітудна модуляція. Тональна модуляція – модуляція, при якій сигнал, що модулюється являє собою гармонійну функцію вигляду:

$$s(t) = S_0 \cos(\Omega t + \nu), \quad (7.8)$$

де S_0 , Ω , ν – амплітуда, кругова частота і початкова фаза сигналу що модулюється відповідно.

Підставляючи (7.8) в (7.7) та перетворюючи, наступні вирази для радіосигналу з тональною АМ (ТАМ):

$$a(t) = A_0 [1 + M \cos(\Omega t + \nu)] \cos(\omega_0 t + \theta_0), \quad (7.9)$$

де $M = k_{\text{ам}} S_0 / A_0$ – коефіцієнт амплітудної модуляції при ТАМ.

Формула (7.9) являє собою канонічну (загальноприйнятою) форму запису радіосигналу з ТАМ.

На рис. 7.2 зображені сигнал що модулюється та відповідний йому сигнал з ТАМ, побудований по формулі (7.9).

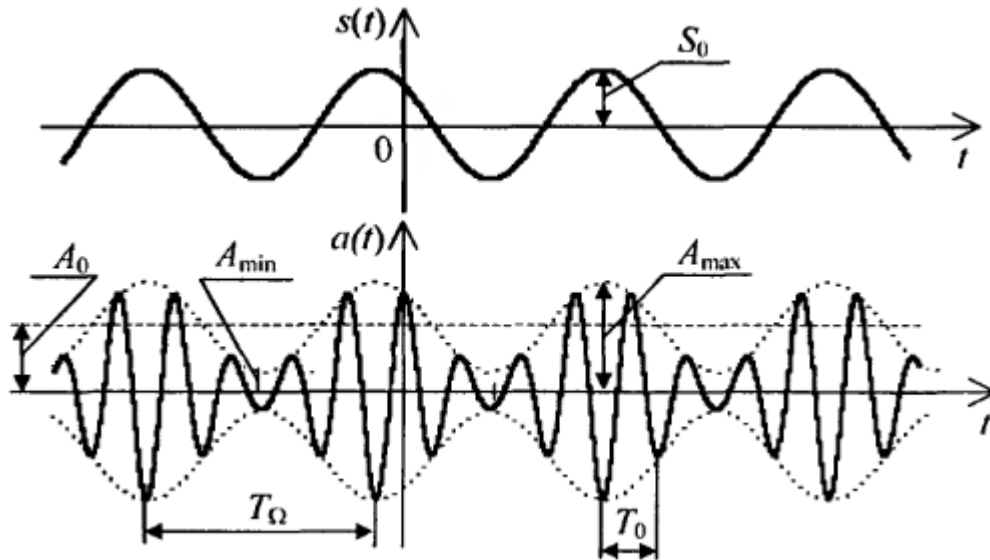


Рисунок 7.2 – Сигнал що модулюється та відповідний йому сигнал з ТАМ

Коефіцієнт амплітудної модуляції M визначає ступінь (глибину) модуляції та залежить від амплітуди сигналу що модулюється. Значення цього коефіцієнта лежать в діапазоні:

$$0 \leq M \leq 1 \quad (7.10)$$

Значення $M = 0$ відповідає відсутності модуляції, а $M = 1$ – максимально глибокої АМ. Подальше збільшення параметра M призведе до перемодуляції. Амплітуда радіосигналу при ТАМ має наступний вигляд:

$$A(t) = A_0[1 + M \cos(\Omega t + \nu)] \quad (7.11)$$

Визначимо максимальне та мінімальне значення амплітуди, які приймають сигнал в моменти часу, коли в формулі (7.11) $\cos(\Omega t + \nu)$ приймає значення $+1$ або -1 , відповідно:

$$\begin{cases} A_{max} = A_0(1 + M); \\ A_{min} = A_0(1 - M). \end{cases} \quad (7.12)$$

Вирішуючи систему рівнянь (7.12) відносно M , отримаємо:

$$M = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}. \quad (7.13)$$

Формулу (7.13) зручно використовувати для екстремального визначення коефіцієнта амплітудної модуляції по осцилограмі сигналу.

в) Спектр та векторна діаграма радіосигналу з тональною АМ (ТАМ)

Уявимо (7.9) в вигляді суми гармонійних функцій, використовуючи відоме співвідношення для добутку косинусів:

$$a(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) + \frac{A_0 M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \theta_0 + \nu] + \frac{A_0 M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \theta_0 - \nu] \quad (7.14)$$

З (7.14) випливає, що спектр ТАМ сигналу складається з трьох скла дових: коливання з частотою ω_0 (несуча), коливання з частотою $(\omega_0 + \Omega)$ (верхня бічна складова), коливання з частотою $(\omega_0 - \Omega)$ (нижня бічна складова).

Таким чином, результатом модуляції є поява в спектрі двох коливань з частотами $(\omega_0 \pm \Omega)$ з однаковими амплітудами, що дорівнюють $A_0 M/2$. Із спектрограми амплітуд радіосигналу з ТАМ (рис. 7.3) видно, що ширина спектру дорівнює подвоєній частоті сигналу що модулюється:

$$\Delta\omega = (\omega_0 + \Omega) - (\omega_0 - \Omega) = 2\Omega$$

Збудуємо векторну діаграму АМ радіосигналу (рис. 7.4), що відповідає моменту часу $t=0$. При побудові приймемо $\nu, \theta_0 > 0$. Оскільки спектр радіосигналу з тональною АМ складається з трьох гармонійних коливань, то векторна діаграма такого сигналу являє собою суму трьох векторів: вектори несучої OB , що обертається з кутовою частотою ω_0 , вектори верхньої бічної частоти BC_1 , що обертається з кутовою частотою $(\omega_0 + \Omega)$, вектору нижньої бічної частоти BC_2 , що обертається з кутовою частотою $(\omega_0 - \Omega)$.

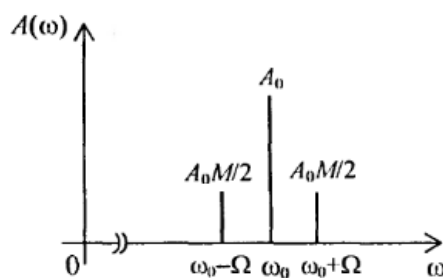


Рисунок 7.3 – Спектрограма амплітуд
грама радіосигналу з тональною АМ

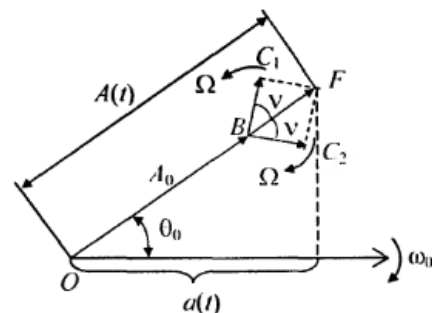


Рисунок 7.4 – Векторна діа-
грама радіосигналу

Вектор OF являється сумою вказаних вище трьох векторів. Якщо з кутових частот обертання всіх векторів виключити частоту ω_0 (це досягається обертанням осі абсцис по годинниковій стрільці), вектор OB нерухомий, в вектори бічних складових BC_1 та BC_2 обертаються з частотою Ω в протилежних напрямках (верхня бічна – проти годинникової стрілки, а нижня – по годинниковій). При чому довжина вектору OF змінюється в часі. Це свідчить про наявність в сигналі амплітудної модуляції. Кутова модуляція при цьому відсутня, оскільки кутове положення вектору OF не змінюється.

г) Спектр радіосигналу при нетональній АМ. Розглянемо два випадки: випадок дискретного і випадок суцільного спектрів сигналу що модулюється.

1). Випадок дискретного спектру сигналу що модулюється $s(t)$ містить декілька коливань з дискретними фізичними частотами Ω_i (від Ω_1 до Ω_m). Спектрограма амплітуд такого сигналу зображена на рис. 7.5, а. Кожна складова спектру коливання, що модулюється є гармонійною складовою і тому здійснює тональну модуляцію. Це призводить до появи в спектрі радіосигналу двох бічних смуг: верхньої бічної смуги, яку утворюють коливання з частотами $(\omega_0 + \Omega)$, та нижньої бічної смуги - з частотами $(\omega_0 - \Omega)$. Спектрограма радіосигналу для цього випадку зображена на рис. 7.5, б. З спектрограми випливає, що ширина спектру для цього випадку дорівнює:

$$\Delta\omega = (\omega_0 + \Omega_m) - (\omega_0 - \Omega) = 2\Omega_m.$$

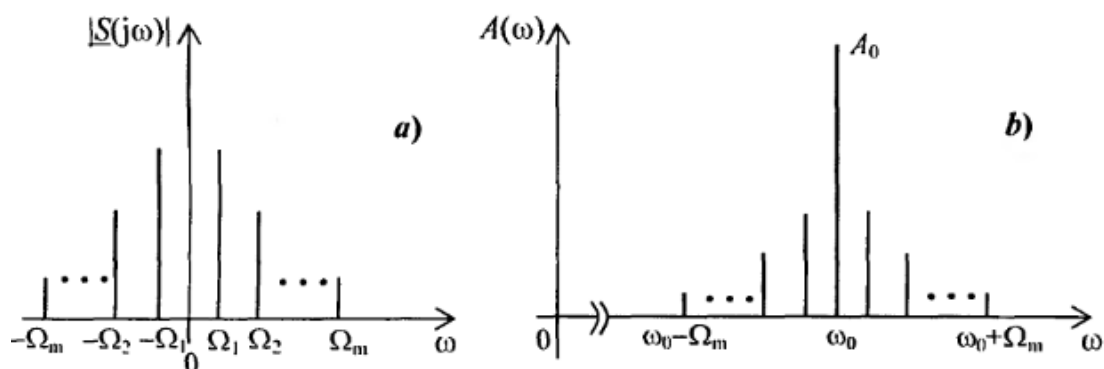


Рисунок 7.5 – а спектрограма амплітуд, б спектрограма радіосигналу для цього випадку

2) Випадок суцільного спектру сигналу що модулюється в цьому випадку визначимо, застосувавши до (8.7) пряме перетворення Фур'є:

$$A(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) e^{-j\omega t} dt + k_{\text{ам}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} \cos(\omega_0 t + \theta_0) dt.$$

В відповідності з (4.64) перший інтеграл являє собою дві δ -функції на частотах $\pm\omega_0$ (спектральна щільність гармонійного коливання). Уявляючи в другому інтегралі косинус по формулі:

$$\cos(\omega_0 t + \theta_0) = 0,5(e^{j(\omega_0 t + \theta_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \theta_0)}),$$

Перетворюємо в початковий вираз у вигляді:

$$A(j\omega) = \pi A_0 e^{j\theta_0} \delta(\omega - \omega_0) + \pi A_0 e^{-j\theta_0} \delta(\omega + \omega_0) + \frac{+k_{\text{ам}}}{2} e^{j\theta_0} \underline{S}[j(\omega - \omega_0)] + \frac{k_{\text{ам}}}{2} e^{-j\theta_0} \underline{S}[j(\omega + \omega_0)], \quad (7.15)$$

де $\underline{S}[j(\omega \pm \omega_0)]$ – спектральна щільність сигналу що модулюється $s(t)$, зміщена вздовж осі частот на $\pm\omega_0$.

Таким чином, спектральна щільність радіосигналу містить дискретну частину у вигляді двох δ -функцій на частотах $\pm\omega_0$, а також суцільну частину. Наявність дискретної частини говорить про присутність в сигналі несучого коливання з частотою ω_0 та кінцевої амплітуди A_0 . Суцільна частина спектру продовжується модуляцією.

Суцільна частина спектру, утворюється шляхом сумування двох, змішаних вздовж осі частот на величину $\pm\omega_0$ копій сигналу що модулюється. Оскільки спектр сигналу що модулюється концентрується в області низьких частот, то ці копії практично не перекриваються. Тому амплітудна модуляція рівносильна переносу спектру сигналу що модулюється в область несучої частоти. При цьому формуються дві бічні сути в районі несучої частоти, а ширина спектру в два рази перевищує ширину спектру модулюючого процесу. Це призводить в відповідності з (7.26) до збільшення бази сигналу в два рази.

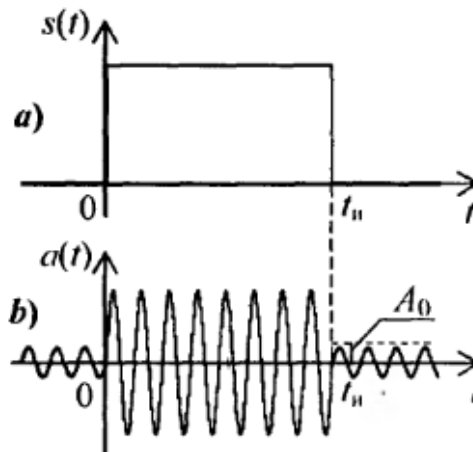


Рисунок 7.6 – Радіоімпульс з прямокутною формою огибаючої

Так ширина спектру сигналу телефонії дорівнює $\Delta F = 3,4$ кГц. Тому ширина спектру АМ радіосигналу при радіотелефонії складає 6,8 кГц. Такою смугою пропускання повинен володіти тракт проміжної частоти зв'язаного приймача в режимі радіотелефонії.

В якості прикладу розглянемо одиночний радіоімпульс з прямокутною формою огибаючої (рис.7.6, b). Цей імпульс отримують шляхом амплітудної модуляції несучого коливання одиночним прямокутним імпульсом (рис. 7.6, a). Методика побудови спектрограми такого радіоімпульсу ілюструється рис. 7.7. Суцільна частина спектру отримана шляхом зміщення графіку модуля спектральної щільності одиночного прямокутного імпульсу $|\underline{S}(j\omega)|$ вздовж осі частот на величину $\pm\omega_0$. Дискретна частина в спектрі радіоімпульсу може бути відсутня, якщо $A_0 = 0$.

Не залежно від того, яка структура спектру сигналу що модулюється (дискретна або суцільна), спектр радіосигналу при АМ містить дві бічні смуги, симетрично відносно несучої частоти. Спектрограма сигналу будується шляхом зміщення спектрограми сигналу що модулюється вздовж осі частот $\pm\omega_0$.

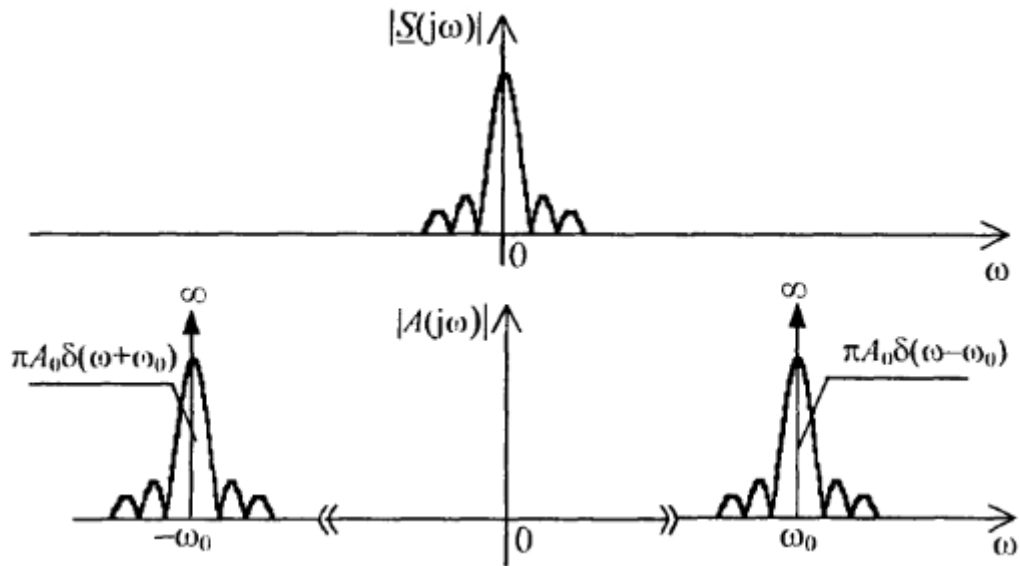


Рисунок 7.7 - Ілюстрація методика побудови спектрограми радіоімпульсу

д) АКФ радіосигналу з амплітудною модуляцією. Вважатимемо, що радіосигнал має кінцеву енергією. Тоді в відповідності з (6.2) АКФ радіосигналу визначається виразом:

$$B_a = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t)a(t + \tau)dt. \quad (7.16)$$

Підставляючи (7.5) в (7.6), отримуємо наступне співвідношення:

$$B_a = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)A(t + \tau)\cos(\omega_0 t + \theta_0)\cos[\omega_0(t + \tau) + \theta_0]dt.$$

Використовуючи формулу для добутку косинусів, отримуємо:

$$B_a(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)A(t + \tau)\cos(\omega_0 \tau) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)A(t + \tau)\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta_0) dt.$$

В отриманому виразі другий інтеграл практично дорівнює нулю, оскільки він являє собою площу швидко осцилюючого (з частотою $2\omega_0$) процесу з повільним вимірюванням амплітуди. З урахуванням цього останній вираз приводиться до вигляду:

$$B_a(\tau) \approx \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)A(t + \tau)dt. \quad (7.17)$$

Запишемо формулу (7.17) у вигляді:

$$B_a(\tau) = B_0(\tau)B_s(\tau). \quad (7.18)$$

У формулі (7.18) перший член це АКФ несучого колювання одиничної амплітуди, а другий – АКФ огиноючої. Таким чином, АКФ радіосигналу з АМ визначається як добуток АКФ несучого колювання та АКФ огиноючої.

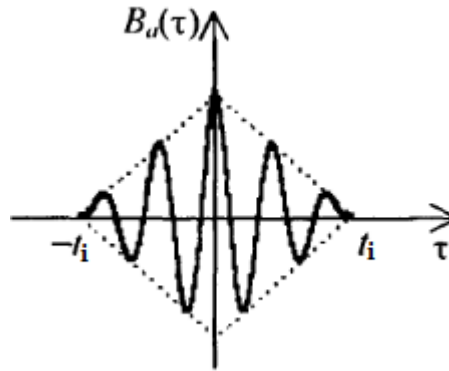


Рисунок 7.8 – АКФ радіоімпульсу тривалістю t_i з прямокутною огиноючою

В якості прикладу на рис. 7.8 зображена АКФ радіоімпульсу тривалістю t_i з прямокутною огиноючою. Оскільки АКФ радіоімпульсу являє собою радіоімпульс з трикутною огиноючою.

е) Спеціальні види АМ. В класичному варіанті використання АМ має істотний недоліком, що полягає в тому, що основна частина потужності модульованого радіосигналу зосереджена в несучому колюванні, в якому не міститься інформації про повідомлення що передається. Рівні нижньої бічної смуги (НБС) та верхньої бічної смуги (ВБС), яке є інформаційним, нижче рівня несучої тому в них зосереджена менша частина потужності радіосигналу (рис. 7.9, а). Це погіршує перешкодозахищеність та зменшує дальність радіозв'язку. У зв'язку з цим було запропоновано виключити несучу частоту із спектру радіосигналу. При цьому отримуємо радіосигнал з так званою балансною АМ, спектрограма якого зображена на рис. (7.9, b).

З причини симетрії бічних смуг спектру відносно несучої одна з бічних смуг може бути видалена. Отриманий таким чином сигнал називають односмуговим радіосигналом. Спектрограма цього сигналу зображена на рис. 7.9, с. Ширина спектру односмугового сигналу в два рази менше порівняно з класичним АМ сигналом. Це дозволяє в одному і тому ж діапазоні розмістити в

два рази більшу кількість радіостанцій. Крім того, вся потужність передавача в цьому випадку використовується для передачі інформаційної складової сигналу, що збільшує дальність дії радіосистем з таким видом модуляції

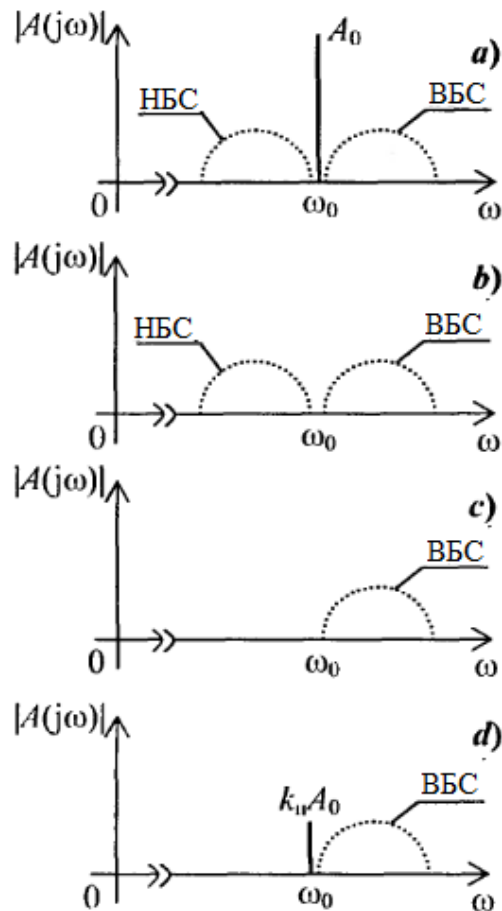


Рисунок 7.9 - Рівні нижньої бічної смуги (НБС) та верхньої бічної смуги (ВБС)

При прийомі односмугового сигналу виникає необхідність відновлювати з високою точністю несучу, що пов'язано з технічними складнощами. Тому на практиці використовують односмугові сигнали з частково подавленою несучою. Залишок несучої, називають пілот-сигналом, має амплітуду $k_{\text{п}} A_0$, де $k_{\text{п}}$ – коефіцієнт подавлення несучої, ($0 < k_{\text{п}} < 1$). Пілот-сигнал використовується в радіоприймачі для відновлення несучого коливання.

Спектрограма такого сигналу зображена на рис. 7.9, *d*.

Односмугові сигнали знаходять широке застосування при розробці систем радіозв'язку, а також телевізійних систем.

7.3 Радіосигнали з кутовою модуляцією

а) Уявлення сигналів з кутовою модуляцією. Кутова модуляція (КМ) – модуляція, при якій по закону повідомлення, що передається змінюють приріст частоти або початкової фази радіосигналу, тобто повідомлення вводять в закон зміни повної фази радіосигналу. При цьому амплітуду залишають не змінною: $A(t) = A_0 = \text{const.}$ З урахуванням цього з (7.3) отримуємо наступний вираз для радіосигналу з кутовою модуляцією:

$$a(t) = A_0 \cos[\Psi(t)]. \quad (7.19)$$

Як було відзначено раніше, при відсутності кутової модуляції повна фаза радіосигналу змінюється за лінійним законом. Наявність кутової модуляції супроводжується появою деякого приросту $\theta(t)$, яке однозначно пов'язано з повідомленням що передається. Тому незалежно від виду модулюючого впливу повну фазу радіосигналу з кутовою модуляцією можна записати у вигляді:

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \theta(t) + \theta_0 \quad (7.20)$$

б) Взаємозв'язок миттєвої частоти та повної фази радіосигналу. Оскільки при кутовій модуляції частота радіосигналу може змінюватися, вводять поняття миттєвої частоти, яке означає поточне значення частоти в довільний момент часу. По суті, йдеться про функціональну залежність частоти від часу $\omega(t)$.

Як відомо, частота – швидкість зміни фази, тому з урахуванням (7.20) запишемо співвідношення, що пов'язують миттєву частоту та повну фазу:

$$\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\theta(t)}{dt}; \quad (7.21)$$

$$\Psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt + \theta_0. \quad (7.22)$$

Таким чином, миттєва частота – це перша похідна повної фази за часом, а повна фаза – це інтеграл від миттєвої частоти (з точністю до початкової фази). З (7.21), (7.22) випливає, що будь-яка зміна частоти призведе до зміни повної фази та навпаки будь-яка зміна повної фази, що відрізняється від лінійного, призведе до зміни частоти. Тому частотній модуляції завжди супроводить фазова модуляція, а фазовій модуляції частотна. Якщо не відмово який із видів модуляції здійснений при передачі, то на прийомі це встановити не можливо.

Відміна ЧМ від ФМ проявляється в наступному. При ЧМ по закону повідомлення, що передається змінюють частоту сигналу, а супутні зміни його початкової фази супроводить інтегралу повідомлення що передається. При ФМ по закону повідомлення, що передається змінюють початкову фазу, а супутня зміна його частоти відповідає похідній від повідомлення що передається.

в) Радіосигнали з частотою модуляцією. Сигнал, що модулює $s(t)$ при ЧМ впливає на частоту, викликаючи приріст частоти $\Delta\omega(t)$, прямопропорційне сигналу що модулює. Тому для миттєвої частоти можна записати:

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega(t) = \omega_0 + k_{\text{чм}}s(t) \quad (7.23)$$

де $k_{\text{чм}}$ – коефіцієнт пропорційності.

Тоді в відповідності з (8.22) повна фаза радіосигналу дорівнює:

$$\Psi(t) = \int_0^t [\omega_0 + k_{\text{чм}}s(t)]dt + \theta_0 = \omega_0 t + k_{\text{чм}} \int_0^t s(t)dt + \theta_0. \quad (7.24)$$

З (8.24) випливає, що в результаті ЧМ з'явилася супутня ФМ, про що свідчить додатковий приріст повної фази:

$$\theta(t) = k_{\text{чм}} \int_0^t s(t)dt$$

Яке прямо пропорційне інтегралу від функції що модулюється.

Розглянемо випадок тональної частотної модуляції. В цьому випадку сигнал що модулюється $s(t)$ має вигляд (7.8). Для прощення подальших викладок покладемо $\nu = 0$, тоді:

$$s(t) = S_0 \cos \Omega t \quad (7.25)$$

Сигнал що модулює зображений на рис. 7.10, а. Відповідно з (7.23) миттєва частота радіосигналу дорівнює:

$$\omega(t) = \omega_0 + k_{\text{чм}}S_0 \cos \Omega t = \omega_0 + \omega_d \cos \Omega t \quad (7.26)$$

де $\omega_d = k_{\text{чм}}S_0$ – девіація частоти радіосигналу з тональною ЧМ

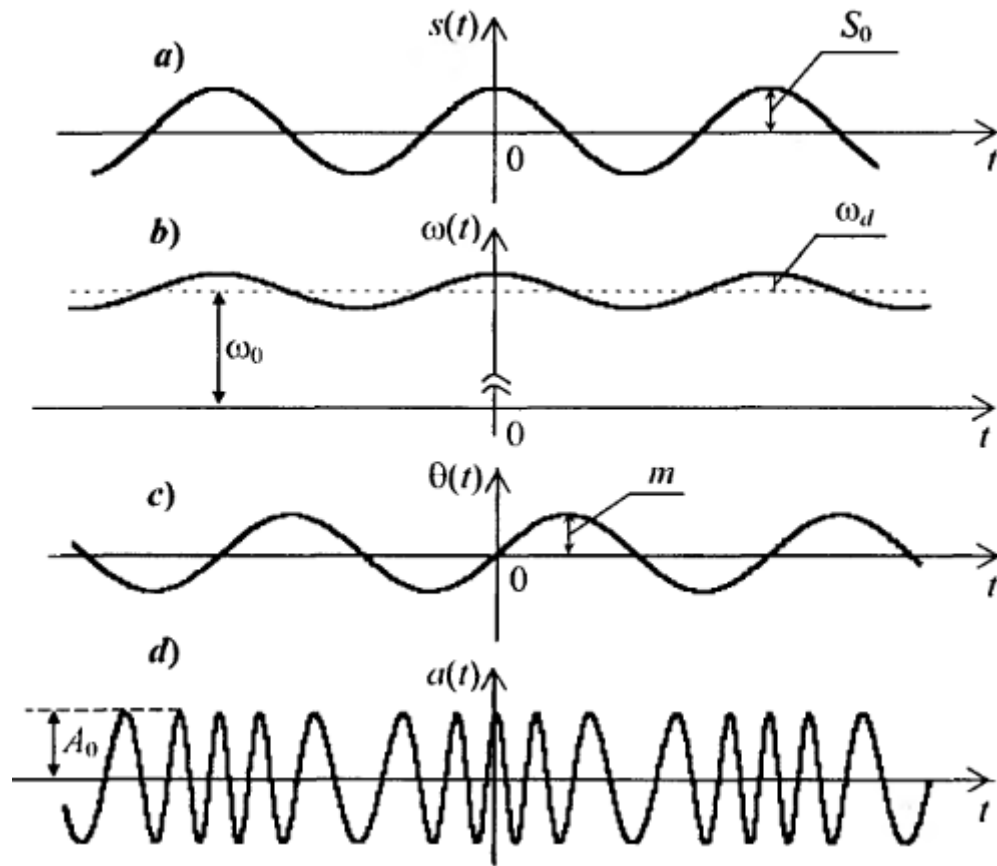


Рисунок 7.10 – *a* сигнал що модулює, *b* графік залежності частоти радіосигналу при тональній ЧМ від часу, *c* індекс фазової модуляції дорівнює максимальному відхиленню повної фази від лінійного закону

Девіацією частоти при тональній ЧМ називають максимальне відхилення миттєвої частоти радіосигналу $\omega(t)$ від несучої ω_0 . Девіація частоти при ЧМ залежить тільки від амплітуди сигналу що модулює. Графік залежності частоти радіосигналу при тональній ЧМ від часу зображений на рис. 7.10, *b*.

Визначимо повну фазу сигналу, підставляючи (7.26) в (7.24):

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \frac{\omega_d}{\Omega} \sin \Omega t + \theta_0 \quad (7.27)$$

Параметр $m = \omega_d / \Omega$ називають індексом фазової модуляції, який є девіацією фази. Індекс фазової модуляції дорівнює максимальному відхиленню повної фази від лінійного закону (рис. 7.10, *c*) та вимірюється в радіанах.

З урахуванням цього фаза радіосигналу (7.27) прийме вигляд:

$$\Psi(t) = \omega_0 t + m \sin \Omega t + \theta_0 \quad (7.28)$$

а миттєве значення ЧМ радіосигналу:

$$a(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + m \sin \Omega t + \theta_0] \quad (7.29)$$

Графік ЧМ радіосигналу, збудований в відповідності з (7.29), зображений на рис. 7.10, *d*. З (7.26) та (7.27) випливає, що тональна ЧМ по закону косинуса призводить до супутньої тональній ФМ по закону синуса.

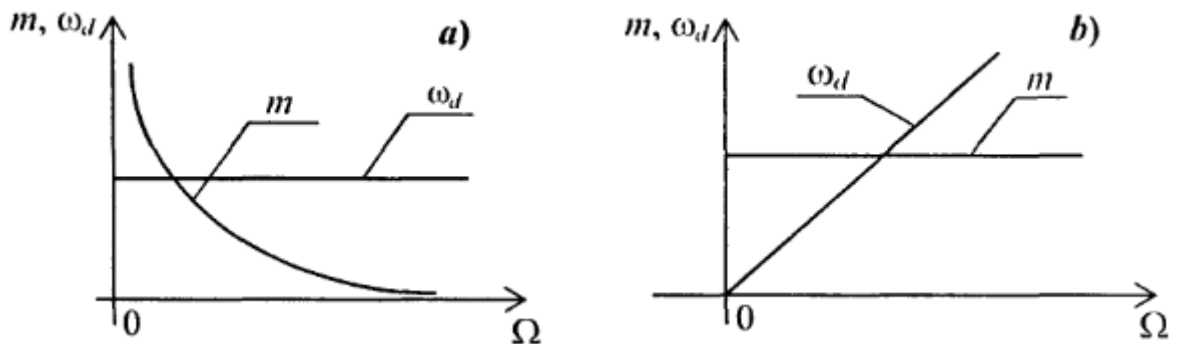


Рисунок 7.11 - Графіки залежності параметрів ω_d та m від частоти Ω

Графіки залежності параметрів ω_d та m від частоти Ω , що модулює для тональної ЧМ зображені на рис. 7.11, *a*. Девіація частоти ω_d не залежить від частоти модуляції, а індекс m обернено пропорційний частоті модуляції.

г) Радіосигнали з фазовою модуляцією. При ФМ сигнал, що модулює $s(t)$ впливає на приріст початкової фази $\theta(t)$ і повна фаза при цьому дорівнює:

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \theta(t) + \theta_0 = \omega_0 t + k_{\text{фм}} s(t) + \theta_0 \quad (7.30)$$

де $k_{\text{фм}}$ – коефіцієнт пропорційності.

Використовуючи (7.21), визначимо миттєву частоту радіосигналу:

$$\omega(t) = \omega_0 + k_{\text{фм}} \frac{ds(t)}{dt} \quad (7.31)$$

З (7.31) видно, що в результаті ФМ виникла супутня ЧМ, що виражається у появі додаткового приросту частоти $\Delta\omega(t) = k_{\text{фм}} \frac{ds(t)}{dt}$, яке прямо пропорційне похідній від сигналу що модулює.

Розглянемо випадок тональної ФМ. Нехай сигнал що модулює $s(t)$ має вигляд:

$$s(t) = S_0 \sin \Omega t \quad (7.32)$$

З урахуванням (7.30) та (7.32) повна фаза сигналу дорівнює:

$$\Psi(t) = \omega_0 t + k_{\text{фм}} S_0 \sin \Omega t + \theta_0 = \omega_0 t + m \sin \Omega t + \theta_0 \quad (7.33)$$

де $m = k_{\text{фм}} S_0$ – індекс фазової модуляції, який при ФМ залежить тільки від амплітуди сигналу що модулює і не залежить від його частоти.

Миттєву частоту визначимо, використовуючи (7.31):

$$\omega(t) = \omega_0 + m\Omega \cos \Omega t = \omega_0 + \omega_d \cos \Omega t \quad (7.34)$$

З формул (7.33) та (7.34) випливає, що тональна ФМ по закону синуса призводить до супутньої тональної ЧМ по закону косинуса.

Використовуючи (7.33), запишемо вираз для миттєвого значення радіосигналу:

$$a(t) = A_0 \cos \Psi(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + m \sin \Omega t + \theta_0] \quad (7.35)$$

Графіки залежностей величин ω_d та m від Ω для тональної ФМ зображені на рис. 7.11, *b*. У випадку ФМ індекс фазової модуляції m не залежить від частоти модуляції, а девіація частоти ω_d лінійно зростає при збільшенні частоти модуляції.

д) Спектральний аналіз радіосигналів з кутовою модуляцією. У випадку довільного модуляційного впливу задача визначення спектру радіосигналу з КМ не має аналітичного рішення.

Аналітичне рішення існує тільки для радіосигналу з тональною кутовою модуляцією. Задамо цей сигнал в наступному вигляді:

$$a(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + m \sin \Omega t] \quad (7.36)$$

Використовуючи формулу для косинуса суми двох аргументів, отримаємо:

$$a(t) = A_0 \cos[m \sin \Omega t] \cos(\omega_0 t) - A_0 \sin[m \sin \Omega t] \sin(\omega_0 t) \quad (7.37)$$

Таким чином, радіосигнал з КМ може бути представлений у вигляді алгебраїчної суми двох АМ радіосигналів, що знаходяться в квадратурі тобто зсунутих відносно один одного на 90° . Складність подальшого аналізу складається в тому, що закони вимірювання амплітуд кожного з АМ радіосигналів не лінійно зв'язані з сигналом що модулюється.

Так як функції $\cos(m \sin \Omega t)$ та $\sin(m \sin \Omega t)$ являються періодичними (період дорівнює періоду сигналу що модулюється), то їх можна розкласти в ряд Фур'є. В відповідності з [4] уявимо ці функції у вигляді:

$$\cos(m \sin \Omega t) = J_0(m) + 2J_2(m) \cos(2\Omega t) + 2J_4(m) \cos(2\Omega t) + \dots; \quad (7.37)$$

$$\sin(m \sin \Omega t) = 2J_1(m) \sin(\Omega t) + 2J_3(m) \sin(3\Omega t) + \dots, \quad (7.39)$$

де $J_n(m)$ – значення функцій Бесселя першого роду n -го порядку аргументу m .

Підставляючи (8.38) та (8.39) в (8.37), отримуємо:

$$a(t) = A_0[J_0(m)\cos(\omega_0 t) - 2J_1(m) \sin(\Omega t) \sin(\omega_0 t) + 2J_2(m) \cos(2\Omega t) \cos(\omega_0 t) - 2J_3(m) \sin(3\Omega t) \sin(\omega_0 t) + 2J_4(m) \cos(4\Omega t) \cos(\omega_0 t) + \dots].$$

Скориставшись тригонометричними формулами, приходимо до виразу:

$$a(t) = A_0\{J_0(m)\cos(\omega_0 t) + J_1(m)\cos[(\omega_0 + \Omega)t]J_1(m)\cos[(\omega_0 - \Omega)t] + J_2(m)\cos[(\omega_0 + 2\Omega)t] + J_2(m)\cos[(\omega_0 - 2\Omega)t] + J_3(m)\cos[(\omega_0 + 3\Omega)t] - J_3(m)\cos[(\omega_0 - 3\Omega)t] + \dots\} \quad (7.40)$$

Формула (8.40) являє собою розкладання радіосигналу з тональною КМ на спектральні складові. З цієї формули випливає, що спектр радіосигналу складається з нескінченної безлічі складових, в яку входять:

- несуче коливання з частотою ω_0 та амплітудою $A_0|J_n(m)|$;
- верхня бічна смуга, створена коливаннями з частотами $(\omega_0 + n\Omega)$ та амплітудами $A_0|J_n(m)|$;
- нижня бічна смуга, створена коливаннями з частотами $(\omega_0 - n\Omega)$ та амплітудами $A_0|J_n(m)|$.

Отже, при ТКМ в спектрі радіосигналу формуються дві бічні смуги частот на відміну від ТАМ, при якій в спектрі формуються дві бічні частоти. Аналіз показує, що складові в бічних смугах розташовані симетрично відносно несучої частоти. Амплітуди симетрично розкладених складових однакові, а їх початкові фази при не парних n відрізняються на π . Амплітуди пар складових спектру ЧМ сигналу відрізняються співвідношенням:

$$U_n = A_0|J_n(m)|, \quad (7.41)$$

де, $n=0$ відповідає несучій частоті; $n=1, 2, 3, \dots$ - номери пар бічних складових, симетричних відносно несучої частоти.

Значення функцій Бесселя $J_n(m)$, ваговими коефіцієнтами, які визначають амплітуди складових спектру. Структура спектру істотно залежить від індексу модуляції m , оскільки цей параметр є аргументом функцій Бесселя.

Розглянемо динаміку змін спектру при зміні індексу m .

1) Випадок малих індексів ($m \ll 1$). В цьому випадку виконуються наступні наближені співвідношення: $\cos(m \sin \Omega t) \approx 1$; $\sin(m \sin \Omega t) \approx m \sin \Omega t$. З урахуванням цих співвідношень (8.37) приймає вигляд:

$$a(t) \approx A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t] - \frac{A_0 m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t]. \quad (7.42)$$

З (7.42) випливає, що при малих значеннях індексу фазової модуляції m , в спектрі можна враховувати тільки три складові: несучу з частотою ω_0 та першу пару бічних частотами $(\omega_0 + \Omega)$ и $(\omega_0 - \Omega)$. Амплітуди цих бічних складових спектру дорівнюють $A_0 m/2$. Спектрограма амплітуд для цього випадку зображена на рис. 7.12. Спектр по структурі схожий зі спектром з ТАМ сигналом. Відмінність полягає в фазировці складової спектру з нижньою бічною частотою. Ширина спектру, як і у випадку із ТАМ, дорівнює $\Delta\omega = 2\Omega$.

На рис. 7.13 зображена векторна діаграма радіосигналу для цього випадку.

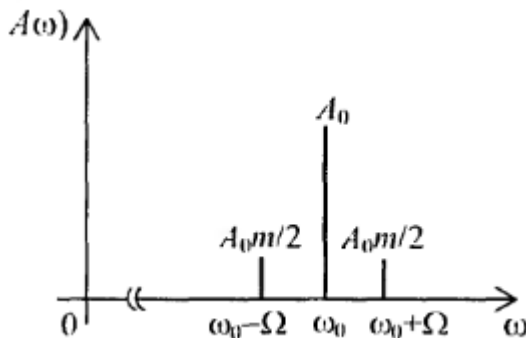


Рисунок 7.12 – Спектрограма амплітуд

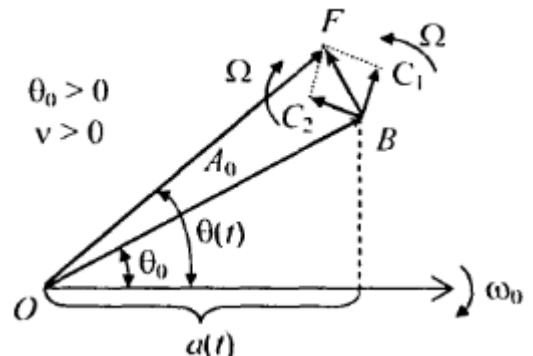


Рисунок 7.13 – Векторна діаграма радіосигналу

Діаграма побудована по тим же правилам, що і діаграма радіосигналу з АМ (рис. 7.4). Істотна відміна між цими діаграмами полягає в тому, що вектор нижньої бічної частоти (BC_2) направлений в протилежному напрямку, та призводить до того, що при обертанні векторів BC_1 та BC_2 кутове положення сумарного вектору OF зміниться. Це говорить про наявність в сигналі RV.

2) Випадок великих індексів ($m \gg 1$). Із збільшенням значення m зростає кількість спектральних складових, які мають достатньо велику амплітуду, і їх слід враховувати при оцінці ширини спектру сигналу. Так при $m = 0,5$ необхід-

но враховувати ще одну пару бічних складових, при $m = 1$ – третю пару і так далі. Таким чином, із зростанням індексу фазової модуляції спектр радіосигналу розширюється.

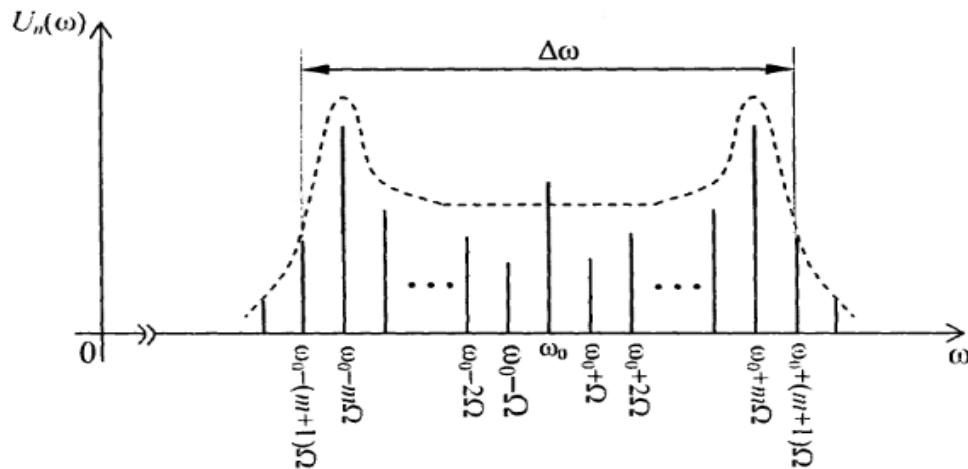


Рисунок 7.14 – Приблизний вигляд спектрограм Бесселя

Особливістю функцій Бесселя така, що при бічних індексах ($m=5$), вони мають істотні значення для $n < m$, при $n = m$ спостерігається різкий сплеск, а при $n > m$ різкий спад. Приблизний вигляд спектрограм зображений на рис. 7.14.

З рис. 7.14 витікає, що в спектрі при великих індексах фазової модуляції m можна враховувати тільки $(m + 1)$ пар бічних складових, тобто ширина спектру в даному випадку дорівнює:

$$\Delta\omega = 2(m + 1)\Omega \approx 2m\Omega = 2\omega_d \quad (7.43)$$

При великих індексах ширина спектру радіосигналу з тональною УМ приблизно дорівнює подвоєній девіації частоти, тобто в m разів більше, чим при тональній АМ. Тому ЧМ у даному випадку називають широкосмуговою.

7.4 Радіоімпульс з лінійною частотною модуляцією (ЛЧМ)

Радіоімпульс з ЛЧМ – осцилюючий імпульсний процес, частота осциляцій якого вимірюється по лінійному закону. Такі імпульси використовують в радіолокації та в цифрових системах зв'язку, оскільки їх застосування покращує перешкодостійкість.

Розглянемо радіоімпульс з прямокутною огинаючою та лінійним наростанням частоти (рис. 7.15). На рис. 7.15 через ω_D позначена повна зміна частоти

за час t_i (повна девіація частоти). Залежність частоти від часу в межах t_i запишемо у вигляді:

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t, \quad (7.44)$$

де β – параметр, що визначає швидкість зростання частоти, який розраховується за формулою:

$$\beta = \omega_D / t_i \quad (7.45)$$

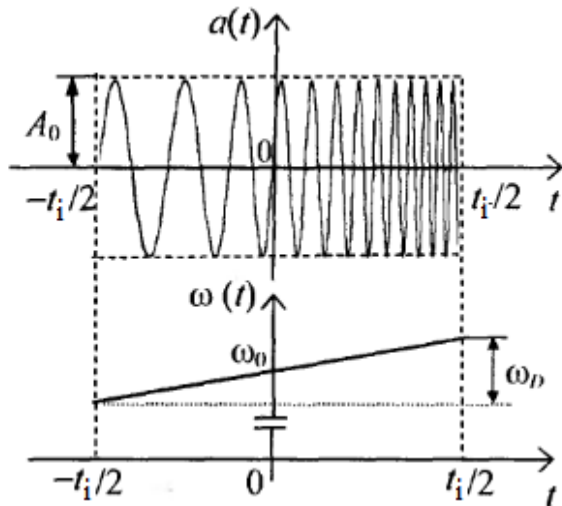


Рисунок 7.15 – Радіоімпульс з прямокутною огинаючою та лінійним наростанням частоти

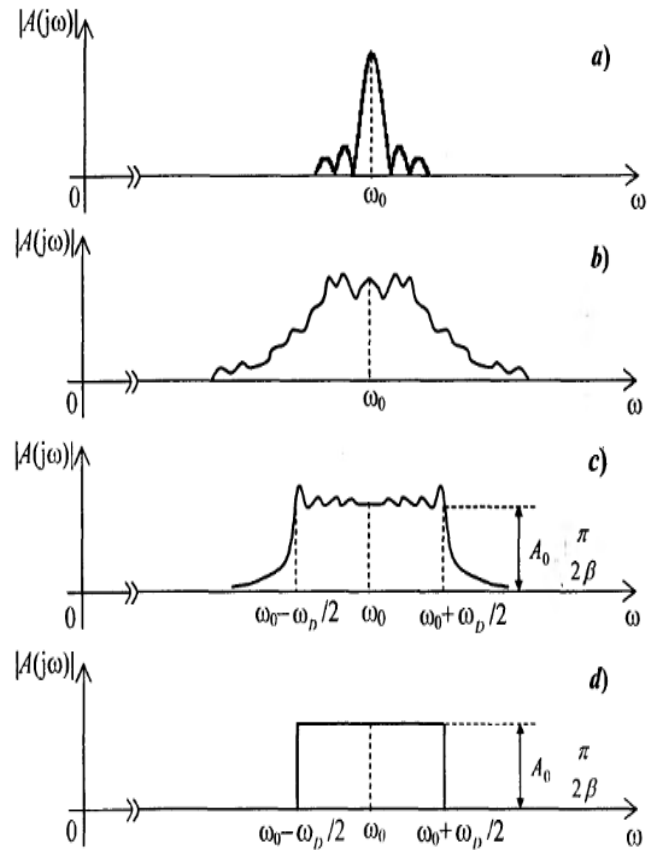


Рисунок 7.16 – Спектрограми тільки в області фізичних частот

Визначимо повну фазу радіосигналу, скориставшись (7.22):

$$\Psi(t) = \int_0^t (\omega_0 + \beta t) dt + \theta_0 = \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2} + \theta_0. \quad (7.46)$$

З урахуванням (7.46) миттєве значення радіосигналу запишеться так:

$$a(t) = A_0 \cos \Psi(t) = A_0 \cos \left(\omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2} + \theta_0 \right). \quad (7.47)$$

Визначимо спектральну щільність радіоімпульсу з ЛЧМ, застосувавши до (7.47) пряме ПФ:

$$A(j\omega) = A_0 \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2} + \theta_0) e^{-j\omega t} dt. \quad (7.48)$$

Інтеграл у (7.48) зводиться до комбінації інтегралів Френеля [1]. Приведемо результати чисельного аналізу модуля спектральної щільності (рис. 7.16) в області фізичних частот при різних значеннях величини $B = f_D t_i$, яку називають параметром ЛЧМ радіоімпульсу

1) Випадок $B = 0$ відповідає відсутності ЧМ та ілюструється на рис. 7.16, *a*. Спектр ЛЧМ радіоімпульсу в даному випадку збігається зі спектром радіоімпульсу з прямокутною огинаючою (рис. 7.7).

2) Випадок $B = 10$ ілюструється на рис. 7.16, *b*.

3) Випадок $B = 100$ ілюструється на рис. 7.16, *c*.

Аналіз результатів показує, що з ростом B спектр розширюється.

При великих B ($B \gg 1$) модуль спектральної щільності практично побудований в смузі частот від $(\omega_0 - \omega_D/2)$ до $(\omega_0 + \omega_D/2)$, тобто ширина спектру дорівнює повній девіації частоти: $\Delta\omega = \omega_D$. Тому для теоретичних розрахунків будемо користуватися прямокутною апроксимацією, вважаючи, що в указаній смузі частот модуль спектральної щільності постійний, а за межами цієї смуги – дорівнює нулю. Ідеалізована спектрограма модуля радіоімпульсу з великою базою зображена на рис. 7.16, *d*. Таке уявлення істотно спрощує аналіз. Аналітичний запис модуля спектральної щільності в цьому випадку має вигляд:

$$|A(j\omega)| = \begin{cases} 0, \text{ при } |\omega| < \omega_0 - \frac{\omega_D}{2}; \\ A_0 \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}, \text{ при } \omega_0 - \frac{\omega_D}{2} < \omega_0 + \frac{\omega_D}{2}; \\ 0, \text{ при } |\omega| > \omega_0 + \frac{\omega_D}{2} \end{cases} \quad (7.49)$$

Аргумент спектральної щільності ЛЧМ радіоімпульсу при великих значеннях параметра B з достатнім ступенем точності описується співвідношенням [2], яке являє собою квадратичну параболу:

$$\theta(\omega) = -\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\beta} \quad (7.50)$$

Зауважимо, що при $B \gg 1$ база сигналу у відповідності з формулою (7.26) дорівнює: $N \approx f_D t_i = B/2 \gg 1$. Тому такий імпульс називають ЛЧМ радіоімпу-

льсом з великою базою. Саме такі ЛЧМ радіоімпульси знайшли застосування при розробці радіолокаційних систем та систем передачі цифрових даних.

б) АКФ ЛЧМ радіоімпульсу. Розглянемо цікавий для практики випадок, коли параметр $B \gg 1$. Скористаємось тим, що АКФ сигналу – це зворотне ПФ від енергетичного спектру. У відповідності з (6.17) враховуючи (7.49) для розглянутого випадку можна записати:

$$B_a(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\omega_D}{2}}^{\omega_0 + \frac{\omega_D}{2}} A_0^2 \frac{\pi}{2\beta} \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (7.51)$$

Після не складних перетворень переходимо до наступного:

$$B_a(\tau) = \frac{A_0^2 t_i}{2} \frac{\sin(\omega_D \tau / 2)}{\omega_D \tau / 2} \cos(\omega_0 \tau). \quad (7.52)$$

На рис. 7.17 зображений графік АКФ радіоімпульсу з ЛЧМ, побудований у відповідності з (7.52). Таким чином, АКФ ЛЧМ радіоімпульсу з великою базою являє собою високочастотний процес з частотою осциляцій, що дорівнює ω_0 . При $\tau = 0$ АКФ має яскраво виражений сплеск. З ростом τ АКФ достатньо швидко убуває, та прагне до нуля. Збільшуючи повну девіацію частоти можна отримати АКФ, що володіє дуже вузькою центральною пелюсткою.

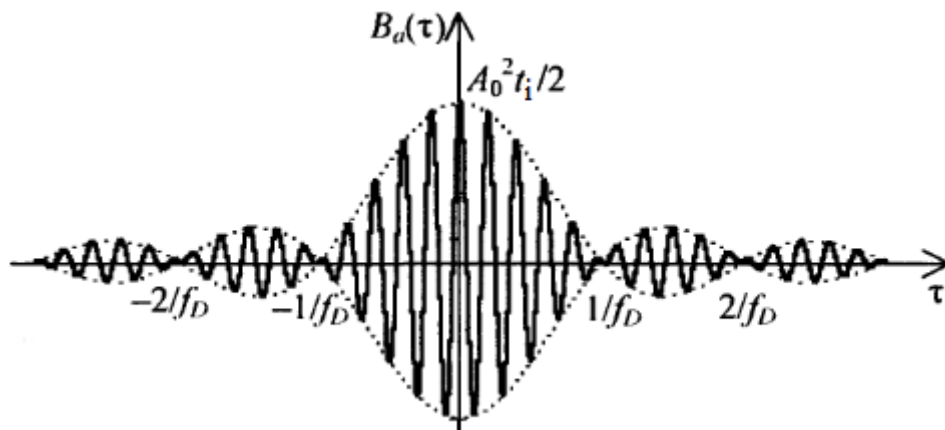


Рисунок 7.17 – Графік АКФ радіоімпульсу з ЛЧМ

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник. Изд.4-у, испр. и доп.- М: ЛЕНАНД., 2016 – 528 с.
2. Васильев В.П., Муро Э.Л., Смольский С.М. Основы теории и расчетов цифровых фильтров.-М.: Академия,2007,- 272 с.
3. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы.: Учебное пособие для вузов – М.Дрофа, 2006, - 608 с.
4. Дьяконов В.П. MATLAB R2007/2008/2009 для радиоинженеров. М.: ДМК Пресс,2010.-776 с. ил.
5. Каганов В.И. Радиотехника+компьютер+MathCad.-М.: Горячая линия Телеком, 2001.-416 с.: ил.
6. Кардашев Г.А. Виртуальная электроника. Компьютерное моделирование аналоговых устройств. М.: Горячая линия-Телеком, 2012,20 с.: ил.
7. Карташкин А.С. Авиационные радиосистемы.- 2-е изд. М. ИП Радио-софт,2012, 304 с.
8. Кудряков С.А. Основы теории радиотехнических сигналов и цепей. (Учебное пособие).- С. Пб. : Изд-во «Свое Издательство», 2014.
9. Кудряков С.А. Основы теории радиотехнических сигналов и цепей. (Учебное пособие).- С. Пб. : Изд-во «Свое Издательство», 2014.
10. Волощук Ю.І. Сигнали та процеси у радіотехніці. Том 1, Харків Компанія СМІТ, 2003. — 580 с.
11. Волощук Ю.І. Сигнали та процеси у радіотехніці. Том 2, Харків «Компанія СМІТ», 2003. - 444 с.
12. Волощук Ю.І. Сигнали та процеси у радіотехніці. Том 3, Харків: «Компанія СМІТ», 2005. - 528 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Конспект лекцій з дисципліни «Сигнали та процеси в радіотехніці» освітньо-професійної програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» за освітньо-професійною програмою «Телекомунікації та радіотехніка», укл. Марченко С.В., Кам'янське; ДДТУ, 2019 р. – 96с.

Укладач:

к.ф.-м. н. Марченко С.В.

Підписано до друку _____ 2019 р.

Формат А4 Обсяг _____ др. екз.

Тираж _ екз. Заказ _____ др. екз.

519618, м. Кам'янське

вул. Дніпробудівська, 2а