

М. Г. Попович, О. В. Ковальчук

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ



Підручник

М. Г. Полович, О. В. Ковальчук

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

*Затверджено Міністерством освіти
і науки України*

Підручник
для студентів вищих технічних
навчальних закладів

Видання друге, перероблене
і доповнене

Київ
"Либідь"
2007

Автори

М. Г. Попович (перехідомов, гл. 1—5, гл. 6 параграфи 6.1—6.8);
О. В. Коштыук (гл. 6 параграфи 6.9—6.13, гл. 7—12)

Рецензенти:

чл.-кор. НАН України, д-р техн. наук, проф. *І. В. Волосж*,
д-р техн. наук, проф. *В. І. Ситник*,
д-р техн. наук, проф. *Ю. А. Скрипник*

Затверджено Міністерством освіти і науки України
(лист № 14/18.2-828 від 30.03.06)

Видано за рахунок державних коштів
Друк за замовленням

Видання література з крилоділних і технічних наук

Технічний редактор *Т. В. Коштыук*

Редактор *Т. В. Корженко*

Попович М. Г., Коштыук О. В.

- 1158 Теорія автоматизованого керування: Підручник. — 2-ге вид., перероб.
і доп. — К.: Либідь, 2007. — 656 с.
ISBN 978-966-06-0447-6

Виступає основн. теор. діючих і невідомих безперервних і дискретних систем автоматизованого керування, розглянуто значні фактори автоматизації, методи математичного аналізу, дослідження стійкості подійнення якості, корекції та динаміки системи. Висвітлено суцільні теоретичні питання чутливості, керування та спостережуваності, об'єднання автоматичних систем, швидкодії процесів у системах.

Для студентів вищих технічних навчальних закладів.

ББК 32.965я73

Передмова

Дисципліна «Теорія автоматичного керування» є однією з базових у навчальних планах ряду бакалаврських програм підготовки студентів багатьох спеціальностей та спеціалізації у вищих навчальних закладах України. Особливе значення теорія автоматичного керування має для спеціальностей «Електромеханічна система автоматизації та електропривод», підпорядкованої у напрям «Електромеханіка». Для цієї спеціальності теорія автоматичного керування становить теоретичну базу багатьох спеціальних дисциплін: «Теорія електроприводу», «Системи керування електроприводами» та дисциплін з автоматизації технологічних процесів, моделювання електромеханічних систем.

У даному підручнику відображено основні питання теорії автоматичного керування, необхідні спеціалістам з автоматизації виробничих процесів і промислових установок.

Матеріал викладено в такій послідовності: розглядаються загальні принципи побудови систем автоматичного керування і регулювання, типові динамічні ланки та їхні характеристики, математичний опис систем керування (у вигляді диференціального рівняння відповідного порядку, структурної схеми, системні диференціальних рівнянь першого порядку в нормальній формі Коші й у векторно-матричній формі), методи ви виміщон

статичних і динамічних характеристик систем, а також питання стійкості. Особливу увагу приділено аналізу якості систем в ustalених і перехідних режимах та методам її підвищення.

Більшість систем автоматичного керування є нелінійними, але при дослідженні їх зазвичай лінеаризують і застосовують методи лінійної теорії. Системи із суттєвими нелінійностями лінеаризувати не можна. Тому значну увагу приділено також нелінійним системам, особливостям їх динаміки, методам дослідження стійкості, автоколивань та корекції.

Останнім часом все більшого поширення набувають дискретні (а особливо цифрові) системи автоматичного керування. Принципам побудови та дослідженню таких систем присвячено окрему главу, в якій розглядається математичний апарат для дослідження імпульсних систем автоматичного керування, потрібні функції та частотні характеристики, а також питання стійкості й якості. Достатньо уваги приділено цифровим системам автоматичного керування та синтезу цифрових регуляторів.

Теоретичною основою розробки перспективних високоточних автоматичних систем є теорія інваріантності та комбінованого керування, оптимальних і адаптивних систем. Усі ці питання також розглядаються у підручнику.

В інженерній практиці все більше уваги приділяється статистичним методам розрахунку систем автоматичного керування, тому в підручнику розглядаються характеристики випадкових процесів, методи розрахунку точності та синтезу систем автоматичного керування при випадкових входних і збурюючих діях.

У другому переробленому й доповненому виданні книги стисло висвітлено суть ряду нових наукових напрямів: методи фаззи-логіки, нейронних сіток, генетичних алгоритмів. Враховуючи вимоги до інтенсифікації символічної роботи студентів під час вивчення дисципліни, в кожній главі підручника наведено приклади розв'язування різних задач з конкретних електромеханічних систем

математичного керування або їхніх окремих елементів, а також контрольні запитання та завдання.

При написанні підручника автори виходили з того, що студентам знайомі з прямим і зворотним перетворенням Лапласа для безперервних функцій та з матричним численням. Тому у відповідних розділах книги наводяться лише короткі відомості про застосування методів цих розділів у теорії математики. Більш детально ви знайдете математичний апарат для дослідження лінійних і цифрових систем автоматичного керування, зокрема основ дискретного перетворення Лапласа.

Підручник розрахований головним чином на студентів електротехнічного вишу, проте може бути корисним студентам інших спеціальностей, пов'язаних з оптимізацією технологічних процесів та управлінням.

1.1 Основні поняття

Під *автоматизацією* розуміють виконання тих чи інших операцій без участі людини або з обмеженою її участю. У першому випадку процеси називають *автоматизованими*, а в другому — *півавтоматизованими*. Корінь наведених термінів «авто» походить від давньогрецького слова «αυτος», що означає «сам», «самостійний».

Під *автоматизацією* розуміють сферу науки й техніки, яка займається розробкою теоретичних методів і технічних засобів (елементів і систем), що забезпечують розв'язання завдань дослідження, підготовки й експлуатації окремих установок і технологічних комплексів на основі їх автоматизації.

Автоматизований (автоматичний) процес може бути досить простим (наприклад, забезпечення сталого рівня рідини в деяких посудинах) і досить складним (забезпечення потрібного режиму роботи літака за допомогою автопілота).

При автоматизованому (півавтоматичному) режимі роботи установки (механізму, машини), яку в загальному випадку називають *об'єктом автоматизації*, функція людини здебільшого зводиться до вибирання об'єкта або до виконання окремих ручних операцій.

Основні переваги автоматизації полягають у можливостях забезпечити:

- зростання продуктивності та подолання умов праці;
- виконання робіт у важкодоступних чи взагалі недоступних для людини сферах (радіоактивні зони, космос, окремі види металургійного та гірничого виробництва);
- підвищення точності, якості технологічних процесів і відповідних виробів.

- зростання надійності та техніко-економічних показників і загальної культури виробництва та кваліфікації обслуговуючого персоналу.

Автоматизація ефективно застосовується на сучасному етапі розвитку людства для досягнення зростання показників ресурсо- та енергозбереження, покращення екології довкілля, якості та надійності продукції.

Автоматизація виробництва здійснюється з допомогою автоматичних пристроїв, які можна класифікувати за різними ознаками (при цьому під «пристроєм» розуміють закінчену конструкцію, яка може діяти самостійно).

Однією з найпоширеніших є класифікація за функціональним призначенням, згідно з якою виділяють такі автоматичні пристрої: автоматичного контролю та оптимізації, автоматичного захисту, обчислювально-лічильні, блокуючі, автоматичного керування.

Пристрої *автоматичного контролю та оптимізації* забезпечують контроль за перебігом технологічних процесів, етатом прикращень та виконанню сигналізацію. При нормальних умовах процесів використовується оптична сигналізація, а при повній відсутності від цих умов – оптична й акустична сигналізація. Як приклад можна навести автоматичні пристрої контролю тиску газу в магістралях, напруги і навантаження в електромережах.

Пристрої *автоматичного захисту* забезпечують захист об'єктів при появі загрози для об'єктива, продукції або обслуговуючого персоналу. Наприклад, електричний захист (струмовий, за напругою), захист від перевищення швидкості на підіймальних установках, електричний захист від замикань на ґрунт, газовий захист масляних електротрансформаторів тощо.

Струмовий захист буває *максимальний* (захист від різкого перевищення або короткого замикання) і *темповий* (від поступового підвищення температури нагрівання електричних приладів за допустимі межі). Захист за *напругою* полягає у вимкненні електричних установок при зменшенні напруги до 0,65 від номінального значення (мінімальний захист) або повному її зникненні (нульовий захист).

Обчислювально-лічильні пристрої самостійно (без участі людини) виконують складні розрахунки орбіт супутників, ракет, найважливіших технологічних режимів роботи, експрес-аналіз та ін.

Блокуючі пристрої мають призначення не допускати виконання хибних команд (наприклад, команд на виконання «зустрічних» маршрутів на однокільних візках залізничного транспорту).

Пристрої *автоматичного керування* забезпечують бажані зміни в ході процесів. Це – наскладніші з уже поширені пристрої автоматики, теорія роботи яких і становить предмет вивчення курсу «Теорія автоматичного керування».

1.2

Короткі історичні відомості

про розвиток автоматики.

теорії автоматичного керування та кібернетики

Важливою, що автоматика є порівняно молодим напрямком розвитку науки й техніки. Однак відомо, що ідея автоматичні і нескладні автоматичні пристрої використовувалися ще в давні часи в Єгипті, Греції та в інших країнах. Так, жерни Єгипту користувалися різними автоматичними пристроями при спорудженні пірамід і храмів.

Про «залізну людину» феодала Альберта Великого, яка виконувала функції швейцара – відчиняла і зачиняла двері приймальної зали, писано із середніх віків.

Проте автоматичні пристрої того часу ще суттєво не впливали на загальний розвиток людства і його продуктивних сил.

Першим автоматом, який мав помітний вплив на цивілізацію, був годинник. Для підвищення точності ходу годинників було розроблено відповідні регулятори: поплавковий – для водяних годинників і маятниковий (1675 р., голландський фізик і математик Х. Гюйгенс) – для механічних.

Інтенсивний розвиток автоматики почався в XVIII – XIX ст. у зв'язку з промисловим переворотом в Європі, пов'язаним з використанням енергії пари.

Першим промисловим регулятором того часу був поплавковий регулятор, розроблений І. І. Ползуновим для «огнепальної машини» (парового котла), яку він побудував у 1765 р. у м. Березові.

Принципову спрощену схему машини Ползунова з поплавковим регулятором рівня води у паровому котлі К показано на рис. 1.1. При підвищенні втрат пари рівень води H зростає, поплавок P опускається і діє на замкач $З$, збільшуючи надходження води в котел.

При зменшенні витрати пари нахолодження води в котел зменшується. Це давало змогу різко зменшити коливання рівня води в котлі та рівня тиску пари.

На принципі зміни керуваних технологічних параметрів залежно від їх відхилення від бажаного значення в 1784 р. англійський механік Дж. Уатт побудував перший центристичний регулятор швидкості парової машини.

Принцип керування за відхищенням величини від заданого значення, відомий як принцип Ползунова—Уатта, діє як поширення в сучасній техніці.

У 1830 р. Шіллінг у розробленому ним телеграфі запропонував вперше електромагнітне реле, яке дало практичне застосування в різних сферах промисловості.

У 1854 р. російський військовий інженер К. І. Константинов створив перший електромагнітний регулятор швидкості переміщення гарматних башт військово-морських суден, який мав велике зна-

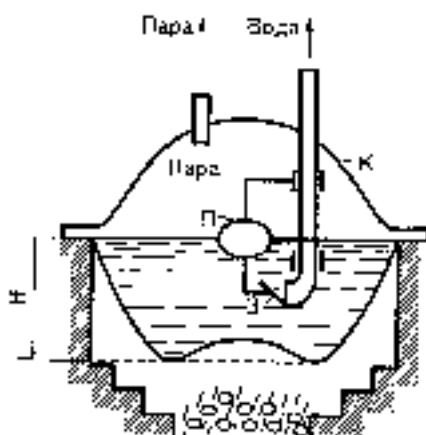


Рис. 1.1

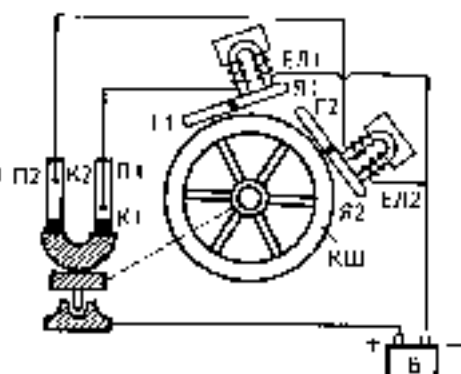


Рис. 1.2

чення для підвищення швидкості й точності морської артилерії (рис. 1.2). Колесо-шків КШ, оснащене з гарматною баштою, при її обертанні приводило в дію систему зв'язаних пусків П1 і П2, заповнених ртутю. При збільшенні швидкості обертання гарматної баш-

ти під дією відцентрової сили рідше замикала контакт К1, що зумовлювало виникнення електричного кола: плюс батареї Б, контакт К1, обмотка електромагніту ЕЛ1, мінус батареї Б.

При цьому якраз Я1, зі'єданий з гальмом Г1, повертався, що спричиняло виникнення гальмівного зусилля на колесі КШ. З підвищенням швидкості замикався контакт К2 і під дією гальма Г2 виникало додаткове гальмівне зусилля.

У 1856—1871 рр. В. М. Чиколса розробив регулятори для дугових ламп, у 1887 р. О. Г. Столстов винайшов фотоелемент, а в 1871 р. математик П. Л. Чебишов у своїй праці про відцентровий регулятор почав теоретичні дослідження автоматичних регуляторів.

Потреба в розвитку теорії автоматичного керування (ТАК), особливо її частини відносно замкнутих систем теорії автоматичного регулювання (ТАР), виникла з появою першої машини-двигуна І. І. Ползунова, а також із винаходом Джеймсом Уаттом відцентрового регулятора швидкості парової машини.

У XIX ст., відомому як «вік пари», відбувалося удосконалення регуляторів парових машин. У кінці століття з'явилися автоматичні регулятори нових технологічних об'єктів — парових і шрапелічних турбін та парових котлів. Виникла потреба регулювання не тільки швидкості, а й тиску, витрат робочого тіла (пари), температури та інших параметрів. У цей період з'являються перші електричні генератори, і з початку XX ст. величезні темпами починає розвиватись електроенергетика. Дещалі більша частина робочих машин і механізмів переводиться на живлення електричною енергією. з'являються нові, потужніші і різноманітніші види електродвигачів, ускладнюються завдання керування ними, актуальнішим стає питання розвитку та використання різних електричних пристроїв і електромеханічних двигунів. З появою електричних генераторів постають завдання регулювання напруги і частоти, які потребують розробки відповідних регуляторів.

Розвиток електриводів і відповідних електромеханічних систем автоматичного регулювання (ЕМ САР) приводить до розробки регуляторів потужності та швидкості, які на початку забезпечували підтримку регульованих параметрів на сталому рівні. З ускладненням технологічних потреб завдання автоматичних систем стають складнішими — зникає потреба забезпечувати автоматичну зливу параметрів за відомими законами (програмне регулювання) або за законами, які формується залежно від умов роботи об'єкта (ідеа-

кувальні електромеханічні системи автоматичного керування – ЕМ САК).

Поширення автоматичних регуляторів зумовило необхідність в їх розробці та експлуатації. Одна з перших праць у цьому напрямі належить математику П. Л. Чебишову, який виняв проблему «ахронного» (астатичного) регулятора. Одним фундатором інженерних методів ТАР вважають професора Санкт-Петербурзького Практичного техніко-механічного інституту І. О. Вишнєградського, який у 1876 р. опублікував працю «Про загальну теорію регуляторів», згодом розвинувши її положення в праці «Про регулятори прямої дії». Розроблені Вишнєградським методи дослідження стійкості і якості динамічних режимів САР парових машин дали змогу впливати на параметрів вплив на характеристики ЕМ САР третього порядку.

Подальший свій розвиток ТАР досягла в працях словаського вченого А. Столова й австрійського математика А. Гурвіца, за результатами яких було розроблено методи, що сприяли дослідженню САР будь-якого порядку.

Приблизно в той самий час питання ТАР почали розвиватись у Англії в працях Дж. Маквелла і Е. Рауса.

Велике значення для розвитку теорії автоматичного керування мали дослідження академіка О. М. Ляпунова, який в 1892 р. у своїй праці «Загальна задача про стійкість руху» закрив основи теорії стійкості нелінійних динамічних систем, а також обґрунтував вихідні положення лінійної теорії автоматичного керування.

Важливою подією було опублікування М. Є. Жуковським у 1909 р. першого російського підручника «Теорія регулювання ходи машин», в якому, крім узагальнення відомих положень, наведено нові дослідження регулятора з сухим тертям, основи теорії переривчастого регулювання.

У XX ст. енергія пари дедалі більше замінювалась електричною енергією, і питанням автоматизації різних електроустановок приділялося все більше уваги. У цей період виникають автоматичні електростанції, автоматизуються окремі промислові ділянки, цехи та підприємства в цілому.

У подальшій розвиток теорії автоматичного керування свій внесок роблять учені різних країн світу.

В 30-ті роки XX ст. з'являються нові частотні методи дослідження, які розроблялися в працях американського вченого Х. Никвіста, російського — А. В. Михайлова та ін.

У 1946 р. Г. Боше та Л. Мак-Кол застосували в практичних діях логарифмічні частотні характеристики. Г. Бразун, А. Хейл, Д. Кемпбелл, Г. Честнад, В. В. Соколовніков та інші вчені розробили зручні для лікверної практики методи та методики дослідження й синтезу систем автоматичного керування на основі частотних характеристик.

Значний внесок у розвиток нелінійної теорії автоматичного керування зробили О. О. Андринов, М. М. Крилок, М. М. Боголюбов, А. І. Лур'є, О. М. Лягов, І. М. Вознесенський, П. С. Гольфарб та ін.

У теорію синтезу нелінійних систем значний внесок зробив радянський вчений В.-М. П'обоп.

Для розвитку теорії інваріантності (незалежності об'єкта від дії збурень) велике значення мали праці Г. В. Шпанова, В. С. Кулебакина, Б. М. Петрова, О. І. Кухтенка та інших вчених.

У 60—80-ті роки теорія автоматичного керування вирішує деякі складніші питання з розробки нових систем, методів їх дослідження та синтезу. Так, у теорії розвитку систем зі змінною структурою вагомий внесок зробили С. В. Ємельяков.

Одним із підомних вчених у галузі основ теорії релейних та імпульсних систем є Я. З. Шинкін.

У розвитку теорії оптимального керування вагомий внесок зробили Л. С. Понтрігін, М. М. Красовський, О. М. Лягов та ін.

Великою подією в розвитку ТАК була поява в 1948 і 1952 рр. праць американського вченого Н. Вінера, які стали основою нового напрямку розвитку ТАК — кібернетики (науки про загальні положення керування зв'язок у різних системах). Вагомий внесок у її розвиток зробили українські вчені В. М. Глушков і О. Г. Івахченко та російські вчені А. І. Берг і А. М. Колмогоров.

На основі методів кібернетики було розроблено автоматизовані людина-машина системи, що дістали назву «Автоматизовані системи керування» (АСК), у тому числі системи керування технологічними процесами (АСК-ТП), в яких широко застосовується електронна обчислювальна техніка.

Термін *кібернетика* походить від давньогрецького слова «кібернетос» (рульовий, який керує рухом). У 1843 р. французький фізик А. Ампер, шкелюючи класифікацію існуючих і можливих у подальшому наукових напрямів розвитку, згрупував назвати науку про загальні закони керування *кібернетикою*.

Нині під *керуванням* розуміють будь-яку дія, що вносить бажані зміни в процес (вдосконалює дія) і ґрунтується на використанні початкової та робочої інформації.

При цьому під *інформацією* розуміють різні відомості, які дають на підставі досвіду в найширшому його розумінні (історичному, технічному, експериментальному та ін.).

Початкова (априорна) інформація — це інформація, яка вже є до початку роботи об'єкта (системи).

Під *системою* в даному разі розуміють деяке взаємозв'язане ціле, що складається з об'єкта (або об'єктів) керування та інших елементів, котрі забезпечують необхідний характер функціонування даного цілого за рахунок підпорядкованості її утвореності його складових.

Робоча інформація — це відомості, які дістають у ході роботи системи.

У першій праці Н. Вінеро (1948 р.) «Кібернетика або керування і зв'язок у живому та машині» кібернетика розглядалась як наука про керування і зв'язок у технічних і біологічних системах. У подальшому Н. Вінер запропонував поширити сферу її впливу на будь-які системи, включаючи й соціальні.

Нині під кібернетикою дедалі частіше розуміють науку про керування і зв'язок в організованих системах, у системах, до складу яких входять живі організми та їх об'єднання (людино-машинні системи). При цьому керування розглядається як процес перетворення та використання інформації. Інформація про об'єкт перетворюється згідно з метою керування в у вигляді сигналів (відповідних команд) подається до об'єкта.

Академік А. М. Колмогоров визначив кібернетику як вчення про способи добування, збереження, перетворення і використання інформації в машинах, живих організмах та їх об'єднаннях.

Крім зазначених вище властивостей кібернетики, її основними особливостями є те, що:

- керування виконується при неповній початковій інформації; наявна початкова інформація не може забезпечити вирішення поставленого завдання в повному обсязі на весь час роботи системи, для його вирішення необхідно дістати та аналізувати робочу інформацію, що надходить, і з її врахуванням формувати відповідні команди керування;
- для антропогенної потрібної команди керування, як правило, вирішується логічне завдання щодо вибору або формування найкращого з даних умов, тобто оптимального, рішення;

- керування може виконуватися в системах з кількома об'єктами (велика система), які часто мають протилежні «інтереси», в умовах випадкового харак. еру змiннi властивостей, збурень (характеристик) системи.

За зміни особливостями кібернетики можна визначати також як науку про оптимальне керування складними динамічними системами (А. І. Берг).

Принципи кібернетики як загальної науки про керування в найрізноманітніших умовах (системах) покладено в основу сучасних термінів і понять теорії автоматичного керування.

У кінці ХХ ст. дістають розвиток кібернетичні системи автоматизації, які ґрунтувались на застосуванні методів «нечітких множин» (фаззи-логіки), що надавало можливість використовувати при рішенні задач керування принципи асоціативного мислення. Розроблені на основі такого підходу регулятори одержали назву *фаззи-регуляторів*, а відповідні системи — *фаззи-системи керування*.

Основні переваги даного виду систем полягають у можливості при великій кількості (множини) різних сигналів на вході регулятора сформулювати вихідну функцію (лінійну чи нечіткіну), яка дає змогу забезпечити необхідну якість керування при достатньо точній, подійній та відносно дешевій дискретно-керованій системі автоматичного керування (САК).

Іншим сучасним напрямом розвитку кібернетичних САК є метод «нейронних сіток», що ґрунтується на побудові системи, яка використовує підходи, подібні процесам, котрі виникають у нейронних сітках мозку людини при обробці інформації.

Використання методу нейронних сіток є ефективним у разі, коли аналітичне вираження відношення між багатьма параметрами системи дуже складне або взагалі неможливе. Побудовані на використанні цього підходу нейроконтролери також, як і в разі фаззи-керування, можуть бути реалізовані за допомогою відповідних програмних пакетів, сучасних засобів обчислювальної техніки.

Теорія автоматичного керування продовжує інтенсивно розвиватись. Її основні напрями пов'язані з настанням оточуваної технологічних процесів, робототехнікою, впровадженням з широким використанням високоточних, швидкозмінюваних цифрових систем із великої ширини використанням обчислювальної техніки та мікропроцесорного керування.

Високий рівень розвитку ТАК значною мірою зумовлений потребою розвитку космонавтики, ракетної техніки, а також потребою автоматизації технологічних процесів.

Серед сучасних напрямків розвитку ТАК — теорія робототехнічних систем, науки виробництва, багатовимірні екстремальні системи, теорія оптимального керування тощо.

1.3

Система автоматичного керування та її елементи

Під системою автоматичного керування розуміють сукупність об'єкта керування (робочої машини, механізму) та зв'язаних послідовним чином елементів, взаємодією яких забезпечується реалізація поставленої задачі керування об'єктом.

Основними елементами САК є об'єкт керування; вимірювальний, або чутливий елемент; керуючий елемент; виконуючі елементи (орган).

Вимірювальний (чутливий) елемент фіксує зміни вхідної (регульованої) величини об'єкта і в багатьох випадках перетворює її на величини іншого роду. В деяких САК чутливий елемент контролює зовнішні збурення, що діють на об'єкт, вони виражаються функцією $f(t)$.

Як чутливі елементи САК часто використовують датчики, що перетворюють неелектричні величини (вінагиість, тиск, зусилля, момент та ін.) на електричні (опір, активний, індуктивний, ємнісний; постійна або змінна напруга, струм, частота, фаза та ін.). Існують датчики активного опору, індуктивні, ємнісні, а також датчики напруги, струму, швидкості, тиску, моменту тощо.

Керуючий елемент дістає інформацію від чутливого елемента і формує потрібний сигнал для виконуючого елемента. Часто він виконує і функції підсилювача. Основними видами підсилювачів є напівпровідникові, електромашинні, магнітні, електронні та йонні. Із неелектричних найпоширеніші гідравлічні та пневматичні підсилювачі.

Як приклад розглянемо формування потрібного сигналу за допомогою електромашинних або магнітних підсилювачів, у яких сигнал

формується зі допомоги обмоток керування. В цьому разі дійсна величина у вигляді напруги (струму) від чутливого елемента надходить до однієї з обмоток керування, яка формує відповідний магнітний потік, пропорційний дійсному значенню регульованої величини x_1 . Друга обмотка (задання) формує зустрічний магнітний потік, пропорційний заданому значенню регульованої величини x_2 .

Як результат взаємної зустрічної шіфкнення обмоток керування формується сигнал розумдження

$$\Delta = x_1 - x_2, \quad (1.1)$$

який після відповідного підсилення надходить до виконуючого елемента системи.

Виконуючий елемент забезпечує потрібний режим роботи керуючих органів об'єкта.

Залежно від технологічних особливостей об'єкта керування виконуючим елементом можуть бути різного роду сервоприводи обертового або поступального руху, що діють на відповідні технологічні регулюючі пристрої – засувки трубопроводів подачі стисненого повітря, пари, води, ручки керування, перемикачі швидкості та ін.

Крім заданих основних елементів, до САК можуть входити й інші, які виконують функції проміжних перетворювачів, підсилювачів тощо.

Якщо всі елементи САК позначити прямокутниками, розмістити їх у послідовності, що відповідає їх взаємодії, а напрям цієї взаємодії вказати стрілками, то отримаємо *функціональну схему* САК. Якщо на функціональній схемі відобразити характеристики (рівняння, криві залежності вихідних параметрів від часу), що визначають динамічні властивості елементів системи, то отримаємо так звану *структурну схему* САК. Елементи відповідних схем позначають *блоками*. Треба мати на увазі, що іноді, для зручності математичного описання динамічних процесів, можна об'єднувати частини деяких фізичних елементів в окрему ланку структурної схеми.

Функціональні (структурні) схеми різних САК можуть відрізнятися одна від одної за багатьма ознаками, які детально розглядатимуться далі.

1.4

Система автоматичного регулювання

Розглянемо роботу машини, яка є об'єктом автоматичного керування. Навантаження її P необхідно підтримувати на однаковому рівні, забезпечуючи рівність його заданому навантаженню P_* :

$$P = P_*.$$

Нехай навантаження об'єкта можна змінити за рахунок відповідного зменшення (або збільшення) швидкості його руху. Якщо поставлене завдання вирішується при ручному керуванні, то машиніст (оператор) повинен виконати такі елементарні операції:

- визначити за допомогою вимірювального приладу дійсне значення навантаження P_1 ;
- обчислити відхилення дійсного значення від заданого та його знак (величину розумової поправки)

$$\Delta P = P_* - P_1.$$

- залежно від значення і знака ΔP подіяти на органі керування швидкості робочої машини в напрямі зменшення ΔP ;
- визначити нове значення P_2 .

Якщо $P_2 \neq P_*$, то цикл керування повторюється.

При вирішенні поставленого завдання за допомогою автоматичного керування окремі операції мають виконуватись окремими елементами системи: вимірювальним (чутливим) — ВЕ, керуваним — КЕ, виконуючим — Вик К.

Поточний стан роботи машини (об'єкт керування) буквою O , а збурення, що діють на неї, — $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$, побудуємо відповідну функціональну схему САК (рис. 1.3, а). На рисунку керування елемент показано у вигляді двох складових: вузла порівняння і підсилювача П.

Три варіанти визначення вузла порівняння, що утворюються в технічній та навчальній літературі, наведено на рис. 1.3, а — в.

Особливістю наведеної схеми САК є замкнута функціональна схема. САК, які мають таку функціональну (структурну) схему, називають *системами поточного регулювання* (САР), або системачи зі зворотним зв'язком. Усі елементи замкненої САК, окрім об'єкта,

об'єднуються єдиним поняттям – *регулятор (Р)*. У зв'язку з цим спрощену функціональну схему САР можна зобразити у вигляді двох елементів – об'єкта з і регулятора (рис. 1.4). Слід підкреслити, що САР є окремим випадком системи автоматичного керування.

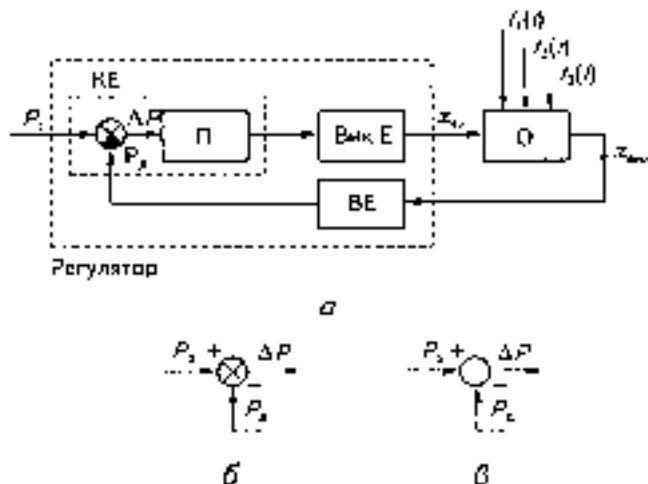


Рис. 1.3

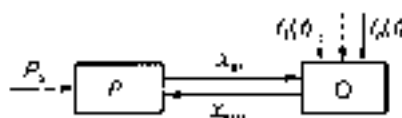


Рис. 1.4

Замикання САР має виконуватися таким чином, аби вихідна величина об'єкта $x_{\text{вых}}$, котра змінюється під впливом збурень $f_1(t), \dots, f_n(t)$, на вході регулятора була перетворена регулятором так, щоб вхідна величина об'єкта x_v діяла на об'єкт у протилежному дії збурень. Данню зворотній зв'язок називають *алгоритм від'ємної зворотньої зв'язки САР*.

1.5

Принципи автоматичного керування, Комбіновані системи автоматичного керування

Головними принципами автоматичного керування є принцип керування за збуреннями (Понселе—Чихолєва) і принцип керування за відхиленнями (Ползунова—Уатта).

Принцип керування за збуреннями іноді називають компенсаційним. Його було запропоновано французом Ж. Понселе і вперше напрокато використано в регуляторах дугових ламп освітлення російським електротехніком В. М. Чихолєвим у другій половині XIX ст.

Суть принципу керування за збуреннями полягає в тому, що за лежно від зміни збурення $f(t)$, контрольованим виконавчим елементом ВЕ, на вхід об'єкта О надходить величина $x_{\text{вх}}$, яка має дія на об'єкт так, щоб зумовити зміну режиму його роботи, що компенсує дію збурення відносно вихідної (регульованої) величини об'єкта.

Особливістю принципу керування за збуреннями є використання розімкнутих (відносно вихідної величини об'єкта) схем керування (рис. 1.5). У цих схемах немає автоматичного контролю вихідної величини об'єкта $x_{\text{вих}}$; команда керування фігурується лише змужно від зміни збурення.

Перевагами керування за збуреннями є відносна простота та надійність САК за наявності одного (головного) збурення, якщо іншими збуреннями можна знехтувати.

До недоліків цього принципу керування слід віднести труднощі контролю збурень у деяких технологічних об'єктах і дешо меншу точність. Ці недоліки особливо помітні, коли на об'єкт діє кілька різноманітних збурень, зрахування яких потребує підвищення складності та зменшення надійності САК, а нехтування ними різко знижує точність системи.

Принцип керування за відхиленнями (дійсного значення вихідної величини об'єкта від його заданого значення) було запропоновано І. І. Ползуновим і вперше реалізовано в 1765 р. в його паровій машині для підтримання сталого рівня води в котлі. В 1784 р. англійсь

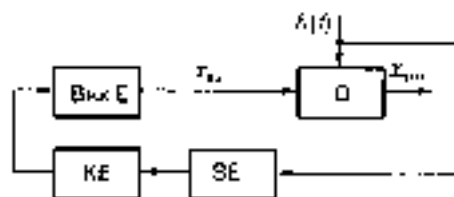


Рис. 1.5

Дж. Уатт вперше використав для стабілізації швидкості обертання парової машини відцентровий регулятор, який також діяв на принципі керування за відхиленням.

Для реалізації принципу керування за відхиленням САК має бути замкнутою. Основною особливістю і перевагою цього принципу є те, що САК реагує на відхилення дійсного значення регульованої величини від заданого незалежно від причин, які зумовили це відхилення. Отже, САК, побудований на даному принципі, прагне до кінцевого результату усіх причин появи відхилення і тому може мати високу точність керування.

САК, побудовані на принципі керування за відхиленням, мають складніші методи розрахунку, дослідження та налаштування. В цілому цей принцип керування використовується при потребі дістати високу точність як в статичних, так і в динамічних режимах.

На практиці використовуються також системи з *комбінованим принципом керування*. Принципову схему комбінованої САК показано на рис. 1.6. Вона має два канали керування

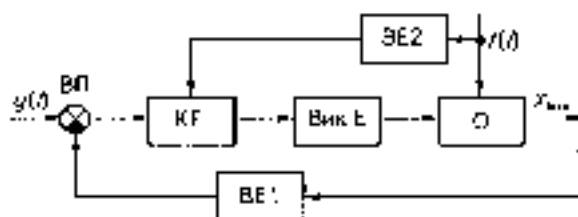


Рис. 1.6

Один діє за принципом керування за збуренням (ВЕ2 — КР — Вих Е — О) і має розімкнутий контур, а інший — за принципом керування за відхиленням вихідної величини x_m від заданого значення $y(t)$ і має замкнутий контур (ВЕ1 — ВЛ — КР — Вих Е — О).

Основною перевагою комбінованого керування є можливість дістати високу точність при кращих динамічних характеристиках, ніж у відповідній САК, побудованій за принципом керування за відхиленням.

1.6

Види систем автоматичного керування

Основні принципи класифікації. САК можна класифікувати за різними ознаками: принципом керування; кількістю регульованих параметрів і контурів; виглядом статичних і динамічних характеристик; структурними особливостями системи тощо.

Одним із поширених принципів класифікації є інформаційний. В його основі лежать особливості здобуття і використання інформації.

Відповідну схему класифікації САК наведено на рис. 1.7. Розглянемо основні особливості окремих САК.

Системи з повною початковою інформацією. Такі системи ще називають *зв'язаними*. Вони мають початкову інформацію, достатню для розв'язання поставленого завдання на період всього часу роботи системи.

Зв'язані системи бувають із розімкнутою і замкнутою структурними схемами (відповідно замкнуті і розімкнуті системи).

Замкнуті САК нагадують також системи зі зворотним зв'язком (або системами автоматичного регулювання). Вони діють за принципом Ползунова–Уатта.

САР бувають трьох видів: стабілізації, програмні і слідкувальні.

Системи стабілізації мають забезпечувати сталие значення вихідній певичини об'єкта

$$x_{\text{вих}} = \text{const}. \quad (1.2)$$

Прикладом таких систем можуть бути САР навантаження, напруги, частоти, швидкості, тиску газу, температури, рівня тощо. Це доводять поширений вид САК

Програмні САР мають забезпечувати зміну регульованої величини за деякою залежністю відомою програмою:

$$x_{\text{вих}} = \text{var} = g(t). \quad (1.3)$$

Слідкувальні САК також мають забезпечувати

$$x_{\text{вих}} = \text{var} = g(t),$$

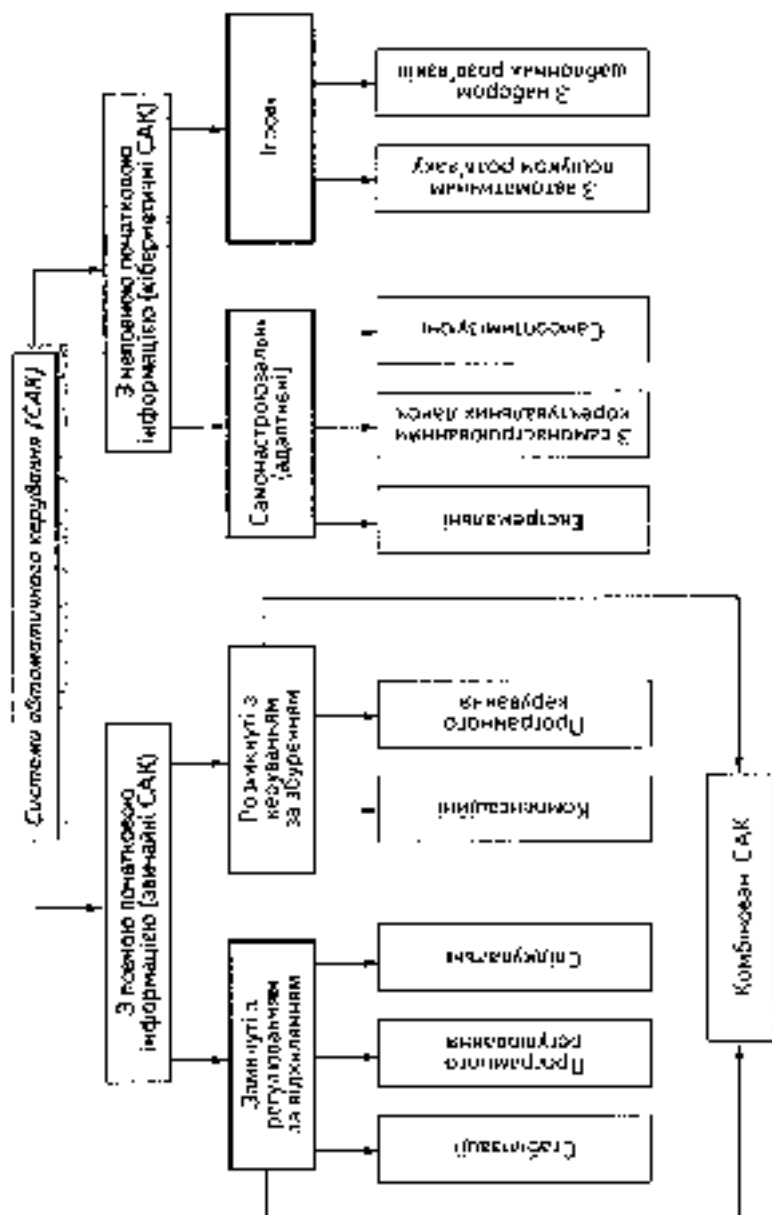


Рис. 1.7

але принципова їх відмінність від програмних САК полягає в тому, що потрібний для виконання закон зміни регульованої величини $g(t)$ заздалегідь не відомий, а формується в ході роботи системи.

Програмні системи широко використовуються у верстатах з програмним керуванням, системах програмного гальмування (наприклад, на шахтиях підйомних машинах) тощо.

Характерним прикладом слідкувальних САК можуть бути різні системи наведення на ціль в ракетних військах, зенітній артилерії. В цьому разі потрібна програма заздалегідь не відома. Вона зумовлюється зміною положення об'єкта стеження (літака або ракети) і з великою точністю і швидкістю повинна відтворюватися системою наведення.

Розімкнуті САК бувають двох видів: компенсаційні і програмного керування. Вони діють за принципом керування за збуренням.

Компенсаційні системи забезпечують формування таких списків керування на вході об'єкта, які компенсують дію на нього відповідного збурення $f(t)$.

Системи програмного керування, на відміну від систем програмного регулювання, мають розімкнуту схему і згідно із заданим заданню програмно забезпечують відповідну зміну режиму роботи об'єкта. При цьому потрібна робоча інформація може існувати у вигляді кулачків, профільних дисків, програм на перфокартках (перфострічках) тощо. В такий спосіб програмується необхідна зміна технологічного процесу. Прикладом можуть бути ліфти і палийомні установки, де кінцеві вимикачі забезпечують необхідні зміни режиму роботи електропривода залежно від положення кабіни ліфта.

Системи з неповною початковою інформацією **Кибернетична система**. Системи з неповною початковою інформацією, або кібернетичні, є такими, які для розв'язання поставлених завдань потребують додаткової інформації, аналіз котрої для змogu сформуваити потрібні команди керування.

Кибернетичні системи існують двох видів: самонастроювані та ігрові.

Самонастроювані системи (СНС). До СНС належать екстремальні системи, системи з самонастроюванням керуючих ланок і самооптимізуєчі.

У загальному випадку команда на керування об'єктом формується як результат взаємодійностей між характеристиками об'єкта, елементів системи збурення. Якщо в процесі роботи об'єкта деякі з характеристик змінюються, це може призвести до небажаної зміни режиму роботи об'єкта (системи) та погіршення якості процесу керування. СНС можуть пристосовуватися (адаптуватися) до змін (системи випадкової) зовнішніх умов, забезпечувати потрібні показники якості керування.

Функціональна схема СНС наведена на рис. 1.8. Основною особливістю СНС є додатковий регулятор ДР, на вході 1-4 якого надходить інформація про зміни збурення (1), тактична (2), значення вихідної величини об'єкта (3), параметри об'єкта (4).

Додатковий регулятор у результаті аналізу надійшлої інформації формує коректуючу дію, яка надходить на вхід основного регулятора ОР і забезпечує самонастроювання (адаптацію) системи. Додатковий регулятор у кібернетичних САК, це, як правило, електронно-обчислювальна машина, яка забезпечує виконання логічних операцій і прийняття найоптимальніших (оптимальних) у даних умовах рішень. Характерним прикладом СНС є автономні на суднових літаках, який залежно від зміни ваги, аеродинамічних характеристик літака, сил і напрямку вітру в істині факторів забезпечує оптимальний режим польоту.

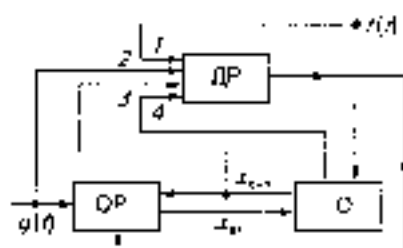


Рис. 1.8

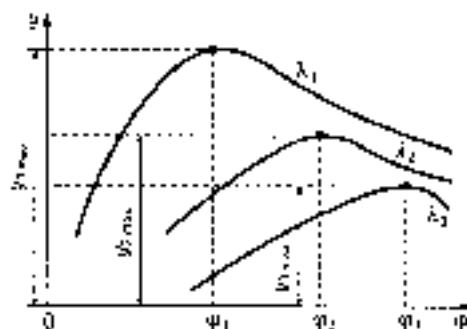


Рис. 1.9

Експреждація СНС На практиці досить часто постає завдання забезпечити керування на екстремальній деякої функції y (рис. 1.9), яка є функцією двох параметрів.

Нехай

$$y = f(\lambda, \varphi), \quad (1.4)$$

де φ — регулюючий параметр; λ — параметр, що характеризує стан об'єкта.

При даному стані об'єкта $\lambda = \lambda_1$ для забезпечення роботи на екстремумі функції y_1 необхідно мати в системі значення регулюючого параметра $\varphi = \varphi_1$. Якщо стан об'єкта змінюється і при цьому $\lambda = \lambda_2$, то для роботи на відповідному екстремумі новій характеристики $y = y_2$ система повинна забезпечити нове значення регулюючого параметра $\varphi = \varphi_2$.

У разі ручного керування при великій швидкості зміни параметра λ потрібно було б увесь час змінювати налаштування системи, забезпечуючи рівність $y = y_{\text{max}}$, що практично неможливо. Тому розв'язання подібних завдань потребує використання особливих екстремальних, самонастроюваних систем, які забезпечують автоматичне налаштування на екстремум відносною функції. Екстремальні СНС використовують для забезпечення максимально можливої продуктивності, мінімального питомого рівня витрат енергії тощо.

Існують два види екстремальних СНС: з автоматичним пошуком екстремуму функції і безпошуком.

Основними методами автоматичного пошуку екстремуму функції є: метод послідовних кроків, метод знаходження похідних, спосіб запам'ятовування екстремуму, метод накладання вимушених коливань на вхід об'єкта.

Метод послідовних кроків (рис. 1.10). У системі встановлюють деяке довільне значення $\varphi = \varphi_1$, після чого фіксують відповідне значення $y = y_1$. Даної приріст $\Delta\varphi$ і вимірюють $y = y_2$. Якщо $y_2 > y_1$, то дають новий приріст величині φ в тому самому напрямі (роблять новий «крок»). Якщо при цьому $y_2 < y_1$, то роблять зворотний крок, оскільки результат свідчить про проходження екстремуму функції. Внаслідок даної методики пошуку екстремуму в системі виникають коливання навколо точки фактичного

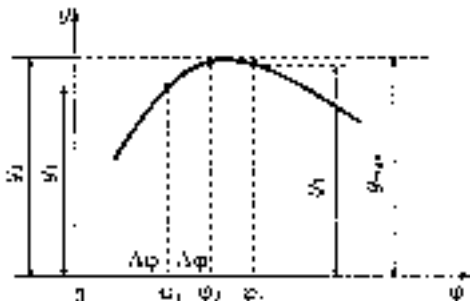


Рис. 1.10

екстремуму $y = y_{\max}$ і забезпечується режим роботи з настроюванням, близьким до максимального значення функції $y_{\max}$.

Метод знаходження похідних. Визначають знак похідної $\frac{dy}{d\varphi}$. Екстремум функції знаходиться в інтервалі

$$0 < \frac{dy}{d\varphi} < 0.$$

Спосіб запам'ятовування екстремуму. В цьому разі система відшукує екстремум функції y і запам'ятовує його, після чого відповідним чином реагує на відхилення функції y від екстремального значення.

Метод накладання вимушених коливань на вхід об'єкта (рис. 1.11). Характеристику об'єкта $y = f(\varphi)$ наведено на рис. 1.11, а. Якщо при роботі в режимі a_0 на зростаючій частині характеристики на вхід об'єкта подати гармонічні коливання (рис. 1.11, в), то на виході об'єкта виникнуть періодичні коливання (рис. 1.11, б; крива 1). Якщо буде пройдено екстремум функції $y = f(\varphi)$ і гармонічні коливання надходять на вхід об'єкта при роботі його в точці A_0 вихідної характеристики, що відповідає «спадній» гілці, то фаза коливань на виході об'єкта зміниться на 180° (рис. 1.11, б; крива 2).

Така зміна фази коливань на виході об'єкта є однакою проходження точки екстремуму. За допомогою фільтрів, що встановлюються на виході об'єкта, можна виділити змінну складову вихідного сигналу і використати її для керування визначеним дингімом настроювання системи.

Задачним поділом розглянутих СНС є наявність пошуківих коливань, а також їх

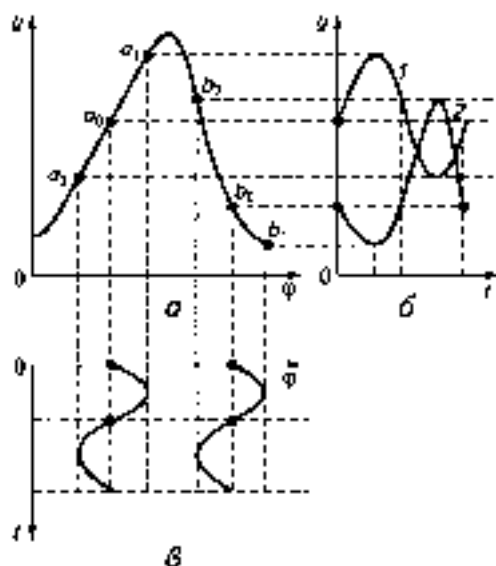


Рис. 1.11

відносно низька перешкодостійкість. На практиці трапляються об'єкти з екстремальними характеристиками, для яких за технологічних умов пошукові координати неприпустимі. Для розв'язання завдань екстремального керування в цьому випадку необхідно використовувати безпосередні СНС.

Як приклад на рис. 1.12 наведено функціональну схему безпосередньої СНС, де ЛО — відповідно лінійна та нелінійна частини об'єкта; М1, М2 — моделі нелінійної частини об'єкта; П1, П2, ПЗ — підсилювачі; ВЕ — виконавчий елемент.

До кожної моделі прикладено окремо збурення λ' і керуючі дії $\pm \Delta x$. На модель також впливають довготривалі керуючі дії $+ \Delta x$ та $- \Delta x$.

Якщо на вхід НО подає керуючий сигнал x_1 , то на першій моделі вихідна величина, що відповідає вхідному сигналу $x_1 + \Delta x$, дорівнюватиме (після підсилення) φ'_1 , а на виході другої моделі — φ'_2 . При цьому характеристики моделей зміщуються вліво і вправо відносно характеристики об'єкта. Вихідні величини моделей подаються на пристрій порівняння ПП.

Після підсилення вихідна величина ПП з урахуванням її знака формує сигнал керування u , який забезпечує різницю

$$\varphi'_1 - \varphi'_2 = 0.$$

Цю рівність можна ліквідувати лише при значеннях x , що відповідають екстремуму характеристики об'єкта.

Отже, за наявності моделей і відповідної системи керування можна забезпечити роботу об'єкта з екстремальним значенням його вихідної величини φ незалежно від значення збурення λ .

СНС із самонастроюванням корективних ланок. Основною особливістю даних систем є те, що перехідний процес самонастроювання в контурі додаткового регулятора ДР (див. рис. 1.3) триваєвший порівняно з процесом у контурі основного регулятора ОР. У зв'язку з цим результат самонастроювання можна використовувати лише на наступних етапах (циклах) роботи об'єкта.

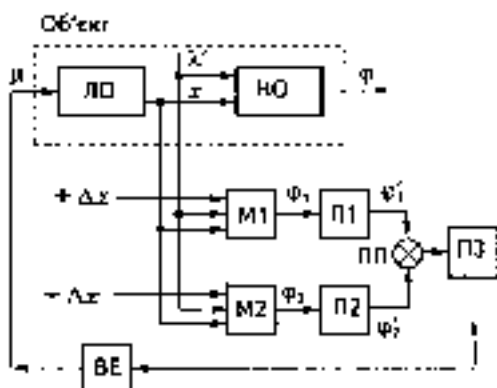


Рис. 1.12

Існують три основні види таких СНС: з екстремальним самонастроюванням, з розікнутим і замкнутим контуром самонастроювання коректувальних даних.

Самонастроюючі СНС. Характерною особливістю таких систем є можливість використання результатів самонастроювання системи в даному циклі її роботи. Це досягається ддяки тому, що тривалість перехідного процесу в контурі доданкового регулятора менша, ніж у контурі основного регулятора.

Ігрові системи автоматичного керування (ІСАК). Ігрові системи мають такі основні особливості:

- процес керування виконується в деякій системі з багатьма взаємозв'язаними об'єктами («велика система»);
- інтереси сторін (об'єктів) є протилежними;
- дії сторін і збурення у системі можуть відбуватися за відомими правилами (алгоритмами), а також мати випадковий характер.

Як класичний приклад припущення побудови і дії ігрових систем, що визначило назву цього виду САК, можна навести карточні гри, які об'єднують кількох гравців (або груп) з різними інтересами. Надходження карт до гравців має випадковий характер, гравці за неповної інформації; кожен гравець хоче виграти.

Команди в ІСАК можуть формуватися за порівнянням багатьох можливих розв'язків (виборів) на окремих етапах — кроках.

Критерієм для порівняння окремих виборів є функція вигоди, яка визначається заздалегідь на основі аналізу керуваної операції в даній системі та допомогою методів теорії дослідження операцій.

Розв'язок, що відповідає найбільшому значенню функції вигоди, називається *оптимальним*. (Тому не мають сенсу досить поширені на практиці вислови «найбільш оптимальний».)

Основним елементом ІСАК є керуюча машина КМ (рис. 1.13), яка має забезпечувати на основі робочої та початкової інформації формування найвигіднішого (оптимального) процесу керування в даних умовах і прийнятих обмеженнях.

Початкова інформація про першу сторону повинна мати необхідні відомості про властивості керуваного процесу і бути достатньою для знаходження виборів і функції вигоди.

Інформація про другу сторону зазвичай мінімальна. Робоча інформація має поточні відомості про стан і дії сторін.

ІСАК бувають двох видів: з набором шаблонних розв'язків; з автоматичним пошуком оптимального розв'язку.



Рис. 1.13

У системі з *набором* можливих розв'язків оптимізація розв'язку для конкретних умов знаходиться заздалегідь і зберігається в пам'яті КМ.

Знаходження *оптимального розв'язку* забезпечується перебором можливих розв'язків і вибором такого, який найбільшійою мірою відповідає конкретним умовам. Особливостями ІСАК даного типу є: відносно тривалий процес знаходження розв'язку; приблизний характер знаходження оптимального розв'язку завдяки тому, що в пам'яті машини зберігається скінченна кількість знайдених раніше розв'язків (при цьому прийнятий за оптимальний розв'язок в окремому випадку може не досить точно відповідати конкретним умовам); необхідність мати велику пам'ять ЕОМ.

Кращими є ІСАК з автоматичним пошуком оптимального розв'язку, які на основі інформації про другу сторону з більшою швидкістю і точністю знаходять оптимальний розв'язок.

На основі принципів ІСАК розроблено автоматизовані системи керування (АСК) найрізноманітнішого призначення: автоматизовані системи керування технологічними процесами (АСК ТП); виробництва (АСК В); промисловими комплексами (АСК ПК) то ітн.

За допомогою ІСАК розв'язуються складні транспортні завдання оптимізації зустрічних перевезень вантажів; завдання пошуку оптимального розміщення електростанцій, окремих виробничих точок.

Розглянемо класифікацію САК за іншими критеріями та їх основними особливостями.

Системи прямої і непрямої дії. В системах *прямої дії* вимірювальний елемент безпосередньо діє на регулюючий орган. Так, на рис. 1.14 показано систему прямої дії регулювання гнанджесі. Ви

мікродільний елемент ВЕ, що контролює швидкість обертів деякого об'єкта O , самостійно діє на керуючий орган, який змінює кількість енергії Q , котрій надходить в об'єкт керування. Якщо швидкість обертання не збільшується, то кулі $K1$ і $K2$ під дією відцентрової сили переміщуються вгору, що приводить до переміщення муфти M та регулюючого органу РО. Завдяки цьому зменшується надходження енергії Q і швидкість обертання об'єкта ω .

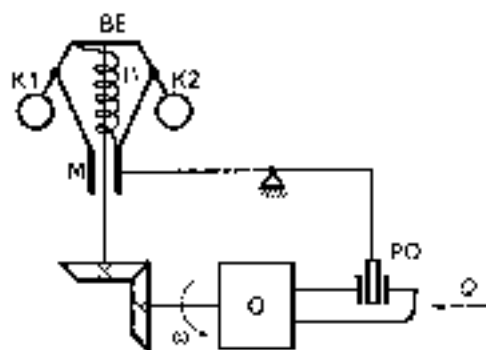


Рис. 1.14

Основною перевагою систем прямої дії є простота і надійність, недоліком — необхідність мати потужний і, внаслідок цього, малочувливий, досить інерційний вимірювальний елемент, який зможе безпосередньо переміщувати керуючий (регулюючий) орган об'єкта. При цьому низькій чутливості вимірювального елемента відповідає низька точність керування, а значна інерційність негативно впливає на динамічні властивості системи.

У системах *непрямої дії* вихідний сигнал вимірювального елемента підсилюється та допомогою підсилювача. САК швидкості об'єкта непрямої дії наведено на рис. 1.15. У цій системі муфта M вимірюва-

льного елемента, який зможе безпосередньо переміщувати керуючий (регулюючий) орган об'єкта. При цьому низькій чутливості вимірювального елемента відповідає низька точність керування, а значна інерційність негативно впливає на динамічні властивості системи.

У системах *непрямої дії* вихідний сигнал вимірювального елемента підсилюється та допомогою підсилювача. САК швидкості об'єкта непрямої дії наведено на рис. 1.15. У цій системі муфта M вимірюва-

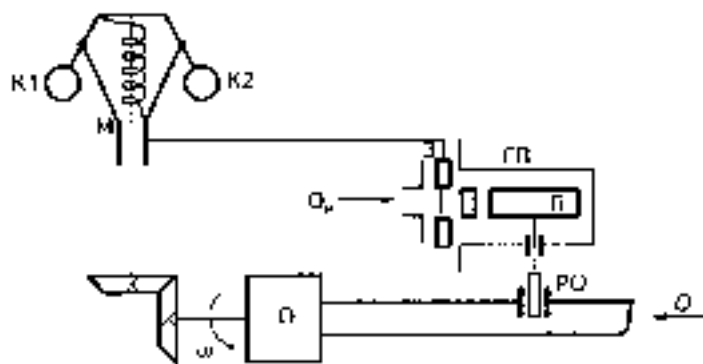


Рис. 1.15

льного елемента дає на золотник 3 гідропідсилювача ГП. Золотник, виходячи з неідеального положення, як показано на рисунку, забезпечує надходження масла Q_1 у верхню порожнину циліндра гідропідсилювача, що веде до відповідного переміщення поршня П, регулюючого органу РО і швидкості ω . Перевагою систем непрямої дії є більша точність і часто кращі динамічні властивості, що зумовнене їх широке застосування на практиці.

Статичні й астатичні САК. Основною із ознак даних систем є вигляд регульованої характеристики, що показує залежність регульованої величини в установившому положенні від витрат робочого середовища.

Статичною САК називають систему, в якій регульована величина при зміні зовнішніх збурень на об'єкті, змінюючись в деяких допустимих межах, після закінчення перехідного процесу залежить від зовнішнього збурення має різні значення.

Регульовані характеристики в загальному випадку має вигляд

$$y = C + \Delta(x) \quad (1.5)$$

де C — середнє значення регульованої величини x ; $\Delta(x)$ — функція збурення, що являєтсь відхилення регульованої величини від її середнього значення в межах зоні регулювання.

Необхідною умовою якісного регулювання $C \gg \Delta(x)$.

Астатичною САК називають систему, в якій регульована величина при зміні зовнішніх збурень після завершення перехідного процесу набуває строго сталого значення при різних величинах зовнішніх збурень.

Як приклад розглянемо астатичну (рис. 1.16, а) і статичну (рис. 1.17, а) САК рівня H деякого робочого середовища (ріднини) Q .

Задаванням і статичної, і астатичної систем є підтримання сталого рівня H (стабілізація) в резервуарі при зміні величини Q .

Якщо при астатичній САК витрати Q збільшаться, то у зв'язку з початковим зменшенням рівня H поплавок П переміститься вниз і, що приведе до відповідного переміщення ползука потенціометра ПП відносно його початкового положення 0. При цьому на якірному колі двигуна Д виникне напруга U відповідної полярності. Завдяки цьому двигун переміститиме регулюючий орган системи РО, забезпечуючи зростання надходження кількості рідини Q і рівня H . Регулюючий орган переміститиметься доти, доки напруга на якірному колі досягне нуля, що можливо тільки при значенні рівня, який за-

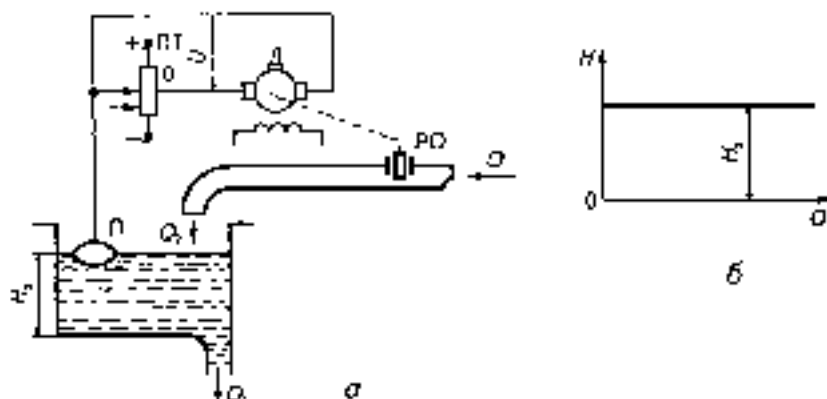


Рис. 1.16

рівнює заданому: $H = H_1$, за умови рівності витрат і надходження рідини $Q_1 = Q_2 = Q$.

Згідно з викладеним лише в астатичній системі можливе лише одне положення рівноваги при значенні регульованої величини $H = H_1$, яка досягається в статичному стані при різних значеннях витрат робочого середовища Q .

Регульовальна характеристика $H = f(Q)$ (рис. 1.16, б) астатичної системи є горизонтальна пряма.

Якщо знехтувати нечутливістю елементів системи, то астатична САР підтримує регульовану величину після завершення перехідного процесу на заданому рівні без будь-яких відхилень.

У статичній САР (рис. 1.17, а) при збільшенні витрат ($Q_1 > Q_2$) рівень H і положок П переміщуються вгору. Завдяки цьому регулюючий орган РО забезпечить збільшення надходження робочого середовища Q_2 .

Нового стану рівноваги буде досягнуто при $Q_1 = Q_2 = Q$ для нового рівня H , меншого за початковий.

Таким чином, статична САР не можуть забезпечувати підтримку регульованої величини на строго сталому рівні. Отже, можливі відхилення регульованої величини від заданого рівня H_1 залежні від витрат робочого середовища. Регульовальна характеристика статичної САР після завершення перехідного процесу (статична характеристика статичної САР) є похилою прямою (рис. 1.17, б).

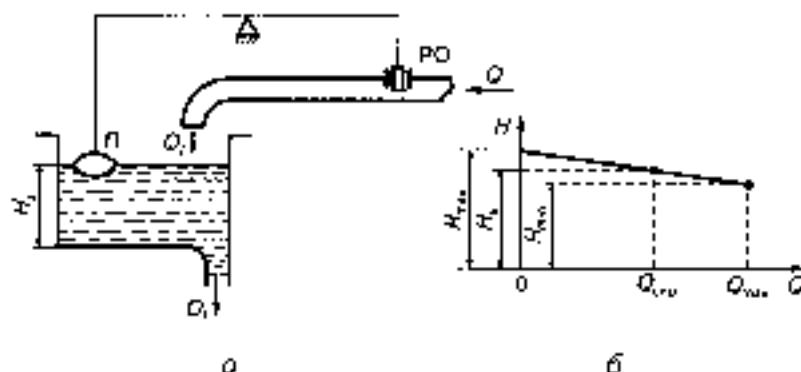


Рис. 1.17

Точність підтримання заданого значення регульованої величини в статичних системах визначається коефіцієнтом нерівномірності або статизмом δ .

У даному разі

$$\delta = \frac{H_{max} - H_{min}}{H_{ст}}. \quad (1.6)$$

Величину статизму іноді визначають як відношення відхилення регульованої величини до її максимального значення:

$$\delta = \frac{H_{max} - H_{min}}{H_{max}}.$$

У відносно грубих САР величина статизму може становити 10...20 %.

В астатичних системах залежно від витрат робочого середовища, після завершення перехідного процесу регулюючий орган також може займати різне положення, але при цьому у тому самому значенні регульованої величини.

Для технічної реалізації цієї особливості в астатичних САР повинні бути так звані астатичні ланки, рухомий елемент яких при відсутності збурення може займати довільне положення. Такою ланкою системи в розглянутому прикладі є двигун постійного струму, якор якого може займати довільне положення при відсутності напруги на якірній обмотці двигуна.

Системи неперервної і перервної дії. Неперервною САР є система, в якій структура всіх зв'язків у процесі роботи не змінюється і величина на виході кожного елемента є неперервною функцією збурення і часу.

В *перервних* САР при роботі система може змінити структуру зв'язків, через що сигнал на виході (елемента, об'єкта) є перервною функцією часу t , а також іхідної величини $x_{\text{вх}}$.

Існує два види перервних систем — релейні та імпульсні.

Релейна (імпульсна) називають систему, в складі якої є хоча б одна релейна (імпульсна) ланка, тобто ланка, яка має релейну (імпульсну) характеристику. Основні види релейних характеристик $x_{\text{вих}} = f(x_{\text{вх}})$ показано на рис. 1.18.

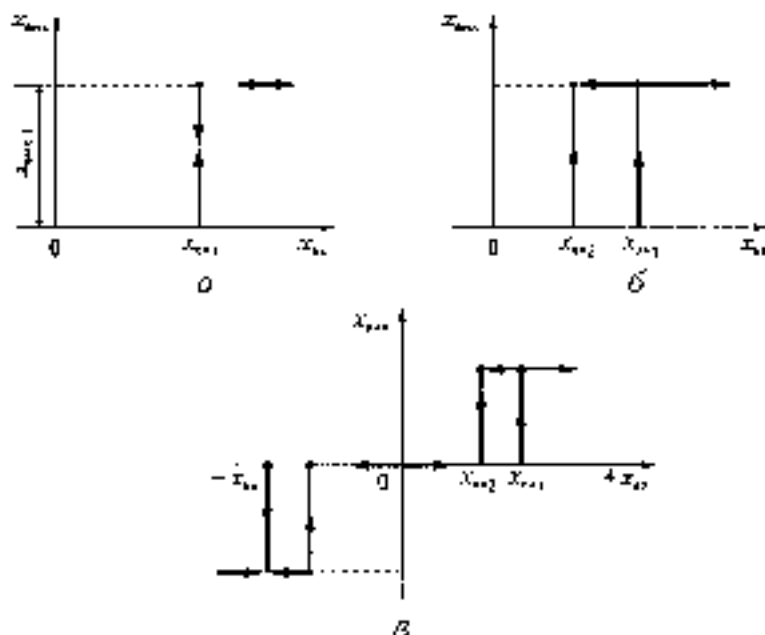


Рис. 1.18

Як видно з рис. 1.18, а, при зростанні іхідної величини до певного значення $x_{\text{вх}} = x_{\text{вх}1}$, вихідна величина стрибкоподібно змінюється до значення $x_{\text{вих}1}$.

При подальшому зростанні $x_{\text{вх}}$, $x_{\text{вих}}$ релейного елемента не змінюється. При зменшенні $x_{\text{вх}}$, коли $x_{\text{вих}} = x_{\text{вх}}$, вихідна величина стрибкоподібно змінюється до початкового рівня.

Значення вхідної величини при її зростанні, що відповідає стрибкоподібній зміні величини на виході ланки, називають *величиною спрацьовування (зростання)* реле, а відповідне значення вхідної величини при її зменшенні — *величиною відпускання (повернення)*. Релейну характеристику, в якій величина спрацьовування $x_{\text{вх}}$ не дорівнює величині відпускання $x_{\text{вих}}$, наведено на рис. 1.18, б.

Відношення $x_{\text{вих}}/x_{\text{вх}}$ називають *коефіцієнтом повернення*. Характеристика реле, які реагують на полярність вхідного сигналу, показано на рис. 1.18, в. Релейні елементи можуть базуватися на різних принципах дій, але в найзагальнішому випадку вони використовуються для фіксації відповідних значень вхідних величин. Функцію подібно призначення їх різні. Використовують їх як пристрої захисту, керування, у вигляді технологічних реле та ін.

Базувана ланка перетворює неперервний вхідний сигнал (рис. 1.19, а) на послідовність короткодійних імпульсів з періодом t_1 .

Існують три види імпульсних ланок (імпульсних характеристик):

- з амплітудно імпульсною модуляцією (АІМ) (рис. 1.19, б), де амплітуда вихідного сигналу пропорційна значенню вхідної величини у відповідний період часу (ширина імпульсу незмінна).

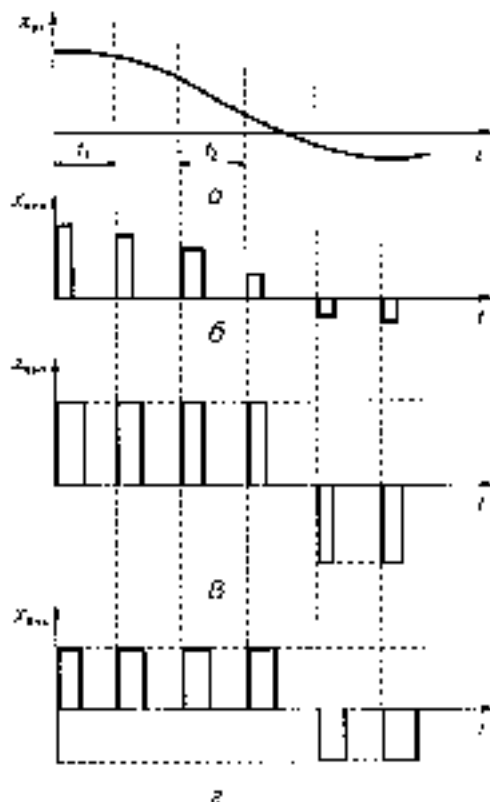


Рис. 1.19

- з широтно-імпульсною модуляцією (ШІМ) (рис. 1.19, в); у даному випадку амплітуда вихідних імпульсів залишається незмінною, а ширина імпульсу пропорційна значенню входної величини на відповідному інтервалі часу;
- з частотно-імпульсною модуляцією (ЧІМ) (рис. 1.19, г); у цьому випадку на виході ланки згідно зі зміною полярності входного сигналу змінюється лише полярність сигналів на виході.

Принципову схему імпульсної САР температури деякого середовища наведено на рис. 1.20. Завдання САР — підтримувати температуру у відповідному середовищі на певному заданому (приблизно сталому) рівні із рахунок зміни кількості охолоджувального повітря Q .

Контроль температури охолоджувального середовища здійснюється за допомогою датчика температури R_t у вигляді термоопору. Датчик R_t використовується як один із плечей вимірювального моста, підключеного до батареї Б. У діючому мості $O1 - O2$ увімкнено вимірювальний пристрій, вихідлення стрілки елемента С пропорційне від-

хилення температури охолоджувального середовища від заданого значення. Стрілка С пристрою періодично (залежно від положення кривошійно-імпульсного механізму КШ, що обертається зі сталою швидкістю ω) від дією навіщою ланки П ламіає якірне коло двинуна М і забезпечує подачу відповідної напруги з потенціометра ПП.

Якщо температура охолоджувального середовища дорівнює заданому значенню, то стрілка С встановлюється проти нульової

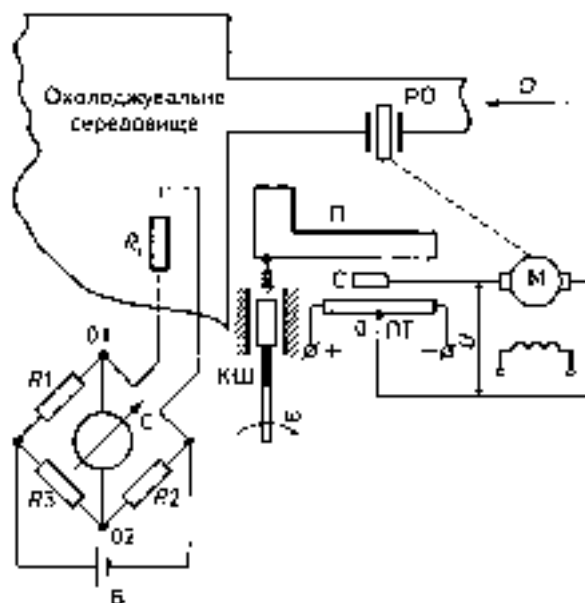


Рис. 1.20

точки потенціометра і в момент навіскання на неї дужкою II напру- га на якірному колі дивгуна M дорівнюватиме нулю. При цьому регу- люючий орган системи РО, а також кількості охолоджувального по- шматку, що надходить, залишатимуться незмінними.

При відхиленні температури середовища від заданого значення рівновага вимірального моста порушиться ($R1 \cdot R2 \neq R3 \cdot R4$) і на його ланцюжці виникне напруга. При цьому стрілка C приладу відхи- литься вліво чи вправо щодо нульової точки потенціометра і на якірному колі дивгуна виникне напруга відповідної полярності. За час контакту стрілки з потенціометром дивгун M повертає регулюю- чий орган на деякий кут, пропорційний відхиленню стрілки C від нейтрального положення, і відповідно змінює кількість охолоджува- льного пошматку Q . Якщо за час тривалості робочого імпульсу темпе- ратура не наблизиться до заданого значення, а стрілка C не візне нейтральне положення, то за час наступного контакту стрілки з по- тенціометром на якір дивгуна M знову буде подано напругу, пропор- ційну пошому (меншому) відхиленню, і дивгун знову поверне регу- люючий орган на деякий кут у потрібному напрямі і змінить вели- чину Q .

У результаті плавки послідовних імпульсних сигналів, які діють на регулювальний орган системи, температура середовища набуде по- трібного значення.

Переваги переривних (імпульсних) систем полягають у періодич- ному характері їхньої дії, що дає змогу зменшити знос елементів сис- теми і збільшити її надійність, підвищити техніко-економічні показ- ники системи керування, використовувати вимірні елементи біль- шої чутливості, збільшити точність системи.

Системи переривної дії в основному використовуються при малій інвартності. В цьому разі їх переваги най- більш суттєві.

Системи одно- і багато- контурні, одно- і багатовимірні, незв'язані й зв'язані. Одноконтурною системою називають систему з одним регулюю- чим органом. При наявності кількох ре- гулюючих органів (РО1, РО2) і відпо- відно кількох контурів дії на об'єкт O систему називають багатоконтурною (рис. 1.21).

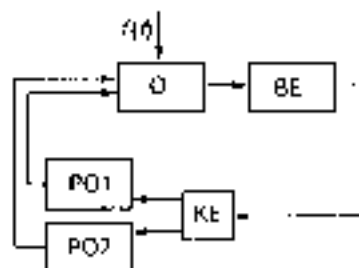


Рис. 1.21

Характерним прикладом багатоконтурних систем можуть бути системи регулювання тиску пари в паровому котлі. У цьому випадку вимірювальний елемент ВЕ контролює тільки один параметр — тиск пари, залежно від якого керуючий елемент КЕ діє на регулюючі елементи підкошення води і енергопосія в котлі.

Одновимірною називають систему з одним регульованим параметром, а *багатовимірною* — кількома одночасно регульованими параметрами, що має відповідну кількість контурів для об'єкта.

Багатовимірну систему регулювання вихідних величин об'єкта x_1 та x_2 показано на рис. 1.22.

У цій системі дві ланки керування функціонують незалежно один від одного; кожній з них керує лише одним параметром. Таку систему називають системою *незв'язаного регулювання*.

У багатьох випадках, зокрема тому, що об'єкт керування є одним і тим самим, зміна одного з параметрів і діє відповідного контура керування може призвести до небажаної зміни інших вихідних параме-

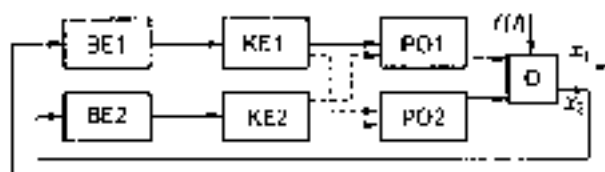


Рис. 1.22

трів об'єкта. Щоб уникнути цього, використовують компенсуючі зв'язки між керуваними елементами і регулюючими органами різних контурів (див. пунктирні лінії на рис. 1.22). Таку систему називають системою *зв'язаного регулювання*.

Прикладами систем зв'язаного регулювання можуть бути САК тиску і температури парових котлів, автопилоти на літаках, де автомат курсу одночасно діє на різні рулі.

Якщо при регулюванні однієї величини інші регульовані параметри об'єкта не змінюються, то таке регулювання має назву *автономного*.

Системи зі змінною та незмінною структурою. Системою зі *змінною структурою* називають таку, в якій у процесі роботи може змінюватись вид, кількість, характеристики ланок і спосіб їх

з'єднання. В протилежному разі система є системою з незмінною структурою.

Функціональну схему системи зі змінною структурою наведено на рис. 1.23. Вимірювальний елемент ВЕ контролює вихідну величину об'єкта О і видає сигнали на перемикаючий пристрій ПП. Залежно від параметрів сигналу перемикач П являє різні керуючі елементи КЕ1 або КЕ2, які діють на регулюючий елемент системи РЕ. При зміні положення П структура системи керування змінюється.

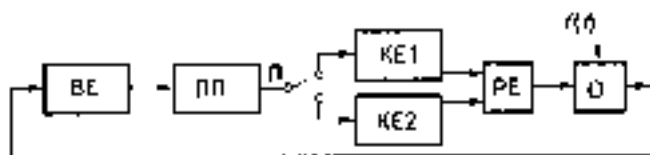


Рис. 1.23

Завдяки зміні складу елементів на окремих етапах роботи виникає можливість одержати такі динамічні характеристики системи, які не можна здобути при роботі системи незмінної структури.

Класифікація САК за енергетичними та технологічними ознаками. За використаною енергією САК поділяють на електромеханічні, гідравлічні, електротехнічні, пневматичні тощо. На практиці найчастіше використовують електромеханічні системи автоматичного керування ЕМ САК.

Існують САК підйомно-транспортні, металобробки, прокатного виробництва та ін.

Електропривод ЕП, який розглядається як система (сукупність) елементів, що складається з електропостачального, перетворювального, перетворювального і керуючого пристроїв, котрі мають забезпечувати перетворення електричної енергії в механічну для приведення в рух виконавчих органів робочих машин або механізмів і керування цим рухом, своїми основними елементами входить до складу ЕМ САК.

Отже, основними функціями ЕМ САК є перетворення електричної енергії в механічну й автоматичне керування об'єктом, що приводиться в дію за допомогою механічної енергії.

Функціональну схему розімкненої електромеханічної системи наведено на рис. 1.24, де позначено: О — об'єкт керування з регулюва-

ною величиною x ; П — передаточний, ЕД — електродвигуновий, ПЕ — перетворювальний, КЕ — керуючий елементи; Φ — споживаний потік електричної енергії, М — потік механічної енергії; З — задання.

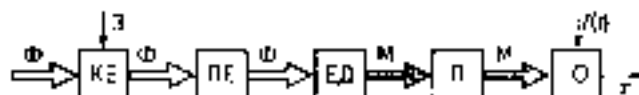


Рис. 1.24

Як передаточний елемент, призначений для передачі механічної енергії шл двигуна до об'єкта, використовують муфти різних видів (механічні, електромагнітні, феромагнітні та ін.). У деяких випадках (безредукторні приводи) механічна енергія від електродвигунового елемента може безпосередньо надходити до об'єкта керування. Безпосереднє перетворення електричної енергії на механічну в ЕМ САК виконується керуваними електродвигунами змінного і постійного струму.

Електротехнічний перетворювач ПЕ перетворює параметри електричної енергії (напругу, частоту) і пласності її. Залежно від використаного виду електродвигуна і способу керування ним електротехнічний перетворювальний елемент може бути представлений: тиристорним перетворювачем у системі електропривода тиристорний перетворювач—двигун постійного струму (ТП—Д), силовим магнітним підсилювачем у системі електропривода магнітний підсилювач—двигун (МП—Д); тиристорним частотним перетворювачем у системі електропривода (ТПЧ—Д) та ін.

Керуючий елемент КЕ призначений для формування сигналу керування згідно із заданням. Як КЕ можна використовувати регулюючі резистори, формувальні імпульсів при імпульсно-фазовому керуванні тиристорами, проміжні магнітні підсилювачі тощо.

Функціональну схему замкнуті ЕМ САК (ЕМ САР) наведено на рис. 1.25. Оскільки перетворення силових потоків енергії та електро-механічні характеристики двигуна детально вивчається в курсах «Теорія електропривода» і «Системи керування електропривода», то основна увага приділятиметься питанням інформації та керування. Тому на рис. 1.25 показано напрям дії тільки сигналів керування.

У схемі є вимірковий елемент ВЕ, що контролює зміну керуваного параметра x . Пропорційна йому величина x_1 надходить до вуз-

да порівняння ВП і порівнюється з величиною задання x_1 . При наявності розумодження $\Delta x = x_1 - x_2$, яке надходить на вхід керуемого

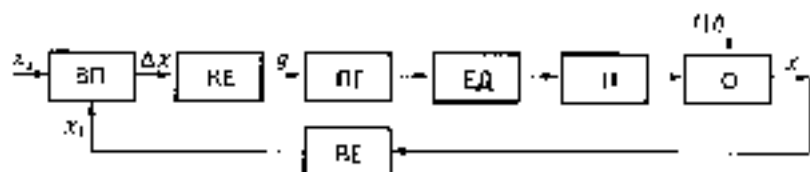


Рис. 1.25

елемента, в системі формується керування для g , що надходить на вхід об'єкта і згідно з дією від'ємного зворотного зв'язку має зменшити (або звести до нуля) величину Δx .

1.7.

Основні загальні відомості про елементи САК та їхні особливості, Класифікація елементів

Властивості САК багато в чому залежать від особливостей елементів, з яких складається відповідна система. Загальне припіднення елементів САК поділяє у якісному і кількісному перетворенні сигналів, які надходять від попереднього елемента (завдяки) системи, і перелачі його до наступного елемента.

За допомогою відповідних елементів виконуються вимірювання, керує, виконання гіл інших функцій в САК. За характером цих функцій елементи поділяються на: датчики (завдяки), підсилювачі, стабілізатори, двигуни, реле, логічні елементи.

Датчики виконують у САК функції вимірювальних (чутливих) елементів. Вони перетворюють неелектричні величини (швидкість, вихід, прискорення, тиск та ін.) у параметри електричного кола (опір, ємність, індуктивність) або електрорушійну силу (ЕРС). Тому датчики є двох видів: параметричні і генераторні.

Індукуючі мають ту особливість, що їхні вхідні і вихідні величини є величинами одного і того самого типу (індукуючі струму,

напруги, потужності). Вихідна потужність елемента зростає за рахунок потужності зовнішнього джерела енергії (часто електричної мережі).

За характером струму підсилювачі поділяються на змінного і постійного струму, а за принципом дії – на електронні, магнітні, електромашинні, тиристорні та ін.

Стабілізатори мають підтримувати вихідну величину на сталому рівні при зміні вхідної величини або навантаження. Особливістю стабілізаторів як елементів систем автоматички є нелінійного характеру вхід–вихід: $x_{\text{вих}} = f(x_{\text{вх}})$. Для стабілізаторів ця характеристика має певний нахил щодо горизонтальної осі. В ідеальному стабілізаторі – це пряма, паралельна осі $x_{\text{вх}}$.

Двигун – елемент, що використовується в системах автоматичного керування як силовий привод об'єкта або допоміжний двигун (сервопривод), що приводить у дію виконувачі органів САК.

В автоматичній основній увазі приділяється серводвигунам невеликої потужності. Вони мають відповідати вимогам: плавності регулювання; малої інерційності; легкості реверсування.

За потужності до 100 Вт найпоширенішими є двофазні двигуни змінного струму з нечасним, легким ротором, а також більших потужностей – двигуни постійного струму з незалежним збудженням.

Реле – це елемент, в якому неперервній, плазній зміні вхідної величини відповідає стрибкоподібна зміна вихідної величини.

Реле розрізняють за багатьма ознаками:

- функціональному призначенню (керування, захисту, сигналізації та ін.);
- технологічним особливостям (швидкості, тиску);
- принципу дії (електромагнітні, індукційні, теплові);
- наявності контактів (контактні, безконтактні).

Логічні елементи призначені для виконання логічних операцій (функцій), наприклад, зигляду «І»; «АБО»; «НІ»; «ПАМ'ЯТЬ».

Основні загальні характеристики елементів. Передаточний коефіцієнт визначається із загальної статичної характеристики $x_{\text{вих}} = f(x_{\text{вх}})$. При цьому вираження

$$\frac{x_{\text{вих}}}{x_{\text{вх}}} = K_x \quad (1.7)$$

називають *передаточним статичним коефіцієнтом*, якщо $x_{\text{вх}}$ і $x_{\text{вих}}$ — усталені значення величин.

Динамічним передаточним коефіцієнтом K_d є похідна

$$K_d = \frac{dx_{\text{вих}}}{dx_{\text{вх}}} \quad (1.8)$$

Для елементів з лінійними характеристиками $K_d = K_x$.

Для датчиків цей коефіцієнт називають *коефіцієнтом чутливості*, а для исполнительів — *коефіцієнтом підсилення*.

Часова характеристика визначається залежністю $x_{\text{вих}} = f(t)$ при надходженні на вхід елемента постійного сигналу. Вона характеризує динамічні властивості елемента.

Елементи з інерцією механічного, електричного, теплового та іншого мають часові характеристики у вигляді експоненти (рис. 1.26). Перехідний процес у них визначається неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язок якого має вигляд

$$x_{\text{вих}} = x_{\text{уст}}(1 - e^{-t/T}), \quad (1.9)$$

де T — стала часу елемента. Її можна знайти при умові $t = T$. Тоді

$$x_{\text{вих}} = x_{\text{уст}}(1 - e^{-1}) = x_{\text{уст}}(1 - 0,37) = x_{\text{уст}} \cdot 0,63.$$

Особливості елементів визначаються також динамічними інерціями і латенцією.

Під *латенцією* розуміють зсув за часом між сигналами на вході (рис. 1.27, а) і на виході елемента (рис. 1.27, б). Кількісно оцінка латенції визначається різницею $\tau = t - t_0$. Прикладами елементів із затримкою можуть бути елементи з люфтами, різні трубопроводи, в яких існує *транспортне затримання*, що визначається часом проходження робочого тіла (води, газу, нафти і т.д.) трубопроводом.

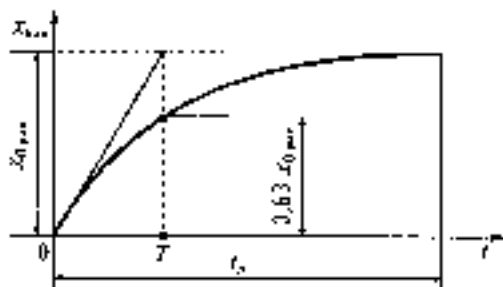


Рис. 1.26

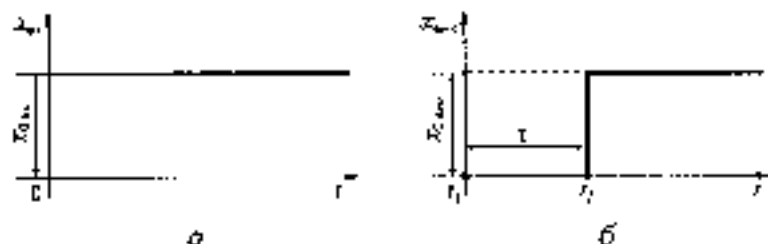


Рис. 1.27

Стату часу T , що є мірою інерційності елементів, іноді називають *інерційним затриманням*.

Під *зоною нечутливості* розуміють діапазон зміни вхідної величини, в межах якого елемент не реагує на неї. Як приклад можна навести реліє і двигуни.

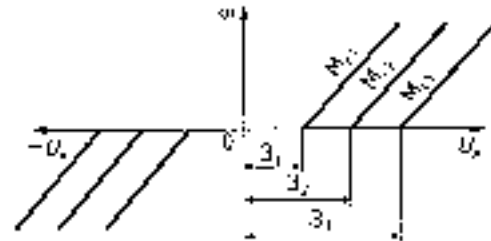


Рис. 1.28

Регулювальні характеристики двигуна постійного струму з зоною нечутливості y_1 , y_2 , y_3 за напруги ікору двигуна U_c наведено на рис. 1.28. Величина зони нечутливості одного і того самого двигуна залежить від статичного моменту M_c (моменту навантаження $M_{c1} < M_{c2} < M_{c3}$).

1.8

Зворотні зв'язки в системах автоматичного регулювання

Як згадувалося раніше, в замкнутих системах автоматичного керування змикання системи, що дає змогу забезпечити надходження на вхід об'єкта сигналу, пропорційного вихідній величині об'єкта, виконується за допомогою *зворотного зв'язку*. Оскільки цей сигнал має подіяти на об'єкт так, аби відхилення вихідної величини об'єкта, яке з'являється внаслідок

ді збурення, зменшилося, то головний зворотний зв'язок має бути від'ємним.

Під зворотним зв'язком розуміють таке виконання зв'язків у системі, при якому на вхід елемента E під'єднують величини x_{in} , пропорційна вихідній величині елемента (рис. 1.29).

Сигнал зворотного зв'язку формується за допомогою пристрою зворотного зв'язку $ЗЗ$. Його дія визначається коефіцієнтом зворотного зв'язку, який визначається відношенням вихідної величини пристрою зворотного зв'язку x_{zz} до вихідної величини елемента x_{out} :

$$\beta = \frac{x_{zz}}{x_{out}}. \quad (1.10)$$

Здебільшого $\beta < 1$, проте можливі випадки, коли $\beta > 1$ (наприклад, «глибокі» зворотні зв'язки в підсилювачах для здобуття релейних режимів).

Розрізняють такі зворотні зв'язки: додатні і від'ємні, жорсткі і гнучкі, товсті і місцеві; за технологічним параметром (швидкості, струму, напруги тощо).

Додатні і від'ємні зв'язки та їх вплив на коефіцієнт передачі ланки. Додатним зворотним зв'язком називають зв'язок, для якого збігається знак з знаком вхідної величини на вхідний елемент.

Якщо рівняння ланки до введення зворотного зв'язку має вигляд

$$x_{out} = Kx_{in}, \quad (1.11)$$

то при наявності зворотного зв'язку фактичне значення вхідної величини обчислюється за формулою

$$x'_{in} = x_{in} + x_{zz} = x_{in} + \beta x_{out}. \quad (1.12)$$

У цьому разі рівняння ланки, охопленої додатним зворотним зв'язком,

$$x_{out} = K(x_{in} + \beta x_{out}),$$

звідки

$$(1 - K\beta)x_{out} = Kx_{in}$$

і коефіцієнт передачі (відхилення) ланки при додатному зворотньому зв'язку

$$K_{\text{пр.}} = \frac{x_{\text{вых}}}{x_{\text{вх}}} = \frac{K}{1 - K\beta}. \quad (1.13)$$

Введення додатного зворотного зв'язку приводить до зростання коефіцієнта передачі (відхилення) ланки, що випливає широко застосовування таких зворотних зв'язків у підсилювачах.

При від'ємному зворотньому зв'язку $x'_{\text{вх}} = x_{\text{вх}} - \beta x_{\text{вых}}$ передаточний коефіцієнт ланки

$$K_{\text{пр.}} = \frac{K}{1 + K\beta} \quad (1.14)$$

зменшуватиметься, що, як показано далі, позитивно впливає на затухання (стабілізацію) перехідних процесів.

Розглянемо процес зі зворотнього зв'язку на конкретному прикладі (рис. 1.30).

Прикладову схему системи стабілізації швидкості «правової» машини показано на рис. 1.30, а. Швидкість контролюється вимірювальним елементом, що є відцентровим регулятором ВР. При зміні швидкості ω кулі К1 і К2 переміщуються вгору або вниз, діючи на пружину ПР і муфту М, яка за допомогою важеля ВА переміщує підпорочний чіпчик золотник З. Золотник викликає шлях надходження масла у верхню або нижню порожнину циліндра гідравлічного сервошлангу СД.

Масло під тиском, який створює компресор (на схемі його не показано), надходить у відповідну порожнину циліндра і зумовлює переміщення поршня циліндра П і регулюючого органу РО. Зміна положення РО спричиняє збільшення (або зменшення) кількості пари, що надходить до парової машини, і відповідну зміну швидкості ω в напрямі стабілізації.

Якщо вважати, що в інтервалі часу $0-t_1$ (рис. 1.30, б) машина працювала з потрібною швидкістю ω_0 , то золотник З перебував у нейтральному положенні. Якщо в момент t_1 при зменшенні навантаження швидкість збільшилася та верну вє причину $\Delta\omega_1$, то кулі К1, К2 переміщуються вгору і через систему муфта—важіль—золотник викликають шлях надходження масла у верхню порожнину циліндра, що приведе до зменшення надходження пари і швидкості ω . При зменшенні швидкості ω , утисаєток великих моментів інерції обертання мас парової машини, для досягнення потрібного значення

штриховою лінією, на золотник 3 діють дві протидіжно напрямлені сили f_1 і f_2 . Тому відхилення золотника в процесі керування буде меншим, ніж за відсутності вказаного зворотного зв'язку. Це дасть змогу при правильному виборі параметрів зворотного зв'язку звести коливання до згасаючих (крива 2), а всю систему зробити роботаздійною.

Функціональна схема такої САК наведена на рис. 1.30, а, де зворотний зв'язок, що охоплює гідравлічний серводвигун, показаний штриховою лінією.

Жорсткі й гнучкі зворотні зв'язки *Жорсткий зворотний зв'язок* — це зв'язок, для якого залежить тільки від відхилення шестигранника на його вхід (підсилення вихідної шестигранної ланки, що охоплюється цим зворотним зв'язком) і не є функцією часу.

Гнучкий зворотний зв'язок — це зв'язок, для якого є функцією часу і проявляється лише в перехідних режимах. У статичних режимах такий зв'язок не діє, тому ці зв'язки іноді називають «зникаючими».

Перевага гнучких зворотних зв'язків полягає в тому, що вони не впливають (не змінюють) на статичний коефіцієнт передачі, завдяки чому, як буде показано далі, підвищують якість САК.

Розглянемо можливість введення гнучкого зворотного зв'язку в системі стабілізації швидкості (див. рис. 1.30, а). Для розв'язання цього завдання в розтині елемента *ВС* треба внести ізодромний пристрій 1 (рис. 1.31) у вигляді циліндра ЦІ, заповненого маслом. Усередині циліндра міститься порішень ПІ, механічно зв'язаний із золотником і пружиною ПР, що виконує допоміжну функцію.

Отже, зв'язок між порішнем ПІ серводвигуна СД, жорстко зв'язаного з регулюючим органом системи РО, і циліндром виконується

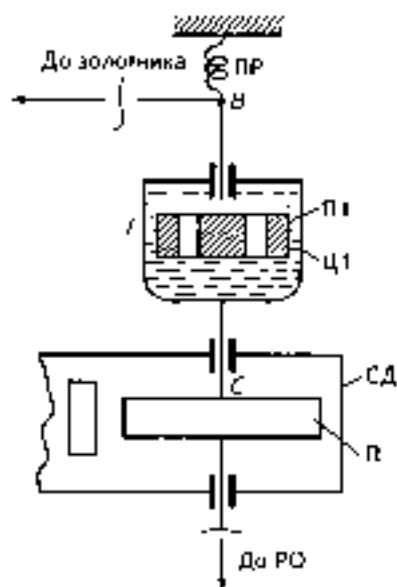


Рис. 1.31

за рахунок взаємодії масляного середовища і поршня П і ізольованого пристрою і діє тільки у разі переміщення останнього поршня. Величина сил зчеплення між маслом і поршнем П, яка зумовлює дію зворотного зв'язку, залежить від швидкості руху основного поршня dx/dt , а також прискорення d^2x/dt^2 і є функцією часу.

За допомогою головного від'ємного зворотного зв'язку забезпечується можливість реалізації принципу керування за відхиленням.

У найбільш спрощеному вигляді функціональну схему САК, як зазначалося раніше, можна представити у вигляді сукупності двох елементів: об'єкта керування О і регулятора Р. Тому сам регулятор логічною ланкою об'єкта керування, що забезпечує зв'язок між виходом і входом об'єкта, в деяких випадках можна умовно розглядати як пристрій, подібний до зв'язки зворотного зв'язку.

Контрольні запитання та завдання

1. Чим відрізняється автоматизований процес від автоматичного і які переваги автоматизації?
2. Назвіть види автоматичних пристроїв, їхні функції й особливості.
3. Назвіть основні особливості кібернетики як науки про керування.
4. Перелічіть елементи електромеханічної системи автоматичного керування і назвіть їхні функції.
5. Чим відрізняються принципи керування за відхиленням і за збуренням?
6. Що таке зворотний зв'язок, його види й особливості?
7. Перелічіть види систем автоматичного керування згідно з інформаційним принципом класифікації і назвіть їхні особливості.
8. Назвіть основні види й особливості кібернетичних систем автоматичного керування.
9. Зобразіть функціональні схеми систем автоматичного керування (САК) прямої і зворотної дії.
10. Зобразіть функціональну схему електромеханічної САК і позначте в ній елементи, які належать до електропривода.
11. Що є спільного і різного в поняттях «електромеханічна система автоматичного керування», «електропривод», «регулятор»?
12. Наведіть основні характеристики елементів САК.
13. Які переваги мають гнучкі зворотні зв'язки?
14. Зобразіть функціональну схему комбінованої САК.
15. Вкажіть на головні особливості систем автоматичного керування з змінною структурою.
16. Зобразіть функціональну схему багатоконтурної системи автоматичного керування.

17. У чому полягають особливості оптимальних САК?
18. Які види інформації виділяють у кібернетичних системах?
19. У чому полягають особливості САК зі змінною структурою?
20. Сформулюйте головні особливості кібернетичних САК різних видів.
21. Які функції має некерований електропривод в ЕМС?
22. Вкажіть роль керованого електропривода в ЕМ САК.
23. Чи входить об'єкт керування ЕМ САК до складу електропривода?

2.1

Теорія автоматичного керування і регулювання

Теорія автоматичного керування в широкому розумінні цього слова є теорія побудови і функціонування систем автоматичного керування.

Знаючи розрізняються раніше систематичні класифікації САК можна розділити на дві характерні групи, які відрізняються одна від одної як за принципом керування, так і за особливостями функціонування — *розподільні САК*, що базуються на принципі керування за збуренням, і *замкнуті САК*, які діють на основі принципу керування за відхиленням. Останні в цьому випадку називаються системами автоматичного регулювання (САР).

Теорію керування замкнутими системами називають теорією автоматичного регулювання (ТАР), і вона є частиною загальної теорії автоматичного керування (ТАК).

Основна увага при вивченні ТАК приділятиметься теорії більш складних і поширених замкнутих систем автоматичного регулювання.

Кожна САР є неконсервативною системою, запас енергії якої змінюється за рахунок витрат і надходжень через окремі її елементи (підсилювачі, перетворювачі, об'єкти тощо).

При відхиленні від стану рівноваги в регуляторі надходження і витрати енергії через дію збурень у системі виникає відхилення регульованої величини від заданого значення. Регулятор починає працювати і зменшує (в ідеальному випадку до нуля) відхилення регульованої величини від заданого значення, через що в системі автоматичного регулювання виникає перехідний процес. Основним завданням ТАР є оцінка поведінки САР у перехідних режимах. При

тому необхідно встановити, чи будуть перехідні процеси затухаючими, а системи стійкими і які характеристики матиме САР.

Поведінка систем автоматичного регулювання в перехідних процесах визначається в розділі *динаміки* САР, основними завданнями якої є визначення стійкості та якості САР.

Проте для визначення роботоздатності САР недостатньо того, щоб САР була стійкою і мала достатні показники якості в перехідних процесах (тривалість перехідного процесу, його характер тощо).

Важливим є дослідження поведінки САР у стані рівноваги, що розкладається в розділі *статистики* САР. У статисті САР вивчається питання статистичної точності — відхилення регульованої величини від заданого значення після закінчення перехідного процесу, а також статистичні характеристики систем.

Основні особливості ТАР такі.

1. Поведінку САР у перехідних режимах не можна оцінювати за характеристиками окремо взятих ланок, які утворюють дану систему. Можливі випадки, коли САР, побудована на основі ланок зі стійкими характеристиками, може бути нестійкою.

Тому дослідження динамічних властивостей САР має виконуватися не за характеристиками окремо взятих ланок, а з урахуванням їхньої взаємодії в загальній, замкнутій системі.

2. Вимоги до САР з позицій статистики і динаміки протилежні, тому для їх задоволення потрібно досліджувати питання динаміки і статистики в тісному взаємозв'язку, приймаючи в разі необхідності компромісні рішення.

Наприклад, підвищення точності системи після закінчення перехідного процесу потребує збільшення так званого коефіцієнта передачі розімкнутої системи. Включає зростання цього коефіцієнта негативно впливає на динамічні характеристики САР. При досить великих його значеннях система може стати взагалі нероботоздатною. Тому цей коефіцієнт треба вибирати так, аби задовольнити суперечливі вимоги статистики і динаміки на основі компромісного рішення.

3. Різні за своїми фізичними властивостями елементи і системи часто мають подібні диференціальні рівняння динаміки, що свідчить про схожість їхніх динамічних властивостей і характеристик. Тому ТАР є загальною наукою, складною для найрізноманітніших за своїми фізичними властивостями САР.

Отже, ТАР можна визначити як науку, що вивчає статистичні та динамічні властивості САР, принципи побудови структурних схем, методи вибору параметрів на основі вимог якості системи.

2.2

Статика систем автоматичного регулювання.

Умови статичної рівноваги

і статичні характеристики ланок

Основним завданням статистики як розділу ТАК є визначення САР у статичному стані, тобто вибітків після завершення перехідних процесів, зумовлених постійними збуреннями.

Для перебування системи в стані рівноваги мають одночасно виконуватися такі умови.

1. Відхилення регульованої величини від заданого значення має дорівнювати нулю або деякій сталій величині.

2. Надходження регульованої величини Q_1 має дорівнювати її витраті Q_2 :

$$Q_1 = Q_2 = Q \quad (2.1)$$

3. Положення регулюючого органу системи і виконавчого двигуна має бути перухомим.

4. Положення керуючого елемента (значення його вихідної величини) має відповідати перухомому стану виконавчого двигуна.

Основною характеристикою статистики САР є *регульована характеристика*, яка показує залежність регульованої величини x від витрат робочого середовища Q :

$$x = f(Q), \quad (2.2)$$

а основною характеристикою статистики окремої ланки системи є характеристика вхід—вихід:

$$x_{\text{вих}} = f(x_{\text{вх}}). \quad (2.3)$$

Важливим показником ланки є статичний коефіцієнт передачі:

$$K = \frac{x_{\text{вих}}}{x_{\text{вх}}}. \quad (2.4)$$

Залежно від того, яким чином підтримується сталою регульована величина в САР після закінчення перехідного процесу, її позивають статистично визначати два основні види САР: *статичні* й *астистичні*, які було досить детально розглянуто при класифікації САР.

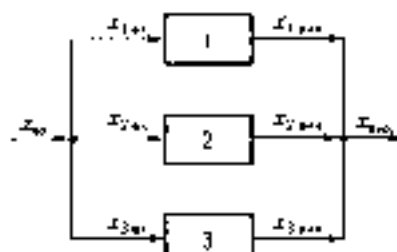


Рис. 2.1

При дослідженні питань статистики дуже часто виникає потреба побудови результуючої статистичної характеристики САР за відповідними характеристиками окремих ланок при різних способах їх з'єднання.

Результуюча статистична характеристика паралельно з'єднаних ланок Паралельним з'єднанням ланок у ТАР є таке з'єднання, при якому вхідна величина всіх ланок однакова, а результуюча вихідна величина є сумою вихідних величин цих ланок.

Для трьох ланок, згідно з рис. 2.1, можна записати

$$x_{вих} = x_{1вих} + x_{2вих} + x_{3вих}; \quad (2.5)$$

$$x_{вих} = x_{1вих} + x_{2вих} + x_{3вих}. \quad (2.6)$$

Якщо статистичні характеристики окремих ланок задані у вигляді графіків, показаних на рис. 2.2, а, б, в, то кожну точку результуючої характеристики легко побудувати як суму ординат трьох характеристик $a + b + c$, що відносяться до одного значення вхідної величини (рис. 2.2, г).

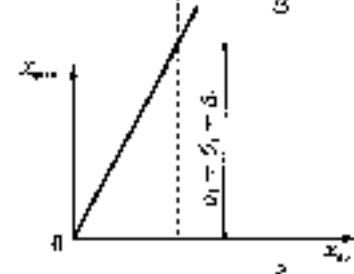
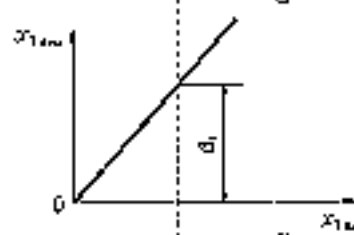
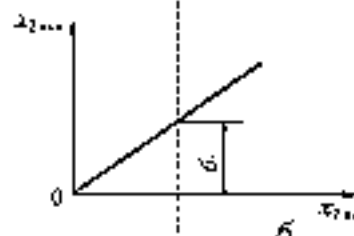
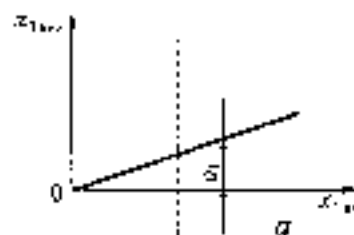


Рис. 2.2

Результуюча статистична характеристика послідовно з'єднаних ланок Послідовне з'єднання ланок — це таке з'єднання,

чення $x_{2\text{max}}$ переносять на перпендикулярну вісь четвертого квадранта, в якому і записують залежність $x_{2\text{max}} = f(x_{1\text{max}})$. Відповідні графічні характеристики показано на рис. 2.4, а.

При побудові результуючої характеристики для трьох ланок з урахуванням того, що $x_{1\text{max}} = x_{\text{max}}$, характеристику третьої ланки розміщують відповідним чином у третьому квадранті, а результуючу — у четвертому (рис. 2.4, б).

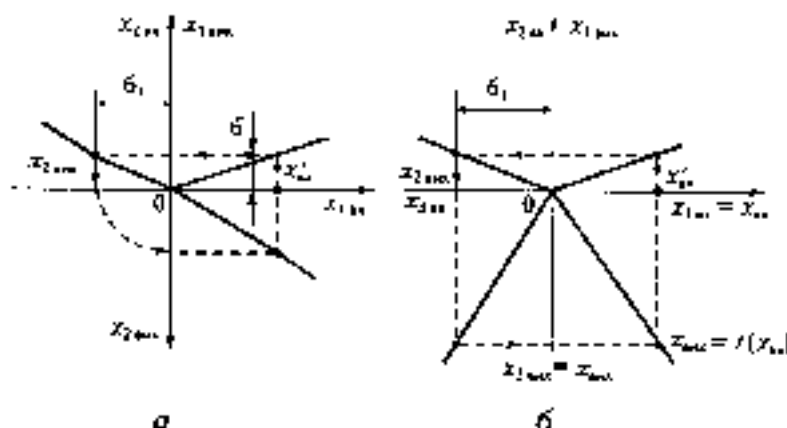


Рис. 2.4

При послідовному дослідженні бачим як трьох ланок зі вказаною вище методикою можна побудувати результуючу характеристику для трьох ланок, а далі розглядати її як окрему характеристику і будувати загальну результуючу характеристику з урахуванням інших ланок. У результаті дістанемо результуючу графічну характеристику вигляду

$$x_{2\text{max}} = f(x_{1\text{max}})$$

Характеристика ланки зі зворотним зв'язком. Для ланки зі зворотним зв'язком (рис. 2.5) фактичне значення вихідної величини можна записати у вигляді

$$x'_{\text{max}} = x_{\text{max}} \pm x_{\text{min}}$$

Для пояснення дії зворотного зв'язку на рис. 2.6 наведено характеристику ланки без урахування зворотного зв'язку (крива 1) і характеристику самого зворотного зв'язку (крива 2).

Якщо вріхувати, що на вхід ланки без зворотного зв'язку надходить відлічена $x_{1,0}$, то на виході цієї ланки отримаємо $x_{1,0,0}$. Якщо цю величину, згідно з рис. 2.5, подати на вхід ланки зворотного зв'язку, то на її виході одержимо величину $x_{0,0}$, яка при підключенні ланки зворотного зв'язку або подиватиметься до вхідної величини основної ланки (при додатному зворотному зв'язку), або віднімаватиметься від неї (при від'ємному зворотному зв'язку). Якщо зворотний зв'язок додатний, то, щоб дістати на виході ланки ту саму величину, що і без зворотного зв'язку, на вхід можна подати меншу величину $x_{0,0} = x_{1,0} - x_{0,0}$. У цьому випадку маємо точку *A* характеристики ланки з додатним зворотним зв'язком (крива 4).

При від'ємному зворотному зв'язку за тих самих умов на вхід ланки слід подати більшу величину $x_{0,0} = x_{1,0} + x_{0,0}$, що дасть відповідну точку *B* характеристики ланки з від'ємним зворотним зв'язком (крива 3).



Рис. 2.5

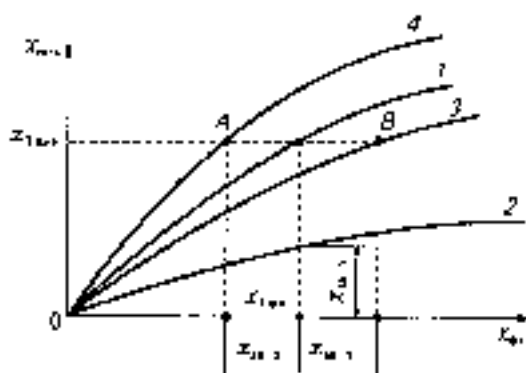


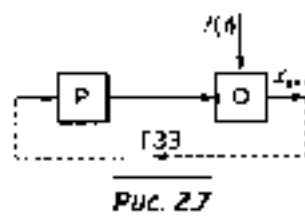
Рис. 2.6

2.3

Статична похибка

і коефіцієнт передачі (підсилення)

Статична похибка — це відхилення регульованої величини від заданого значення після закінчення перехідного процесу. Вона є одним із основних показників якості САР.



Вважатимемо, що головний зворотного зв'язку ГЗЗ в системі немає (САК розімкнута; рис. 2.7). Тоді при початковому значенні збурення $f_1(t)$ вихідна величина об'єкта $x_{1, \text{мн}}$ відповідатиме потрібному значенню регульованої величини. Зміна збурення до значення $f_2(t)$ призведе до зміни вихідної величини об'єкта до значення $x_{2, \text{мн}}$ і похи

білки при розімкненому стані системи

$$\Delta x = x_{2, \text{мн}} - x_{1, \text{мн}} \quad (2.10)$$

Якщо замкнути систему за допомогою головного зворотного зв'язку, то в замкнутій системі регулятор P діятиме на зменшення відхилення Δx (в ідеальному випадку до нуля). Проте регулятор не в змозі повністю ліквідувати Δx , а зменшуватиме його на деяку величину, яку позначимо $\Delta x_{\text{ст}}$. Частину Δx , яка залишається в замкнутій системі, є статичною похибкою замкненої системи:

$$\Delta = \Delta x - \Delta x_{\text{ст}} \quad (2.11)$$

Величина Δ находить знову на вхід об'єкта, тому можна записати

$$\Delta = \Delta x_{\text{ст}} \quad (2.12)$$

Розділивши кожен член рівняння (2.11) на величину Δ і врахувавши вираз (2.12), лістанемо

$$1 = \frac{\Delta x}{\Delta} - \frac{\Delta x_{\text{ст}}}{\Delta x_{\text{ст}}}$$

Оскільки $\Delta x_{\text{ст}} / \Delta x_{\text{ст}} = K$ — коефіцієнт передачі (підсилення) розімкнутої системи, то статичну похибку замкненої системи запишемо у вигляді

$$\Delta = \frac{\Delta x}{1 + K} \quad (2.13)$$

З цієї формули можна зробити такі висновки.

1. Статична похибка замкненої системи прямо пропорційна відхиленню регульованої величини при розімкненому стані системи і зменшується в разі збільшення коефіцієнта підсилення розімкнутої системи.

2. Оскільки величина Δx при розімкнутій системі є функцією збурення, що діє на об'єкт, то статична похибка замкненої системи залежить від збурення.

3. Як буде показано далі при дослідженнях САР, зростання коефіцієнта передачі розімкнутої системи погіршує динамічні властивості (зменшує так званий запас стійкості системи). Тому бажання зменшити похибку замкнутої системи за рахунок зростання коефіцієнта передачі може призвести до втрати стійкості САР. Це відображає суперечність між вимогами статички та динаміки і веде до необхідності компромісного узгодження вимог статичної точності та стійкості САР.

Неможливість задоволення вимог статички і динаміки при деякій прийнятій САР спричиняє необхідність зміни її структури.

Статична похибка САК при комбінованому керуванні

При комбінованому керуванні функціональна схема має дві частини. Одна з них — це замкнутий контур об'єкта (О) та регулятор (Р), який забезпечує регулювання за відхиленням, а інша — розімкнутий (компенсаційний) канал К, котрий формує компенсаційний сигнал на об'єкті керування (рис. 2.8). За допомогою компенсаційного сигналу в комбінованій системі реалізується також принцип керування за збуренням.

Якщо розімкнути замкнутий контур на виході об'єкта, то відхилення вихідної величини об'єкта при дії компенсаційного каналу обчислюється за формулою

$$\Delta x_{\text{ком}}^{\Delta} = x_{\text{н.ком}} - x_{\text{і.ком}} + x_{\text{к}}, \quad (2.14)$$

де $x_{\text{н.ком}}$ — початкове значення регулюваної величини, що дорівнює заданому; $x_{\text{і.ком}}$ — нове значення вихідної величини об'єкта, яке відповідає зміні збурення; $x_{\text{к}}$ — компенсаційна дія розімкнутого каналу.

Відхилення $\Delta x_{\text{ком}}^{\Delta}$ буде значно меншим від відхилення при відсутності компенсаційного каналу $\Delta x_{\text{ком}}^{\Delta} < \Delta x_{\text{ком}}^{\Delta}$. Тому статична похибка комбінованої САК

$$\Delta^{\Delta} = \frac{\Delta x_{\text{ком}}^{\Delta}}{1 + K} \quad (2.15)$$

буде менша за похибку замкнутої САР

$$\Delta^{\Delta} < \Delta = \frac{\Delta x_{\text{ком}}^{\Delta}}{1 + K}$$

Із формули (2.15) можна також зробити важливий висновок, що одну й ту саму похибку (точність), як і в системі регулювання за відхиленням, в комбінованій САК можна досягти при меншому значенні коефіцієнта передачі розімкнутої системи K . Це може мати важливе значення в разі необхідності задовольнити умови стійкості САР або збільшення запасу стійкості системи без зменшення її статичної точності.

2.4

Форми запису рівнянь статики

Існує три форми запису рівнянь статики: в абсолютних величинах, відхиленнях і відносних величинах.

Запис рівнянь статики в абсолютних величинах. Якщо залежність $x_{\text{вих}} = f(x_{\text{вх}})$ задано графічно (рис. 2.9), де по осях відкладено абсолютні величини, то відповідну аналітичну залежність можна записати у вигляді

$$x_{\text{вих}} = a + Kx_{\text{вх}}, \quad (2.16)$$

де a — початкове значення вихідної величини; K — коефіцієнт, що характеризує нахил характеристики.

Форма запису рівнянь статики у відхиленнях. Нехай початкові значення вхідної і вихідної величин $x_{\text{вх}0}$ і $x_{\text{вих}0}$. Якщо вони зміняться і набудуть значень $x_{\text{вх}}$ і $x_{\text{вих}}$, то з урахуванням відхилень $\Delta x_{\text{вх}}$ і $\Delta x_{\text{вих}}$ можна записати

$$x_{\text{вих}} = x_{\text{вих}0} + \Delta x_{\text{вих}},$$

$$x_{\text{вх}} = x_{\text{вх}0} + \Delta x_{\text{вх}}.$$

Підставляючи знайдені вирази $x_{\text{вх}}$ і $x_{\text{вих}}$ в рівняння (2.16), дістанемо

$$x_{\text{вих}0} + \Delta x_{\text{вих}} = a + K(x_{\text{вх}0} + \Delta x_{\text{вх}}).$$

Виключаючи рівняння початкової рівноваги $x_{\text{вих}0} = a + Kx_{\text{вх}0}$, одержуємо рівняння статики у відхиленнях у вигляді

$$\Delta x_{\text{вих}} = K \Delta x_{\text{вх}}. \quad (2.17)$$

2.5. Динаміка систем автоматичного регулювання. Завдання й особливості загальної методики дослідження

Форма запису рівнянь статика у відносних (безрозмірних) величинах. Введемо базові значення вхідної $x_{\text{вх}}$ і вихідної $x_{\text{вих}}$ величин (за базові значення можна прийняти будь-які величини, але здебільшого такі номінальні значення).

Визначимо

$$\frac{\Delta x_{\text{вих}}}{x_{\text{бвих}}} = \varphi; \quad \frac{\Delta x_{\text{вх}}}{x_{\text{бвх}}} = \mu,$$

звідки дістанемо відхилення:

$$\Delta x_{\text{вх}} = \mu x_{\text{бвх}}; \quad \Delta x_{\text{вих}} = \varphi x_{\text{бвих}}.$$

Підставивши знайдені значення відхилень у рівняння (2.17), дістанемо

$$x_{\text{бвих}} \varphi = K \mu x_{\text{бвх}}$$

Враховуючи, що $x_{\text{бвих}} = K x_{\text{бвх}}$, дістанемо рівняння статика у відносних величинах:

$$\varphi = \mu. \quad (2.18)$$

Сенс якого полягає в тому, що в статичні відносне значення вихідної величини чисельно дорівнює відносному значенню вхідної величини.

2.5

Динаміка систем автоматичного регулювання. Завдання й особливості загальної методики дослідження

Динаміка САР як розділ ТАК вивчає перехідні процеси в різних системах — лінійних і нелінійних. Враховуючи принципові особливості лінійних і нелінійних САР, ці системи розглядатимемо окремо.

Динамічні властивості лінійної САР у найзагальнішому випадку можуть бути детально вивчені на основі диференціального рівняння, яке називають *рівнянням замкнутої САР*.

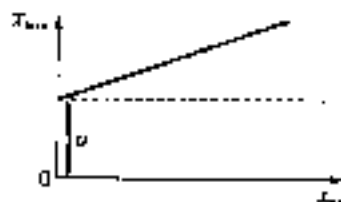


Рис. 2.9

Рівняння замкнутої САР дістають на основі рівнянь ланок, з яких складається ланка системи. При складанні рівняння замкнутої САР виходять з вірогідності принципу *детектування*, згідно з яким у САР існує направленість дії ланок — від попередньої до наступної. При цьому реакцією наступної ланки на попередню нехтують. Тому рівняння динаміки ланки, вжитої окремо, буде таким самим, як і цієї ланки в деякій САР (необхідно лише узгодити вхідні і вихідні величини ланок).

На практиці направленість дії ланок у САР забезпечується наявністю в системі *детектувальних ланок*, які можуть передавати енергію лише в одному напрямі. Прикладами можуть бути різноманітні відділювачі та сервоімпульси.

Методика знаходження рівнянь САР. При складанні рівняння динаміки дотримуються такої послідовності.

1. Детально вивчають суть фізичних ланок у САР, знаходять (або розробляють) методи їх математичного описання. При цьому насамперед встановлюють узгоджені координати системи, під якими розуміють незалежні одна від одної змінні, необхідні достатні для повного описання системи. Кількість незалежних змінних визначає кількість ступенів свободи даної системи.

2. Визначають ланки САР і складають її функціональну схему.

3. Встановлюють початок відліку відхилень узгоджених координат і напрям їх зміни. Як правило, до початку відліку приймають стан рівноваги системи.

4. При складанні рівнянь динаміки ланок і системи в цілому враховують вплив усіх діючих факторів.

5. Якщо рівняння системи буде дуже складним, то на практиці часто його спрощують.

Основними шляхами спрощення рівняння САР є:

✓ нехтування деякими факторами, що мало впливають на поведінку і якість системи (наприклад, іноді змінні параметри ланок коефіцієнти рівнянь — можуть прийматись сталими, якщо час суттєвої зміни параметра в кілька десятків разів перевищує тривалість перехідного процесу, а також, якщо коефіцієнти при вищих степенях похідної набагато менші від коефіцієнтів при похідних першого степеня; в цьому разі можна зменшити порядок рівняння системи);

✓ зміна нелінійних залежностей лінійними — здійснення *процедури лінеаризації*.

При спрощенні рівняння динаміки САР необхідно в кожному конкретному випадкові відповісти на питання, чи це спрощення можливе, виходячи із технологічних особливостей об'єкта (процесу).

Після спрощення рівняння і його лінеаризації дістають рівняння, яке називають *рівнянням першого наближення*. Воно дає змогу в ряді випадків відповісти на деякі важливі питання побудови конкретної системи (спочатку вибору початкового варіанта структури, впливу зміни параметрів, встановлення наладок у проектуванні і настрочуванні системи та ін.).

2.6

Лінеаризація нелінійних рівнянь. Приклади

Існує два основні методи лінеаризації — графоаналітичний (лінійно-кускова апроксимація) і аналітичний.

Графоаналітичний метод лінеаризації. Цей метод базується на заміні окремих крилолінійних частин характеристик відрізками прямої і формуванню відповідних аналітичних залежностей.

- **Приклад 2.1.** Характеристику *ОВ* генератора постійного струму показано на рис. 2.10. Потрібно лінеаризувати дану характеристику і знайти відповідний вираз лінеаризованих частин характеристики.

Розв'язання. Характеристику *ОВ* замінимо відповідними відрізками *ОА* і *АВ*. Запишемо рівняння характеристик *ОА*:

$$U_1 = K_1 I_1, \quad K_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{100}{2} = 50;$$

$$U_1 = 50 I_1,$$

для відрізка *АВ*

$$K_2 = \frac{\Delta U_1}{\Delta I_1} = \frac{150 - 100}{5 - 2} = \frac{50}{3} \approx 16,7;$$

$$U_1 = 16,7 I_1.$$

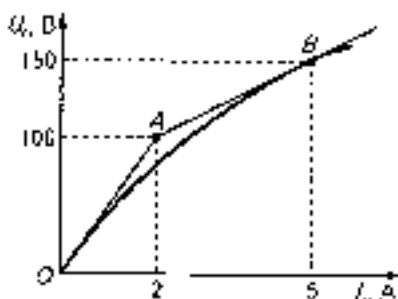


Рис. 2.10

- **Приклад 2.2.** Лінеаризувати роботу частину механічної характеристики двигуна

(рис. 2.11) з параметрами: зомпівційний момент $10 \text{ Н} \cdot \text{м}$, номінальне ковзання $x_n = 0,05$; кількість пар полюсів $p = 3$.

Розв'язання Продовжимо роботу частини механічної характеристики до перетину її з горизонтальною віссю в точці M . Номінальне значення моменту двигуна $M_n = ON = CN$. З трикутника CKN знайде-



Рис. 2.11

мо значення $CN = s_n \cdot \frac{1}{\Gamma p \cdot \alpha} = n_0$, де n_0 — номінальне значення швидкості,

що відзначає точку K механічної характеристики двигуна; B — деяка стала величина, що характеризує кут нахилу робочої частини характеристики

Обчислимо синхротрону швидкість асинхронного двигуна

$$n_0 = \frac{60f}{p} = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1000 \text{ об/хв},$$

де f — частота, Гц

номінальну швидкість

$$n_n = n_0(1 - s_1) = 1000(1 - 0,05) = 950 \text{ об/хв}.$$

Номінальне значення моменту $M_n = A - Bn_n$, або $10 = A - B \cdot 950$.

Запишемо рівняння холостого ходу двигуна:

$$0 = A - Bn_0,$$

$$\text{звідки } A = B \cdot 1000, \text{ або } B = \frac{10}{1000 - 950} = 0,2, A = 0,2 \cdot 1000 = 200$$

Лінійзоване рівняння робочої частини механічної характеристики

$$M = 200 - 0,2n,$$

Аналітичний метод лінеаризації. Найбільш поширеним є розклад нелінійної функції в ряд Лорана навколо деякої точки характеристики. На практиці застосовуються ряди Паде, Фур'є та ін.

Найчастіше використовується ряд Тейлора, згідно з яким нелінійну функцію $f(z)$ можна записати у вигляді нескінченного ряду

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots \quad (2.19)$$

де $f(a)$ — початкове значення функції; $f'(a), \dots, f^{(n)}(a)$ — похідні відповідного порядку; $z-a$ — відхилення змінної відносно її початкового значення в точці a .

Згідно з *гіпотезою мала відхилення Винаградського*, яка стверджує, що в процесі регулювання відхилення регульованої величини відносно її початкового значення незначне, відхиленням змінної $(z-a)$ в другому, третьому і вищих степенях можна знехтувати. Тому в ТАК вираз (2.19) спрощується і формула лінеаризації набуває вигляду

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a). \quad (2.20)$$

- **Приклад 2.3.** Лінеаризувати тягову характеристику соленоїдної електромагніту, тягове зусилля $F_{\text{тя}}$, якого можна виразити пропорційним квадрату напруги в електричній мережі

Розв'язання. Малею

$$F_{\text{тя}} = c_{\text{тя}} u^2, \quad (2.21)$$

де $c_{\text{тя}}$ — стала тягового електромагніту, яка залежить від його конструктивних особливостей; $u_0, F_{\text{тя}0}$ — початкові значення напруги і сили тяги; $\Delta u, \Delta F_{\text{тя}}$ — відхилення відповідних величин.

Вираз (2.21) можна записати у вигляді

$$F_{\text{тя}} = \Delta F_{\text{тя}} = c_{\text{тя}}(u_0 + \Delta u)^2 \quad (2.22)$$

Розкладемо нелінійну функцію $f(z) = (u_0 + \Delta u)^2$ в ряд Тейлора згідно з (2.20). При цьому її початкові значення такі:

$$f(a) = u_0^2;$$

$$f'(z) = 2u_0 \Delta u.$$

Підставляючи знайдений вираз у праву частину рівняння (2.22), одержимо

$$F_{\text{г.в.}} + \Delta F_{\text{г.в.}} = c_{\text{г.в.}} u_{\text{г.в.}}^2 + c_{\text{г.в.}} 2\alpha_{\text{г.в.}}$$

Виключаючи різницяння початкової змінної $F_{\text{г.в.}} = c_{\text{г.в.}} u_{\text{г.в.}}^2$, дістаємо лінеаризоване рівняння тягової характеристики електромашини у відхиленнях

$$\Delta F_{\text{г.в.}} - c_{\text{г.в.}} 2\alpha_{\text{г.в.}} \Delta u = K_{\text{г.в.}} \Delta u, \quad (2.23)$$

де $K_{\text{г.в.}} = 2c_{\text{г.в.}}\alpha_{\text{г.в.}}$ — переданий (передаточний) коефіцієнт електромашини.

Аналогічно можна лінеаризувати рівняння моменту асинхронного двигуна, для якого рушійний момент приблизно пропорційний квадрату напруги мережі. Згідно з цим можна записати лінеаризоване рівняння у відхиленнях

$$\Delta M_{\text{дв.}} = K_{\text{дв.}} \Delta u. \quad (2.24)$$

2.7

Форми запису рівнянь динаміки

Приклади складання рівнянь ланок

Рівняння динаміки ланок і САК можуть бути складені так, як і рівняння статки в абсолютних величинах, відхиленнях і відносних величинах.

При складанні рівнянь динаміки також широко використовують операторну форму запису диференціальних рівнянь, згідно з якою вводяться символи похідних і інтегралів, що виражаються як допомогою оператора p . Запишемо похідні в операторній формі

$$\frac{d}{dt} = p; \quad \frac{d^2}{dt^2} = p^2; \quad \frac{d^n}{dt^n} = p^n.$$

Тоді

$$\frac{dx}{dt} = p x, \quad \dots, \quad \frac{d^n x}{dt^n} = p^n x.$$

Запишемо інтеграли в операторній формі

$$\int dt = \frac{1}{p}, \quad \int x dt = \frac{1}{p} x, \quad \int dx \int x dt = \frac{1}{p^2} x \text{ т. д.}$$

При операторній формі запису оператор p розглядається як деяка величина, на яку можуть поширюватись усі алгебраїчні дії.

Правомірність відокремлення функцій від знака оператора можна показати на основі відомих положень математики.

Наприклад, на основі того, що похідна суми деяких величин x , y , z є сумою цих похідних

$$\frac{d}{dt}(x + y + z) = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt},$$

в операторній формі можна записати

$$px + py + pz = p(x + y + z).$$

Множення або ділення обох частин деякого рівняння на оператор p можливе, оскільки можливе почленне диференціювання або інтегрування обох сторін рівностей. Так, $\frac{dx}{dt} = px$, а інтеграл похідної

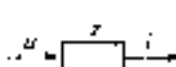
$\int \frac{dx}{dt} = x$ при операторній формі запису має вигляд

$$\frac{1}{p} px = x.$$

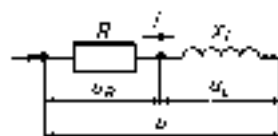
Приклади складення рівнянь динаміки при використанні різних форм запису Як приклад розглянемо добре відомий елемент активно-індуктивний електричний опір z (рис. 2.12, а). Вхідною величиною є напруга u , вихідною — струм i .

На практиці такими елементами є обмотки збудження електричних машин постійного струму, котушки електромагнітів, елементи соленоїдних електроприводів тощо.

У даному разі необхідно встановити в динамічній залежності вхід — вихід $i = f(u)$, використовуючи відома положення фізики (електротехніки). Згідно з теорією електричних кіл скінчаленню схеми елемента (ланки) z можна представити у вигляді двох послідовно з'єднаних електричних опорів — активного R і індуктивного x_L (рис. 2.12, б).



а



б

Рис. 2.12

Миттєві значення спаду напруги на активному и індуктивному опорах відповідно позначимо u_R і u_L . При послідовному з'єднанні опорів їх сума спадів напруги дорівнює миттєвому значенню напруги мережі:

$$u = u_R + u_L.$$

Оскільки $u_R = iR$, а $u_L = -e_L = L \frac{di}{dt}$ (де e_L — ЕРС самоіндукції, а L — коефіцієнт самоіндукції), то

$$u = iR + L \frac{di}{dt}.$$

Розділивши ліну і праду частини знайденої рівності на R і перенісши вихідні величини в ліну частину рівняння, дістанемо рівняння динаміки ланки активно-індуктивного опору в абсолютних величинах у вигляді

$$T \frac{di}{dt} + i = k u, \quad (2.25)$$

де $T = \frac{L}{R}$ — стала часу, $k = \frac{1}{R}$ — передаточний коефіцієнт ланки.

В операторній формі запису це рівняння матиме вигляд

$$(Tp + 1)i = k u. \quad (2.26)$$

Для складання *рівняння у відхиленнях* введемо початкові значення U_0 , I_0 і відповідні відхилення Δu та Δi .

Підставляючи значення $u = U_0 + \Delta u$; $i = I_0 + \Delta i$ у рівняння (2.25), дістанемо

$$T \frac{d(I_0 + \Delta i)}{dt} + I_0 + \Delta i = k(U_0 + \Delta u).$$

Виключаючи з цієї рівності рівняння початкової рівноваги ($U_0 = I_0 R$), матимемо

$$T \frac{d\Delta i}{dt} + \Delta i = k \Delta u. \quad (2.27)$$

в операторній формі запису

$$(Tp + 1)\Delta i = k \Delta u. \quad (2.28)$$

Для складання рівняння у відносних величинах введемо як базові номінальні значення струму I_n і напруги U_n , позначивши

$$\varphi = \frac{\Delta i}{I_n}, \quad \mu = \frac{\Delta u}{U_n}.$$

Підставляючи в рівняння (2.27) і (2.28) значення $\Delta u = \mu U_n$, $\Delta i = \varphi I_n$, запишемо рівняння динаміки у відносних величинах у вигляді

$$T \frac{d\varphi}{dt} + \varphi = \mu, \quad (2.29)$$

в операторній формі запишемо

$$(Tp + 1)\varphi = \mu. \quad (2.30)$$

2.8

Коефіцієнт самовирівнювання та його вплив на характер перехідних процесів

Рівняння багатьох об'єктів автоматичного керування в загальному випадку можна записати у вигляді

$$T \frac{dx_{out}}{dt} + x_{out} = kx_{in}. \quad (2.31)$$

Розв'язок цього рівняння

$$x_{out} = kx_{in}(1 - e^{-t/T}). \quad (2.32)$$

Розділивши ліву і праву частини рівняння (2.31) на передаточний коефіцієнт k і позначивши $T/k = T_s$, а $1/k = k_s$, дістанемо рівняння у вигляді, запропонованому професором Стожолом

$$T_s \frac{dx_{out}}{dt} + k_s x_{out} = x_{in}. \quad (2.33)$$

Підставивши в розв'язок (2.32) значення $k = 1/k_s$, $T = T_s k = T_s/k_s$, дістанемо

$$x_{out} = \frac{x_{in}}{k_s} (1 - e^{-\frac{t}{T_s}}), \quad (2.34)$$

де k_s – коефіцієнт самовирівнювання.

Проаналізуємо вираз (2.34) відносно коефіцієнта k_c . При $k_c > 0$ і $t \rightarrow \infty$ $x_{\text{min}} \rightarrow x_{\text{ст}}/k_c$; залежність $x_{\text{min}} = f(t)$ є експонентною (рис. 2.13, а).

Якщо $k_c < 0$ і $t \rightarrow \infty$, то $x_{\text{min}} \rightarrow \infty$ (рис. 2.13, б).

При $k_c = 0$ рівняння динаміки матиме вигляд $T_a \frac{dx_{\text{min}}}{dt} = x_{\text{ст}}$, $x_{\text{min}} = \frac{1}{T_a} \int x_{\text{ст}} dt$. Якщо $x_{\text{ст}} = \text{const}$, то $x_{\text{min}} = (x_{\text{ст}}/T_a)t$. У даному разі при $t \rightarrow \infty$ $x_{\text{min}} \rightarrow \infty$ (рис. 2.13, в).

Отже:

- при $k_c > 0$ об'єкти мають стійкий перехідний процес і в принципі можуть працювати без регулятора (електродвигуни та ін.);
- об'єкти з $k_c < 0$ і $k_c = 0$ мають нестійкі перехідні процеси, не можуть працювати без регулятора (парові машини, асинхрон-

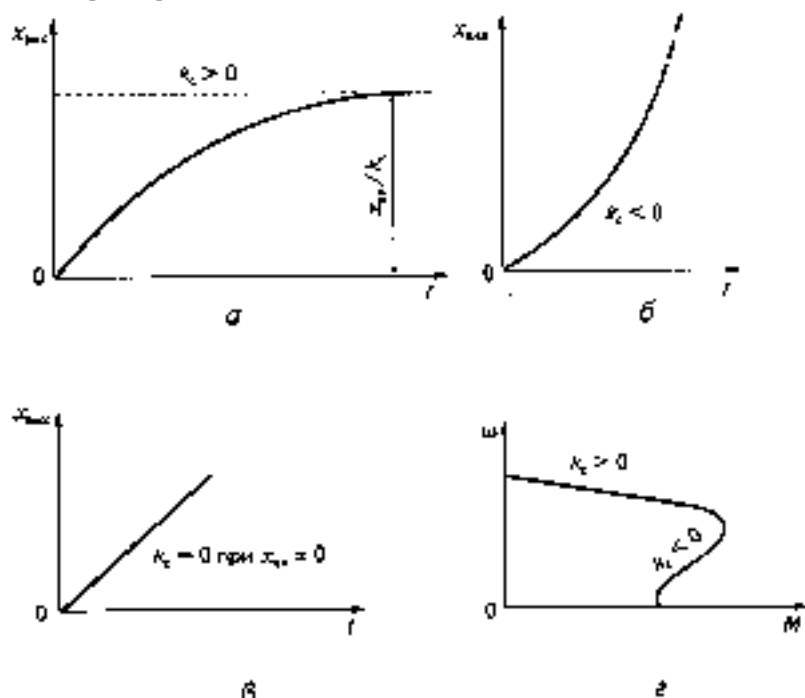


Рис. 2.13

ний двигун на нерухомій частині характеристики (рис. 2.13, а та б).

При цьому необхідно зазначити, що автоматичні регулятори, обов'язкові при об'єктах з $k_c = 0$ і $k_c < 0$, застосовуються і для об'єктів з $k_c > 0$. Принципова різниця полягає лише в тому, що при $k_c > 0$ автоматичний регулятор (як буде показано далі) використовується не для досягнення стійкості, а для підвищення якості динамічних режимів (швидкості, точності).

2.9

Рівняння машини-двигуна з одним ступенем свободи

У сучасній теорії електропривода досить часто нескладні робочі машини, які є об'єктами в системах автоматичного керування, розглядають разом з приводним двигуном як одне ціле. З цією метою момент інерції (масу) робочої машини прикладають до вала двигуна, і далі цей елемент системи робоча машина-двигун вважають по суті об'єктом системи автоматичного керування.

У ряди випадків такий підхід допускається, оскільки при простих робочих машинах кількісне врахування впливу приведенного моменту інерції (маси) може бути достатнім — при цьому не зміниться вигляд математичних залежностей, які відображають динамічні явища в системі керування. Для складних робочих машин, коли необхідно враховувати наявність пружностей в елементах машини, багаточасовість, наявність кількох регульованих параметрів, такий спрощений підхід може виявитися недостатнім.

Якщо вважати зв'язок робочої машини з двигуном абсолютно жорстким, то рівняння динаміки системи *робоча машина-двигун* матиме вигляд

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_d - M_{\text{нм}} \quad (2.35)$$

де J — момент інерції, приведений до вала двигуна; ω — швидкість обертання двигуна; M_d — рушійний момент двигуна; $M_{\text{нм}}$ — момент опору

Рухливий момент, як правило, є функцією пов'язаною до нього енергії, яку відобразимо через положення з відповідного органу регулювання (наприклад, органу регулювання електричної напруги, що подається до електродвигуна, або органу подання пари в парову турбіну), а також швидкості руху ω .

Момент спору залежить від швидкості та має деяку незалежну від неї складову $f(t)$.

Згідно з викладеним, рівняння (2.35) матиме такий вигляд:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_z(\omega, x) - M_{sm}(\omega) - f(t). \quad (2.36)$$

Функції $M_z(\omega, x)$ та $M_{sm}(\omega)$ можуть бути заданими у вигляді графічних залежностей або аналітично. В останньому випадку вони нечіткі. Функцію $f(t)$ на час регулювання можна прийняти за сталу величину $f(t) = f_0$.

Злінеаризуємо нечіткі залежності, склавши вирази (2.36) для точки ω_0, x_0 на основі розкладу в ряд Тейлора (тобто, відкидаючи нечіткі члени розкладу), дістанемо

$$M_z(\omega, x) = M_{z0} + \left(\frac{\partial M_z}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0, x=x_0} \Delta\omega + \left(\frac{\partial M_z}{\partial x} \right)_{\omega=\omega_0, x=x_0} \Delta x;$$

$$M_{sm}(\omega) = M_{sm0} + \left(\frac{\partial M_{sm}}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0} \Delta\omega.$$

Підставляючи знайдені вирази в рівняння (2.36), враховуючи, що $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, та нехтуючи для спрощення запису $\omega = \omega_0$ і $x = x_0$, маємо

$$J \frac{d\Delta\omega}{dt} = M_{z0} - \left(\frac{\partial M_{sm}}{\partial \omega} - \frac{\partial M_z}{\partial \omega} \right) \Delta\omega + \frac{\partial M_z}{\partial x} \Delta x - M_{sm0} - f_0.$$

Виключимо рівняння статички $M_{z0} = M_{sm0} + f_0$, тоді

$$J \frac{d\Delta\omega}{dt} = \left(\frac{\partial M_z}{\partial x} \right) \Delta x - \left(\frac{\partial M_{sm}}{\partial \omega} - \frac{\partial M_z}{\partial \omega} \right) \Delta\omega.$$

Враховуючи х вхідною величиною об'єкта, а $\Delta\omega$ - відповідною, одержимо рівняння машини двигуна у відхиленнях у вигляді

$$J \frac{d\Delta\omega}{dt} + \left(\frac{\partial M_{sm}}{\partial \omega} - \frac{\partial M_z}{\partial \omega} \right) \Delta\omega = \frac{\partial M_z}{\partial x} \Delta x. \quad (2.37)$$

Для запису у відносних (безрозмірних) величинах, при базових значеннях $x \neq 0$, що дорівнюють номінальним x_n , ω_n , дістанемо відношення вихідної величини $\varphi = \frac{\Delta\omega}{\omega_n}$, а вхідної $\mu = \frac{\Delta x}{x_n}$, звідки $\Delta\omega = \varphi\omega_n$, $\Delta x = \mu x_n$. Підставляючи їх у рівняння (2.37), маємо

$$\omega_n \int \frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{\partial M_m}{\partial \omega} - \frac{\partial M_a}{\partial \omega} \right) \omega_n \varphi - \frac{\partial M_a}{\partial x} x_n \mu = 0.$$

Дане рівняння в формі Стодоли матиме вигляд

$$\frac{\int \omega_n}{\frac{\partial M_a}{\partial x} x_n} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\left(\frac{\partial M_m}{\partial \omega} - \frac{\partial M_a}{\partial \omega} \right) \omega_n}{\frac{\partial M_a}{\partial x} x_n} \varphi = 0.$$

це

$$\frac{\int \omega_n}{\frac{\partial M_a}{\partial x} x_n} = T_s$$

— стала часу;

$$\frac{\left(\frac{\partial M_m}{\partial \omega} - \frac{\partial M_a}{\partial \omega} \right) \omega_n}{\frac{\partial M_a}{\partial x} x_n} = k_s \quad (2.38)$$

— коефіцієнт самоврівноваження.

Знайдений вираз k_s як змугу, виходячи з особливостей зміни моментів двигуна M_m та опору M_a залежно від швидкості ω , дає такі висновки.

1. Якщо момент двигуна зі збільшенням швидкості зменшується, а момент опору зростає, то з урахуванням того, що $\frac{\partial M_m}{\partial \omega} < 0$ та $\frac{\partial M_a}{\partial \omega} > 0$, коефіцієнт самоврівноваження $k_s > 0$. Отже, як зазначалося раніше, об'єкт може стійко працювати без автоматичного регулятора.

2. При зменшенні моменту опору зі збільшенням швидкості, якщо момент двигуна зменшується, то можливо, що $k_s < 0$. У цьому разі об'єкт не може стійко працювати без регулятора.

Детальніше фізичні особливості власної роботи машини з приводними електродвигунами залежно від особливостей їхніх механічних характеристик розглядаються в теорії електропривода.

Контрольні запитання та завдання

1. Дайте перелік основних особливостей теорії автоматичного регулювання (ТАР).
2. Назвіть основні умови знаходження системи в статичному стані.
3. Як побудувати результуючі статичні характеристики групи послідовно і паралельно з'єднаних ланок?
4. Побудуйте статичну характеристику ланки зі зворотними зв'язками.
5. Яка залежність точності САК від коефіцієнтів підсилення окремих ланок?
6. У чому полягає протипошність вимог статички і динаміки?
7. Наведіть приклади рівнянь статички і динаміки в різних формах запису.
8. Назвіть методи лінеаризації та вкажіть особливості їх застосування.
9. Як використовується гіпотеза малих відхилень при лінеаризації?
10. Що таке коефіцієнт самовирівнювання і як він впливає на характер перехідних процесів?
11. Як коефіцієнт самовирівнювання залежить від характеристик об'єкта?
12. Наведіть функціональні схеми ланатокимірної зв'язанної і незв'язаної системи.
13. Визначіть статичну помилку розімкнутої системи.
14. Наведіть вирази статичної помилки розімкнутої системи.
15. Від чого залежить статична помилка комбінованої САК?
16. Як одержати рівняння динаміки системи «машина—двигун»?

3.1

Типові елементи (ланки)

систем автоматичного керування

На практиці перехідні процеси різних за своїми фізичними принципами дії ланок (елементів) можуть визначатися подібними диференціальними рівняннями динаміки, що дає можливість класифікувати ланки за виглядом рівнянь динаміки. Наприклад, з цієї точки зору, до одного типу ланок можна віднести такі, на перший погляд, різні ланки, як механічна рухома маса та електричне активівно-індуктивне коло.

Так, рівняння динаміки для механічної маси з моментом інерції J можна записати у вигляді

$$M_{\text{ин}} = M_{\text{ак}} - M_{\text{оп}}$$

або при $M_{\text{оп}} = k\omega$

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{ак}} - k\omega.$$

Групуючи вихідні величини в лівій частині рівняння, а вхідні — в правій, дістаємо

$$J \frac{d\omega}{dt} + k\omega = M_{\text{ак}}. \quad (3.1)$$

Рівняння динаміки активівно-індуктивного кола з електричним активним опором R та індуктивністю L матиме вигляд

$$L \frac{di}{dt} = u - iR,$$

або

$$L \frac{di}{dt} + iR = u. \quad (3.2)$$

Рівняння (3.1) і (3.2) мають аналогічний вигляд, тому характер зміни струму i та швидкості ω у перехідних режимах цих елементів буде аналогічним і за класифікацією, прийнятою в теорії автоматичного керування, ці елементи відносять до одного й того самого типу.

З лівої частини рівняння елемента, в якій представлені вхідна величина та її похідні, видно, як швидко та точно реагує ланка на вхідну величину, що записується в правій частині рівняння.

Наявність похідних у лівій частині рівняння означає, що елемент поступово реагує на вхідну величину, перехідний процес триває певний час, коли є відхилення вхідної величини від заданого рівня.

Якщо похідних у лівій частині рівняння динаміки ланки нема, то це означає, що вона миттєво реагує на вхідну величину.

Похідні можуть бути не тільки в лівій частині рівняння динаміки ланки, а й у правій.

У загальному випадку права частина рівняння динаміки ланки показує, на що реагує ланка і з jakim коефіцієнтом передачі (підсилення) вхідна величина з'являється на її виході.

Залежно від вигляду правої частини рівняння ланка може реагувати: на саму вхідну величину; тільки на похідну від вхідної величини; на інтеграл від вхідної величини; на вхідну величину та її похідну; на вхідну величину та інтеграл від неї; на вхідну величину, похідну та інтеграл від неї. Можливі й інші варіанти вигляду правої частини рівняння.

Основними динамічними характеристиками ланок є:

- часова характеристика $x_{\text{ин}} = f(t)$;
- перехідна функція $h(t) = x_{\text{ин}}(t)$, яка виражає собою реакцію ланки на одиничну ступінчасту вхідну дію $x_{\text{зд}} = 1(t)$;
- функція $\omega(t)$, що є похідною від перехідної функції

$$\omega(t) = [h(t)]'.$$

Крім наведених характеристик, важливими характеристиками ланок є передаточні функції $W(p)$ та різні частотні характеристики (зокрема, вони розглядаються нижче).

Відповідно до рівнянь динаміки розрізняють типи динаміки ланки

Безінерційна (підсилювальна) ланка. Її називають також

ідеальною статичною ланкою. Вона має як в динаміці, так і статично однакове рівняння

$$x_{\text{ин}} = kx_{\text{зд}},$$

яке показує, що вхідна величина миттєво, без будь-яких відхилень, підходить на вихід елемента з передаточним коефіцієнтом k . Прикладом таких елементів можуть бути механічні редуктори, які не мають люфтів, електронні лампи, потенціометри та ін.

Аперіодична ланка першого порядку. Її іноді називають інерційним, релаксацийним або односмысним елементом.

Рівняння динаміки такої ланки

$$T \frac{dx_{\text{вих}}}{dt} + x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}}, \quad (3.3)$$

або в операторному вигляді

$$(Tp + 1)x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}} \quad (3.4)$$

Розв'язок такого лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку має вигляд

$$x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}}(1 - e^{-t/T}). \quad (3.5)$$

Відповідна часова характеристика — це експонента (рис. 3.1, крива 1).

Якщо вхідна величина відсутня (що відповідає, наприклад, відключенню напруги з деякого активно-індуктивного опору), то динамічний процес можна записати у вигляді однорідного рівняння

$$(Tp + 1)x_{\text{вих}} = 0, \quad (3.6)$$

яке називають рівнянням незбуреного руху. Розв'язок його

$$x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}}e^{-t/T} \quad (3.7)$$

Відповідна часова характеристика зображена на рис. 3.1 (крива 2).

В усіх наведених вище рівняннях T — стала часу, яка характеризує інерційні властивості відповідної ланки.

Сталу часу можна знайти за осцилограмою $x_{\text{вих}}(t)$. Дійсно, при $t = T$ рівняння (3.5) маємо

$$x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}}(1 - e^{-1}) = 0,632kx_{\text{вх}}. \quad (3.8)$$

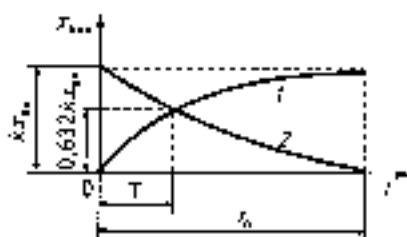


Рис. 3.1

Тому для визначення T достатньо відкласти по вертикальній осі $0,632 x_{\text{ст}}$ і на осі часу t знайти відповідне значення T .

Трикалість перехідного процесу $\tau_p = (3 \dots 4) T$.

Якщо рівняння динаміки ланки

$$T \frac{dx_{\text{ст}}}{dt} - x_{\text{ст}} = kx_{\text{ст}}, \quad (3.9)$$

то її називають *вестійкою аперіодичною ланкою*.

Розв'язок цього рівняння

$$x_{\text{ст}} = kx_{\text{ст}}(e^{t/T} - 1). \quad (3.10)$$

Часова характеристика ланки, зображена на рис. 3.2, показує, що при $t \rightarrow \infty$ $x_{\text{ст}} \rightarrow \infty$.

Аперіодичними ланками є різні електро-технічні пристрої з активно-індуктивним опором, механічні інерційні пристрої, генератори постійного струму та ін.



Рис. 3.2

- **Приклад 3.1.** Вивести рівняння динаміки генератора постійного струму, призначав схему якого зображено на рис. 3.3, де w_1 — обмотка збудження генератора з індуктивністю L і активним опором R .

Розв'язання. Якщо припустити, що швидкість обертання якоря генератора стала, то напруга генератора u_2 може змінюватись лише залежно від напруги на обмотці збудження u_1 . В цьому разі рівняння динаміки має дати залежність

$$u_1 = f(u_2).$$

Для обмотки збудження

$$u_1 = L \frac{di_1}{dt} + Ri_1.$$

Виходячи з лінійності характеристик генератора, запишемо

$$u_1 = ci_1,$$

звідки $i_1 = \frac{u_1}{c}$.

Перенесши похідну вліво в рівнянні в одну частину, дістанемо

$$L \frac{di_1}{dt} + \frac{R}{c} u_1 = u_1.$$

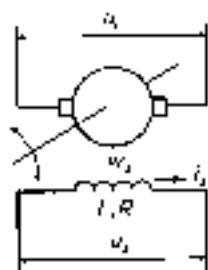


Рис. 3.3

Увавши позначення $L/R = T_1$, $c/R = k_1$, матимемо рівняння генератора у вигляді:

$$T_1 \frac{du_1}{dt} - u_1 = k_1 u_1 \quad (3.11)$$

в операторній формі запису

$$(T_1 p + 1)u_1 = k_1 u_1 \quad (3.12)$$

Ланки другого порядку. До цієї групи належать ланки, рівняння динаміки яких має вигляд

$$a \frac{d^2 x_{\text{ан}}}{dt^2} + b \frac{dx_{\text{ан}}}{dt} + x_{\text{ан}} = kx_{\text{к}} \quad (3.13)$$

Позначивши $\sqrt{a} = T_1$, $b = T_2$, дістанемо рівняння в операторній формі запису:

$$(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)x_{\text{ан}} = kx_{\text{к}} \quad (3.14)$$

Розв'язок цього рівняння

$$x_{\text{ан}} = kx_{\text{к}} (C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + 1), \quad (3.15)$$

де C_1 , C_2 — стали інтегрування; p_1 , p_2 — корені характеристичного рівняння

$$T_1^2 p^2 + T_2 p + 1 = 0. \quad (3.16)$$

Залежно від коренів характеристичного рівняння можливі два різновиди ланок другого порядку — апериодичні та коливальні. Рівняння динаміки цих ланок мають однаковий вигляд, але їхні часові характеристики суттєво відрізняються.

Аперіодичні ланки другого порядку. До ланок цього виду належать ланки при дійсних і від'ємних коренях характеристичного рівняння

$$p_{1,2} = \frac{-T_2 \pm \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}{2T_1^2} < 0$$

Це можливо за умови, коли $T_2 > 2T_1$

При $p_1 < 0$ ($p_1 = -\alpha_1$), $p_2 < 0$ ($p_2 = -\alpha_2$) розв'язок рівняння ланки

$$x_{\text{ан}} = kx_{\text{к}} \left(C_1 \frac{1}{e^{-\alpha_1 t}} + C_2 \frac{1}{e^{-\alpha_2 t}} + 1 \right) = kx_{\text{к}} \quad (3.17)$$

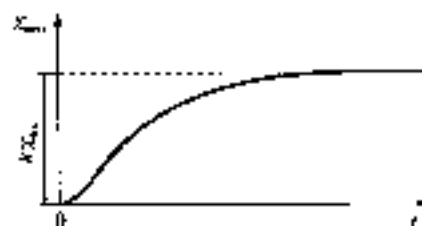


Рис. 3.4

Числову характеристику наведено на рис. 3.4. Вона визначається сумою двох експонент, що і зумовлює назву ланки.

Коліваційна ланка. Коліваційною ланкою є елемент другого порядку при комплексних коренях характеристичного рівняння з від'ємною дійсною частиною. В цьому випадку

$$p_1 = -\alpha + j\beta; p_2 = -\alpha - j\beta,$$

$$\text{де } \sigma = T_2/2T_1; \omega = \frac{\sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}{2T_1}.$$

Розв'язок рівняння динаміки елемента можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} x_{em} &= kx_{en}(C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + 1) = \\ &= kx_{en}[1 + e^{-\alpha t}(C_1 e^{j\beta t} + C_2 e^{-j\beta t})]. \end{aligned}$$

Згідно з формулою Ейлера

$$e^{j\beta t} = \cos \beta t + j \sin \beta t;$$

$$e^{-j\beta t} = \cos \beta t - j \sin \beta t.$$

Заміняючи показникові функції на тригонометричні, після нескладних перетворень дістанемо

$$\begin{aligned} x_{em} &= kx_{en}[1 + e^{-\alpha t}(C_1(\cos \beta t + j \sin \beta t) + C_2(\cos \beta t - j \sin \beta t))] = \\ &= kx_{en}[1 + e^{-\alpha t}[(C_1 + C_2)\cos \beta t + j(C_1 - C_2)\sin \beta t]] = \\ &= kx_{en}[1 + e^{-\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t)]; \\ x_{em} &= kx_{en}[1 + e^{-\alpha t}D \sin(\beta t + \varphi)], \end{aligned} \quad (3.18)$$

де $C_1 + C_2 = A$; $C_1 - C_2 = B$; $D = \sqrt{A^2 + B^2}$ — амплітуда гармонічних коливань; $\varphi = \arctg \frac{B}{A}$ — зсув за фазою.

Числову характеристику, що відображує згасуючий коливальний процес з побудову згідно з рівнянням (3.18), наведено на рис. 3.5.

Тривалість переманного процесу $t_n = 3T'$, де T' — стала часу (апроксимуючі експоненти, показаної штриховою лінією, що залежить від дійсної складової комплексного кореня).

$$T' = \frac{2T_1^2}{T_2}$$

$$t_d = 3T' = \frac{6T_1^2}{T_2}$$

З наведених формул видно, що коливальні властивості ланки другого порядку визначаються коефіцієнтом T_1 при другій похідній, а демпфуючі — коефіцієнтом T_2 при першій похідній.

При $T_2 < 2T_1$ елемент другого порядку є коливальним, а при $T_2 > 2T_1$ — аперіодичним.

Рівняння ланки другого порядку можна записати також у зручному вигляді:

$$(T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1)x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}},$$

де $T = T_1$; $\zeta = T_2/2T_1$ — *декремент затухання або коефіцієнт демпфування*.

Залежно від величини ζ ланка другого порядку різко відрізняє свої властивості. Згідно з цим, при $0 < \zeta < 1$, ланку називають *коливальною*.

Якщо $\zeta = 0$, ланку називають *консервативною*.

Часова характеристика даної ланки визначається розв'язком характеристичного рівняння, який при суто уявних коренях матиме вигляд

$$x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}}(C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t} + 1),$$

або

$$\begin{aligned} x_{\text{вих}} &= kx_{\text{вх}}[C_1(\cos \beta t + j \sin \beta t) + C_2(\cos \beta t - j \sin \beta t) + 1] = \\ &= kx_{\text{вх}}[1 + D \sin(\beta t - \varphi)]. \end{aligned}$$

При цьому $x_{\text{вих}}$ є коливанням зі сталою амплітудою D при куті зсуву відносно початкової точки $t = 0$, що дорівнює φ .

Прикладом ланок другого порядку можуть бути каскадні магнітні посилювачі, електромагнітні підсилювачі поперечного поля та двигуни постійного струму.

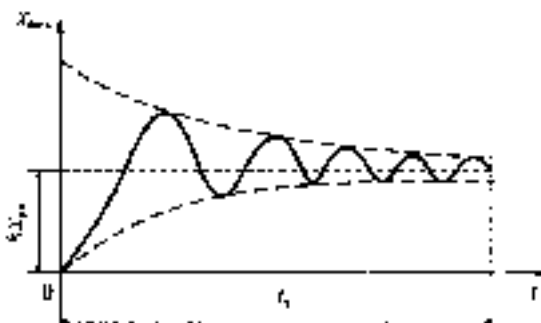


Рис. 3.5

- **Приклад 3.2.** Вивести рівняння двигуна постійного струму з незалежним збудженням.

Розв'язання. Вихідною величиною в даному разі буде швидкість об'єкта регулюється змінною напруга u , що подається в якорне коло двигуна. Таким чином, треба встановити в динаміці залежність $\omega = f(u)$. Запишемо рівняння електричної різниці для якорного кола двигуна, маючи, зокрема, на увазі, що в двигуновому режимі напруга збудження обчислюється за формулою

$$u = L_{\alpha} \frac{di_{\alpha}}{dt} + R_{\alpha} i_{\alpha} + e,$$

де L_{α} , R_{α} — відповідно індуктивність і активний опір кола якоря; e — проти-ЕРС телегенерування статора двигуна.

Для режиму роботи двигуна кожні записати рівняння динаміка у вигляді

$$M_{\text{ем}} - M_{\text{с}} - M_{\text{т}} = 0, \quad (3.14)$$

де $M_{\text{ем}}$, $M_{\text{с}}$, $M_{\text{т}}$ — відповідно динамічний, двигуновий і електричний моменти двигуна. Якщо електричний момент направлений, тобто $M_{\text{с}} = 0$, то можна записати

$$J \frac{d\omega}{dt} = c_{\omega} i_{\alpha},$$

звідки

$$i_{\alpha} = \frac{J}{c_{\omega}} \frac{d\omega}{dt},$$

де J — момент інерції двигуна; c_{ω} — стала струму.

Підставляючи одержане вираження i_{α} в рівняння електричної різниці кола якоря двигуна, після деяких перетворень отримаємо

$$\frac{L_{\alpha} J}{c_{\omega}} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{R_{\alpha} J}{c_{\omega}} \frac{d\omega}{dt} + e_{\alpha} \omega = u.$$

Введемо позначення

$$\frac{L_{\alpha} J}{c_{\omega} c_{\omega}} = T_1^2, \quad \frac{R_{\alpha} J}{c_{\omega} c_{\omega}} = T_2, \quad \frac{1}{c_{\omega}} = k_2,$$

При цьому рівняння динаміки двигуна постійного струму в операторній формі матиме вигляд

$$T_1^2 \ddot{\omega} + T_2 \dot{\omega} + k_2 \omega = k_2 u. \quad (3.15)$$

Якщо $T_2 = \frac{R_2 J}{c_1 c_2} > 2T_1 = 2\sqrt{\frac{L_2 J}{c_1 c_2}}$, або $R_2 \sqrt{\frac{J}{c_1 c_2}} > 2\sqrt{L_2}$, то диалог: при за-
почу співвідношенні параметрів буде аперодичною ланкою другого
порядку, а в протилежному разі — класичною ланкою

Інтегрувальні (астатичні) ланки. Рівняння динаміки
ланок даного типу має вигляд

$$\dot{x}_{\text{инт}} = k \int x_{\text{вх}} dt, \quad (3.21)$$

а в операторній формі запису

$$x_{\text{инт}} = k \frac{1}{p} x_{\text{вх}}. \quad (3.22)$$

Розв'язок цього рівняння

$$x_{\text{инт}} = k x_{\text{вх}} t. \quad (3.23)$$

Часову характеристику наведено на рис. 3.6. Вона показує, що
при $t \rightarrow \infty$ $x_{\text{инт}} \rightarrow \infty$ за умови, що на вході ланки існує вхідна величина
($x_{\text{вх}} \neq 0$).

Прикладом інтегрувальної (астатичної) ланки може бути підрав-
ляльний серводвигун (рис. 3.7).

Вхідною величиною елемента $x_{\text{вх}}$ є переміщення золотника 3, а
вихідною $x_{\text{инт}}$ — переміщення поршня II. Поршень рухається під тис-
ком масла Q , яке надходить, залеж-
но від положення золотника, у верх-
ню або нижню порожнину циліндра
серводвигуна СД. Цивільність пере-
міщення поршня $x_{\text{инт}}$ пропорційна
кількості масла Q , що надходить у
відповідну порожнину циліндра.

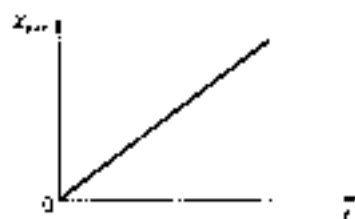


Рис. 3.6

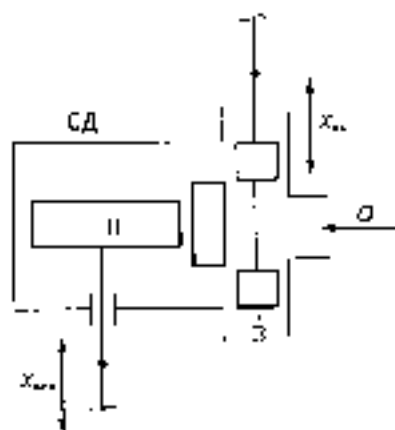


Рис. 3.7

Отже, можна записати

$$v_n \cdot \frac{dx_{\text{м}}}{dt} = c_1 Q.$$

Своєю чергою кількість масла в циліндрі пропорційна величині $x_{\text{м}}$ — відхиленню золотника. Тому $Q = c_2 x_{\text{м}}$, звідки $\frac{dx_{\text{м}}}{dt} = c_1 c_2 x_{\text{м}}$.

Інтегрувавши праву і ліву частини рівняння, дістанемо

$$x_{\text{м}} = c_1 c_2 \int x_{\text{м}} dt = k \int x_{\text{в}} dt.$$

Диференційовальна ланка. В ланках цього типу вихідна величина залежить від швидкості зміни вхідної. При сталому значенні вхідної величини вихідної змінної не буде.

Рівняння динамічного елемента

$$x_{\text{м}} = k \frac{dx_{\text{в}}}{dt} \quad (3.24)$$

або

$$x_{\text{м}} = k p x_{\text{в}}, \quad (3.25)$$

Прикладом елементів ланок даного типу можуть бути електричні кола $L - R$, $R - C$.

□ **Приклад 3.3.** Записати рівняння динаміки ланок $L - R$ і $R - C$ (рис. 3.8 і 3.9).

Розв'язання. Для схеми $L - R$

$$u_{\text{в}} = iR + L \frac{di}{dt}$$

Диференціювавши ліву і праву частини рівняння, дістанемо

$$\frac{du_{\text{в}}}{dt} = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2}.$$

Позначивши $i / R = i$, $L \frac{di}{dt} = e$, $e = u_{\text{м}}$, після множення лівих і правих частин рівняння на L / R маємо

$$u_{\text{в}} + T \frac{du_{\text{м}}}{dt} = T \frac{du_{\text{м}}}{dt} \quad (3.26)$$

3.1. Типові елементи (ланки) системи автоматичного керування

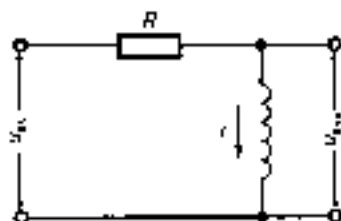


Рис. 3.8

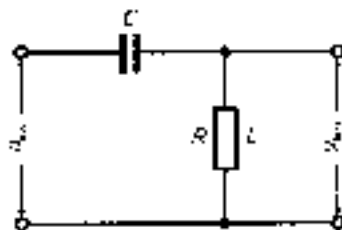


Рис. 3.9

Він класичного вигляду має рівняння зірмівається частоти і ліній частині складової $T \frac{dU_{\text{вих}}}{dt}$, що є похибкою диференціювання. Пояснення похибки вказує, що ідеальне диференціювання неможливе.

Складемо рівняння для елемента виду $R - C$:

$$U_{\text{вих}} = U_{\text{вх}} + U_{\text{емк}} = \frac{Q}{C} + iR = \frac{i dt}{C} + iR,$$

де Q — заряд; C — ємність.

В операторній формі можна записати

$$U_{\text{вих}} = \frac{1}{pC} i + iR = iR \left(\frac{1}{Tp} + 1 \right) = U_{\text{вх}} \left(\frac{Tp + 1}{Tp} \right),$$

де $T = RC$.

Звідси

$$U_{\text{вих}} = \frac{1}{Tp + 1} T p U_{\text{вх}}. \quad (1.77)$$

У даному разі $\frac{1}{Tp + 1}$ — похибка диференціювання.

Диференціювальні елементи використовуються в системах автоматичного керування для демпфування коливань та поліпшення якості перехідних процесів.

Ланки із запізненням. Характерними особливостями

таких ланок є те, що відношення, яке підходить на вхід, перекладається на вихід ланки з деяким запізненням t . У багатьох випадках коефіцієнт передньої ланки із запізненням дорівнює одиниці. Прикладами таких ланок можуть бути трубопроводи, транспортери, прокладні стани тощо.

Рівняння ланок із запізненням мають вигляд

$$x_{\text{лан}}(t) = x_{\text{вх}}(t - \tau). \quad (3.28)$$

Після перетворень за Лапласом і використання теореми запізнення в операторній формі запісу рівняння матиме вигляд

$$x_{\text{лан}}(p) = x_{\text{вх}}(p)e^{-p\tau}. \quad (3.29)$$

Крім розглянутих типових ланок, що відрізняються виглядом диференціальних рівнянь та значенням коренів характеристичного рівняння, можливі ланки інші підходи до класифікацій ланок, які розглядаються далі.

3.2

Приклад складання рівняння

тиристорного перетворювача (підсилювача) як ланки із запізненням

Неперервний спосіб керування $U_{\text{вх}}$, що надходить до тиристорного перетворювача (ТП), поділяється насамперед на системи імпульсно-фазового керування (СІФК), яка є частиною ТП. За її допомогою сигнал перетворюється на послідовність керуючих імпульсів, які формуються генератором імпульсів і мають відповідне відхилення за фазою щодо моменту відкриття тиристора. Змінюючи величину відхилення фази керуючих імпульсів, тиристорний перетворювач виконує зворотне перетворення дискретних сигналів на кусково-неперервний сигнал вихідної величини $U_{\text{вн}}$ або $I_{\text{вн}}$, який подається в якірне коло двигуна Д.

При точному реалізмі процесів, що відбуваються в тиристорному перетворювачі, він має розглядатися як нелінійний дискретний елемент системи керування. Достатньо точне математичне зображення його можливе на основі теорії систем з широтно-імпульсною модуляцією другого роду (ШІМ). Це складно, і тому в практиці ТАК використовується, як правило, спрощене уявлення про процес, що відбувається в ТП.

Згідно з теоремою Котельникова, тиристорний перетворювач без втрат інформації пропускає сигнали, частоти яких менші за граничну частоту

$$U_{\text{н}} = \frac{m U_{\text{н}}}{2},$$

де m — кількість фаз перетворювача; $\omega_{\text{н}} = 2\pi f$ — частота напруги мережі; f — частота в герцах.

Якщо частота проходження дискретних імпульсів $\omega_c = \frac{1}{T_c} < \omega_{\text{н}}$,

де T_c — період квантування, то ТП можна лінеаризувати (апроксимувати) лінійною безінерційною ланкою з коефіцієнтом посилення $k_{\text{н}}$.

При такому підході треба мати на увазі, що при збільшенні зростанні коефіцієнта підсилення системи з ТП у замкнутому колі для збільшення швидкості і статичної точності САК можливе виникнення небажаних автоколивань з частотою граничної гармоніки $\omega_{\text{н}}$.

Важливою особливістю ТП є також явище неповної керуваності. Воно полягає в тому, що при зміні кута керування тиристором α з частотою, більшою за ω_c , і при $\frac{d\alpha}{dt} > \omega_c$ прашеси в ТП при збільшенні і зменшенні кута α відбуваються по-різному.

При зменшенні кута напруга u_c на виході ТП повністю залежить від $\alpha(t)$, а при збільшенні $\alpha(t)$ $\frac{d\alpha}{dt} > \omega_c$ комутація тиристора не відбувається. При цьому u_c не є функцією $\alpha(t)$, а є відрізком синусоїдальної швидкої напруги вентиля, який було відкрито в останній момент змін кута керування.

Отже, при $\frac{d\alpha}{dt} < \omega_c$ ТП можна зобразити як неперервну безінерційну ланку. При $\frac{d\alpha}{dt} > \omega_c$ спостерігається невідповідність між входними і вихідними величинами тиристора, що потребує відповідного математичного відображення.

Невідповідність входних і вихідних величин у даному випадку є причиною появи фазових зміщень при гармонічних змінах входньої величини. Максимальне фазове зміщення на виході ТП відповідає зміщенню деякої ланки з чистим запізненням на час $\tau = \frac{D}{4\omega_{\text{н}}}$, де D — діапазон зміни кута керування.

Завдяки неповній керуваності, дискретності та невідповідності ТП у замкнутій системі можуть виникати автоколивання чи найнижчих

субгармоніках з великою амплітудою і порівняно невеликою частотою. Такі автоколивання можуть призвести до перевантаження окремих елементів ТП з різким зменшення його надійності.

Щоб зменшити негативний вплив можливих автоколивань, обмежують швидкість зміни вихідного сигналу керування $u_{\text{вх}}(t)$, який визначає швидкість зміни кута керування $\alpha(t)$. Для цього на вході СІФК ТП підключають апериодичну ланку, яка в реверсивному електроприводі має також обмежувати динамічний зрівнювальний струм, що виникає між випрямляючою та інвертуючою групами вентилів і може в багато разів перевищувати статичний зрівнювальний струм. Внаслідок цього обмежування реактори, розраховані на статичний зрівнювальний струм, можуть бути навантажені його динамічним складовою, і зрівнювальний струм досягне аварійного значення. Щоб уникнути такої небезпеки, стала апериодичної обмежувальної ланки на вході СІФК має знаходитися в інтервалі $0,006 - 0,01$ с при промисловій частоті $\omega_c = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 = 314$ 1/с.

Причепи, що відбуваються на різних варіантах зміни вхідного сигналу ТП, досить складні і не завжди передбачувані. Тому різні алгоритми дискретний процес керування і неповної карбованості тиристорів грають по-різному.

В даному випадку, орієнтуючись на роботу ТП у режимі безперервного струму, розглядаємо ТП як елемент, що складається з двох послідовно з'єднаних ланок: ланки безперервної з коефіцієнтом підсилення k_{11} і ланки чистого запізнення із запізненням τ .

Рівняння динаміки згідно з викладеним вище матиме вигляд

$$u_{\text{вх}} = k_{11} u_{\text{вх}} e^{-s\tau}. \quad (3.30)$$

Розклали функцію $e^{-s\tau}$ в степеневий ряд і обмежувимось двома першими членами, дістанемо рівняння лінійного апарата.

$$u_{\text{вх}} = k_{11} u_{\text{вх}} \left(1 + \frac{-s\tau}{1} \right),$$

де τ — середньохватистичне запізнення.

3.3

Передаточні функції та частотні характеристики

Теоретичне визначення передаточної функції випливає з відомого перетворення Лапласа, згідно з яким деяка функція часу $f(t)$ - оригінал - може бути перетворена на функцію комплексної величини s , яка є зображенням відповідного оригіналу. Формула прямого перетворення Лапласа

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Використовуючи розроблені методи перетворення, теореми і формули, забезпечимо розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь, дотримуючись відповідних дій над зображеннями. Потім на основі зворотного перетворення Лапласа перейдемо до дійсної функції-оригіналу. Формула зворотного перетворення Лапласа, яке позначається L^{-1} матиме вигляд

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

Передаточні функції при використанні перетворень Лапласа представляють як відношення зображень вихідної і вхідної величин.

$$W(s) = \frac{X_{\text{вих}}(s)}{X_{\text{вх}}(s)}. \quad (3.31)$$

При нульових початкових умовах передаточну функцію можна знайти на основі запису заповнених величин в операторній формі. Тому в теорії автоматичного керування передаточну функцію часто записують так:

$$W(p) = \frac{X_{\text{вих}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{X_{\text{вих}}}{X_{\text{вх}}} = \frac{Q(p)}{P(p)}. \quad (3.32)$$

При цьому виходять із рівняння ланки в загальному вигляді

$$P(p)x_{\text{вих}} = Q(p)x_{\text{вх}},$$

де $Q(p)$, $P(p)$ - відповідні оператори правої та лівої частини рівняння ланки.

Так, для типового елемента — аперіаційної ланки перинтл порядку

$$(Tp + 1)x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}},$$

$$P(p) = Tp + 1; \quad Q(p) = k.$$

Для інтегруювального елемента

$$P(p) = 1, \quad Q(p) = k \frac{1}{p}.$$

Передаючі функції в ТАК мають значне поширення і використовуються для:

- відображення динамічних властивостей ланок (систем) на основі структурних схем;
- знаходження вихідних виразів для побудови частотних характеристик, на яких базуються різні методи дослідження ланок і систем автоматичного керування;
- застосування як математичного апарату, зручного для спрощення структурних схем.

3.4

Передаючі функції та частотні характеристики типових ланок.

Приклади побудови. Загальні відомості про частотні характеристики

Основною частотною характеристикою є *амплітудно-фазова характеристика* (АФЧХ або АФХ). Її можна дістати двома способами: графоаналітичним і експериментальним.

Для побудови АФХ графоаналітичним методом у вираз введеної передаючої функції підставляють $p = j\omega$, де $j = \sqrt{-1}$; ω — частота, що може змінюватись від 0 до ∞ або в деяких випадках від $-\infty$ до $+\infty$.

У загальному випадку АФХ має вигляд

$$W(j\omega) = \frac{Q(j\omega)}{P(j\omega)} \quad (3.33)$$

Оскільки $W(j\omega)$ — комплексна величина, то її можна записати, виділяючи дійсну $U(\omega)$ та уявну $V(\omega)$ частини:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (3.34)$$

де $U(\omega)$, $V(\omega)$ — відповідно дійсна і уявна частотні характеристики.

У комплексній площині, якщо відомі вирази $U(\omega)$ і $V(\omega)$, можна побудувати відповідні характеристики (рис. 3.10).

Характеристику $A(\omega) = \sqrt{[U(\omega)]^2 + [V(\omega)]^2}$ називають *амплітудно-магнітудною* характеристикою, а залежність $\phi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$ — *фазо-частотною*.

Всі частотні характеристики можуть бути побудовані в логарифмічному масштабі. У цьому випадку їх називають *логарифмічними частотними характеристиками*.

Приклад графоаналитичної побудови частотних характеристик. Побудуємо частотні характеристики для апериодичної ланки першого порядку з передаточною функцією $W(p) = \frac{k}{T_p + 1}$ і амплітудно-фазовою характеристикою

$$W(j\omega) = \frac{k}{T_p j\omega + 1}.$$

Ліквідуємо уявну величину у знаменнику, дістанемо

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k(1 - jT_p\omega)}{1 + T_p^2\omega^2} = \\ &= \frac{k}{1 + T_p^2\omega^2} - j \frac{kT_p\omega}{1 + T_p^2\omega^2}. \end{aligned}$$

Дійсна і уявна частотні характеристики мають вигляд

$$U(\omega) = \frac{k}{1 + T_p^2\omega^2}; \quad V(\omega) = - \frac{kT_p\omega}{1 + T_p^2\omega^2}.$$

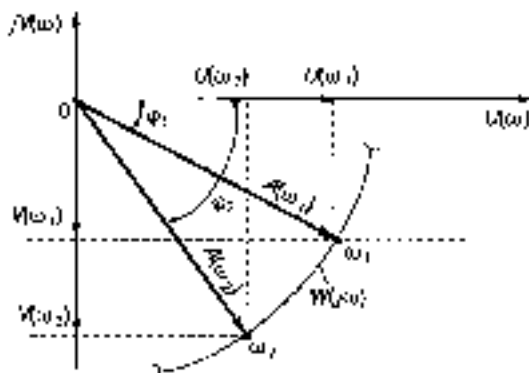


Рис. 3.10

Амплітудно-частотна характеристика записується у вигляді

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{k^2}{(1 + T^2\omega^2)^2} + \frac{(kT\omega)^2}{(1 + T^2\omega^2)^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}},$$

а фазочастотна —

$$\varphi(\omega) = \arctg\left[\frac{I'(\omega)}{I(\omega)}\right] = \arctg\left[\frac{-\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}}{\frac{k}{1 + T^2\omega^2}}\right] = -\arctg[T\omega].$$

Заданою ω , обчислимо відповідні значення $U(\omega)$ і $V(\omega)$, які наведені в табл. 3.1.

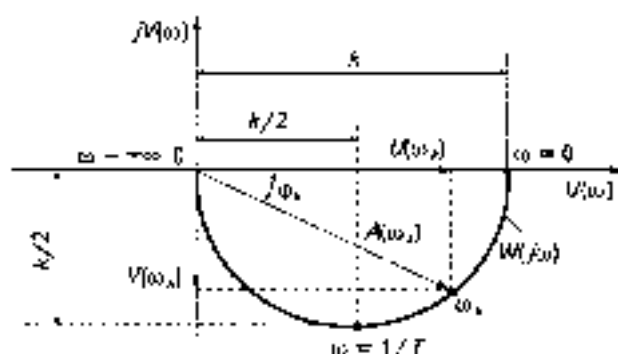


Рис. 3.11

Таблиця 3.1

α	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	k	0
$1/T$	$k/2$	$-k/2$
∞	0	0

АФХ типової аперодичної ланки першого порядку є півколо у четвертому квадранті комплексної площини (рис. 3.11).

Частотні характеристики $U(\omega)$, $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ побудовано на рис. 3.12, а—г.

Експериментальний метод побудови амплітудно-фазової частотної характеристики ланки (системи). Щоб побудувати амплітудно-фазову характеристику, треба мати елемент (систему) в натуральному вигляді або його модель. Крім того, потрібні генератор змінної частоти та прилад для вимірювання амплітуди і фази вхідної величини.

Для побудови характеристики на вхід елемента подаються коливання $f = \alpha \sin \omega t$. При цьому на виході діє коливання $F = A \sin(\omega t + \varphi)$.

3.4. Передаточна функція має загальний вигляд $W(p) = \frac{A}{B}$, де A і B – многочлики степеня n і m відповідно. Приклади побудови частотних характеристик для різних типів ланок.

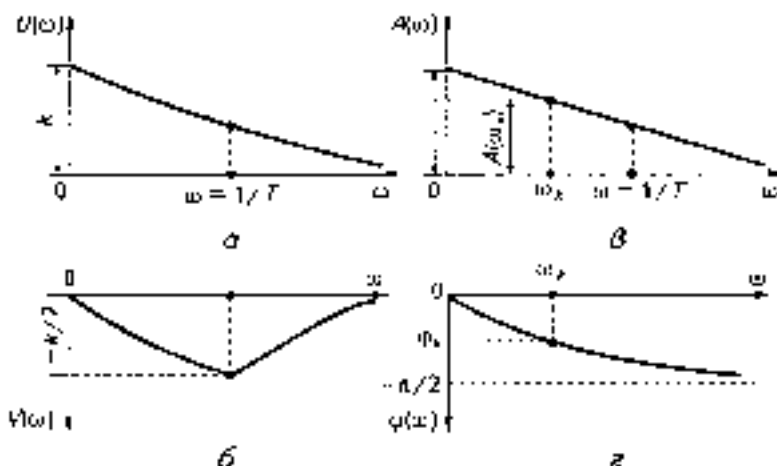


Рис. 3.12

При $a = 1$

$$W(j\omega) = \frac{f}{f} = \frac{Ac^{j\omega T - 1}}{e^{j\omega T}} = Ac^{j\omega T}.$$

Результати вимірювань при різних частотах наведено в табл. 3.2

Таблиця 3.2

ω_1	A_1	φ_1
ω_2	A_2	φ_2
ω_k	A_k	φ_k

За даними таблиці неможливо побудувати амплітудно-фазову характеристику, на основі якої можна дістати й інші частотні характеристики.

Розглянемо тепер передаточні функції та частотні характеристики інших типових ланок.

Безінерційна ланка. Рівняння цієї ланки має вигляд $x_{\text{вих}} = kx_{\text{вх}}$, передаточна функція $W(p) = k$; амплітудно-фазова характеристика $W(j\omega) = k$, яка є точкою, що лежить на дійсній осі комплексної площини.

Аперіодична ланка першого порядку. Для цієї ланки рівняння, передаточну функцію та амплітудно-фазову частотну характеристику наведено в п. 3.1.

Ланки другого порядку. Передаточна функція ланки

$$W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1},$$

а амплітудно-фазова характеристика

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k(1 - T_1^2 \omega^2 - jT_2 \omega)}{(-T_1^2 \omega^2 - T_2 j\omega + 1)(1 - T_1^2 \omega^2 - jT_2 \omega)} = \\ &= U(\omega) + jV(\omega), \end{aligned}$$

де

$$U(\omega) = \frac{k(1 - T_1^2 \omega^2)}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}; \quad V(\omega) = \frac{-kT_2 \omega}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}.$$

Значення $U(\omega)$, $V(\omega)$ при відповідних ω наведено в табл. 3.3, на основі якої на рис. 3.13 побудована АФХ елемента другого порядку, що розташована в третьому і четвертому квадрантах комплексної площини.

$jV(\omega)$

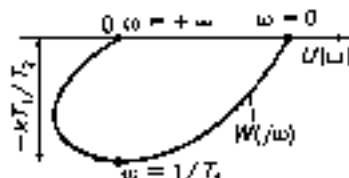


Рис. 3.13

Таблиця 3.3

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	k	0
$1/T_1$	0	$-kT_2/T_1$
∞	0	0

Інтегрувальна ідеальна ланка. Для цієї

ланки $W(p) = k \frac{1}{p}$; $W(j\omega) = k \frac{1}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}$,

тобто АФХ є прямою, що збігається з від'ємною уявною віссю n (рис. 3.14). При $\omega \rightarrow 0$ АФХ $W(j\omega) \rightarrow -\infty$.

Диференціальна ідеальна ланка. Для неї $W(p) = kp$; $W(j\omega) = kj\omega$, тобто АФХ збігається з уявною віссю b , але направленою в позитивному напрямку (див. рис. 3.14).

Крім рівнянь, передаточних функцій і відповідних частотних характеристик ідеальних диференціальних та інтегровальних ланок, у теорії автоматичного керування виділяють також лінійні диференційовальні та інтегровальні ланки, які розглядатимуться при побудові відповідних логарифмічних характеристик.

3.5. Рівняння динаміки, передаточні функції і амплітудно-фазові частотні характеристики груп ланок при різному їх з'єднанні

Ланка з частими затриманням. У загальному вигляді

$$W(p) = k e^{-\lambda p}, \quad W(j\omega) = k e^{-j\omega \lambda}. \quad (3.35)$$

Амплітудно-частотна характеристика ланки

$$A(\omega) = k = \text{const},$$

а фазочастотна —

$$\phi(\omega) = -\omega \lambda$$

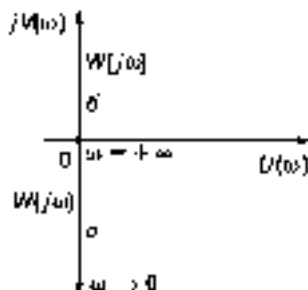


Рис. 3.14

Згідно з (3.35) амплітудно-фазова характеристика ланки із затриманням є колом радіуса k , що періодично повторюється.

Амплітудно-частотна характеристика $A(\omega) = k$ є радіусом-вектором, що обертається за годинниковою стрілкою

3.5

Рівняння динаміки, передаточні функції і амплітудно-фазові частотні характеристики груп ланок при різному їх з'єднанні

Послідовне з'єднання ланок. При послідовному з'єднанні ланок вихідна величина кожної попередньої ланки подається на вхід наступної і, згідно з цим, рівняння динаміки групи послідовно з'єднаних ланок має дати залежність вихідної величини останньої ланки від вхідної першої.

Запишемо рівняння динаміки окремих елементів:

- першого елемента

$$P_1(p)x_{1,\dots} = Q_1(p)x_{1,\dots};$$

- другого елемента з урахуванням того, що $x_{1,\dots} = \frac{Q_1(p)}{P_1(p)}x_{1,\dots} = x_{2,\dots}$,

$$P_2(p)x_{2,\dots} = Q_2(p)\frac{Q_1(p)}{P_1(p)}x_{1,\dots}.$$

• n -го елемента

$$P_n(p)x_{n+1} = Q_n(p) \frac{Q_1(p) Q_2(p) \dots Q_{n-1}(p)}{P_1(p) P_2(p) \dots P_{n-1}(p)} x_{1\text{вх}}. \quad (3.36)$$

Позначивши

$$P_1(p) P_2(p) \dots P_n(p) = P(p);$$

$$Q_1(p) Q_2(p) \dots Q_n(p) = Q(p);$$

отримаємо рівняння n послідовно з'єднаних ланок у вигляді

$$P(p)x_{n+1} = Q(p)x_{1\text{вх}}. \quad (3.37)$$

Передаточна функція n послідовно з'єднаних ланок з урахуванням залежності (3.36)

$$W_{1 \dots n}(p) = \frac{x_{n+1}}{x_{1\text{вх}}} = \frac{Q(p)}{P(p)} = \frac{Q_1(p) Q_2(p) \dots Q_n(p)}{P_1(p) P_2(p) \dots P_n(p)}$$

або

$$W_{1 \dots n}(p) = W_1(p) W_2(p) \dots W_n(p). \quad (3.38)$$

Амплітудно-фазова характеристики послідовно з'єднаних n ланок

$$W_{1 \dots n}(j\omega) = W_1(j\omega) W_2(j\omega) \dots W_n(j\omega). \quad (3.39)$$

Якщо відомі АФХ окремих ланок (наприклад, знайдені експериментально), то характеристику послідовно з'єднаних ланок можна побудувати графічно.

Наприклад, для двох ланок амплітудно-фазові характеристики яких

$$W_1(j\omega) = A_1 e^{i\varphi_1};$$

$$W_2(j\omega) = A_2 e^{i\varphi_2},$$

результуюча характеристика при їхньому послідовному з'єднанні матиме вигляд

$$W_{1 \dots 2}(j\omega) = A_{1 \dots 2} e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\text{де } A_{1 \dots 2} = A_1 A_2.$$

АФХ окремих ланок і графічну побудову результуючої АФХ ланок показано на рис. 3.15, а - а.

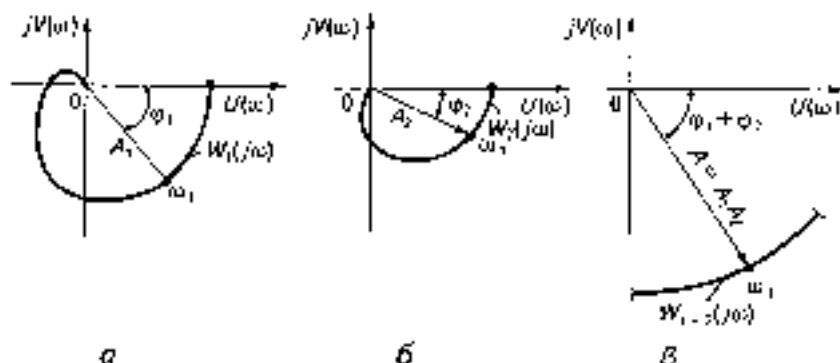


Рис. 3.15

Паралельне з'єднання ланок. Нагадаємо, що при паралельному з'єднанні ланок їхні вхідні величини однакові

$$x_{1\text{вх}} = x_{1\text{вх}} = x_{2\text{вх}} = \dots = x_{n\text{вх}},$$

а вихідна величина є сумою вихідних величин ланок, що з'єдну ються,

$$x_{\text{вих}} = x_{\text{вих1}} + x_{\text{вих2}} + \dots + x_{\text{вихn}}.$$

Розглянемо рівняння та передаточні функції при паралельному з'єднанні ланок на прикладі двох паралельно з'єднаних ланок з рівняннями динаміки вигляду

$$P_1(p)x_{1\text{вих}} = Q_1(p)x_{1\text{вх}};$$

$$P_2(p)x_{2\text{вих}} = Q_2(p)x_{2\text{вх}}.$$

У цьому випадку

$$x_{\text{вих}} = x_{1\text{вих}} + x_{2\text{вих}} = \frac{Q_1(p)}{P_1(p)}x_{1\text{вх}} + \frac{Q_2(p)}{P_2(p)}x_{2\text{вх}}$$

і рівняння динаміки

$$x_{\text{вих}} = [W_1(p) + W_2(p)]x_{\text{вх}}, \quad (3.40)$$

звідки дістанемо передаточну функцію двох паралельно з'єднаних ланок:

$$W_{1-2}(p) = \frac{x_{\text{вих}}}{x_{\text{вх}}} = W_1(p) + W_2(p). \quad (3.41)$$

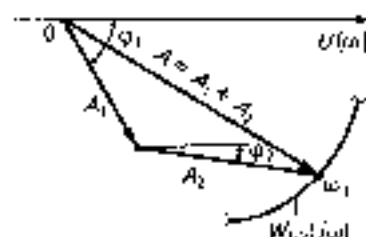
$W(\omega)!$ 

Рис. 3.16

АФХ для цих двох ланок

$$W_{1,2}(j\omega) = W_1(j\omega) + W_2(j\omega). \quad (3.42)$$

У загальному випадку при n з'єднаних ланках АФХ визначається як сума відповідних характеристик усіх ланок:

$$W_{1...n}(p) = W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p),$$

$$W_{1...n}(j\omega) = W_1(j\omega) + W_2(j\omega) + \dots + W_n(j\omega).$$

Графічно результируюча АФХ будується за правилом складання векторних величин (рис. 3.16).

Ланка зі зворотним зв'язком. На рис. 3.17 показана ланка L , охоплена зворотним зв'язком 33, а також відповідні вирази та знахідні величини.

Рівняння ланки L до охоплення її зворотним зв'язком —

$$P_1(p)x_{1...n} = Q_1(p)x_{1...n}.$$

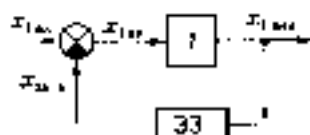


Рис. 3.17

Рівняння самої ланки зворотного зв'язку в загальному вигляді запишеться так:

$$P_n(p)x_{1...n} = Q_n(p)x_{1...n}.$$

звідки

$$x_{1...n} = \frac{Q_n(p)}{P_n(p)} x_{1...n}.$$

Рівняння ланки з урахуванням зворотного зв'язку має вигляд

$$P_1(p)x_{1...n} = Q_1(p)(x_{1...n} \pm x_{1...n}) = Q_1(p) \left(x_{1...n} + \frac{Q_n(p)}{P_n(p)} x_{1...n} \right),$$

де знак «плюс» відповідає додатному, а «мінус» — від'ємному зворотному зв'язку.

Після нескладних перетворень дістанемо

$$[P_1(p)P_n(p) + Q_1(p)Q_n(p)]x_{1...n} = Q_1(p)P_n(p)x_{1...n}.$$

Звідси можна дістати передаточну функцію ланки, охопленої зворотним зв'язком

$$W_1''(p) = \frac{x_{1, \text{пр}}}{x_{1, \text{об}}} = \frac{Q_1(p)P_{\text{об}}(p)}{P_1(p)P_{\text{пр}}(p) \mp Q_1(p)Q_{\text{об}}(p)}$$

Поділивши чисельник і знаменник на $P_1(p)P_{\text{об}}(p)$, матимемо

$$W_1''(p) = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p)W_{\text{об}}(p)}, \quad (3.43)$$

де $W_1(p)$ — передаточна функція самої ланки без урахування зворотного зв'язку; $W_{\text{об}}(p)$ — передаточна функція ланки зворотного зв'язку. Знак «мінус» у даному разі відповідає додатному, а «плюс» — від'ємному зворотному зв'язку.

Відповідний вигляд матиме АФХ ланки зі зворотним зв'язком

$$W_1''(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{1 \mp W_1(j\omega)W_{\text{об}}(j\omega)}. \quad (3.44)$$

3.6

Логарифмічні частотні характеристики

Усі розглянуті вище частотні характеристики окремих ланок і відповідних груп ланок можуть бути побудовані в логарифмічному масштабі. В цьому випадку їх називають *логарифмічними характеристиками*: логарифмічною амплітудно-частотною та логарифмічною фазочастотною.

При побудові логарифмічних характеристик по вертикальній осі відкладають логарифм відповідної величини в децибелах (логарифмічна величина «енерг» вважається дуже великою).

Нагадаємо, що для знаходження відповідної величини в децибелах її десятичний логарифм слід помножити на 20.

Так, амплітудно-частотна характеристика в децибелах матиме вигляд

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega).$$

По горизонтальній осі частоти відкладають також у логарифмічному масштабі — в октавах або декадах (але часто записують значення самої частоти ω). Тому по горизонтальній осі масштаб буде нерів-

номірним. При цьому в початку координат можна відкласти довільне значення $\lg \omega$, але не $\lg$, що відповідає $\omega = 0$, оскільки $\lg 0 = -\infty$.

Одна октава є величиною, що дорівнює різниці логарифмів деякої частоти ω і її подвійного значення:

$$1 \text{ октава} = \lg 2\omega - \lg \omega = \lg 2 + \lg \omega - \lg \omega = \lg 2.$$

Одна декада відповідно дорівнює різниці логарифмів:

$$1 \text{ декада} = \lg 10\omega - \lg \omega = 1.$$

Із викладеного випливає, що інтервал, який дорівнює одній октаві або декаді, не залежить від абсолютного значення частоти ω .

Перевагами логарифмічних характеристик є більш вазаний масштаб, який дає змогу легко лінеаризувати відповідні характеристики і спростити побудову логарифмічних характеристик груп ланок, а також можливість заміни складніших дій (множення, ділення) простішими (додавання, віднімання).

Так, АФХ групи послідовно з'єднаних ланок

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega) \dots W_n(j\omega) = \frac{Q_1(j\omega)Q_2(j\omega) \dots Q_n(j\omega)}{P_1(j\omega)P_2(j\omega) \dots P_n(j\omega)}$$

при використанні натурального масштабу потребує перемноження операторів чисельника і знаменника з подальшим діленням здобутих результатів.

Якщо побудову вести за допомогою логарифмічних характеристик, то можна записати

$$20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg |Q_1(j\omega)| + 20 \lg |Q_2(j\omega)| + \dots + 20 \lg |Q_n(j\omega)| - \\ - 20 \lg |P_1(j\omega)| - 20 \lg |P_2(j\omega)| - \dots - 20 \lg |P_n(j\omega)|.$$

Розрахунки у цьому разі суттєво спрощуються. У зв'язку з цим при побудові логарифмічних характеристик групи ланок (систем) їх побудова зводиться до алгебраїчного додавання відповідних характеристик, що пізніше використовується при дослідженні динаміки САК, при синтезі систем керування. Фазочастотні логарифмічні характеристики будуються як залежність $\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$. При цьому

на вертикальній осі відкладають фазу в градусах або радіанах, а по горизонтальній — ω в логарифмічному масштабі.

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика аперіодичної ланки першого порядку. Передаточна функція цієї ланки

$W(p) = \frac{k}{T_p p + 1}$. АФХ після позбавлення від уявної величини в знаменнику і виділення дійсної і уявної частин (характеристик) матиме вигляд

$$W(j\omega) = \frac{k(1 - jT_p\omega)}{(T_p\omega + 1)(1 - jT_p\omega)} = U(\omega) + jV(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{kT_p\omega}{1 + T^2\omega^2},$$

а амплітудно-частотна характеристика

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{[U(\omega)]^2 + [V(\omega)]^2} = \sqrt{\left(\frac{k}{1 + T^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{kT_p\omega}{1 + T^2\omega^2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{k^2(1 + T^2\omega^2)}{(1 + T^2\omega^2)^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}. \end{aligned}$$

У логарифмічних одиницях (дБ) вона запишеться так:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2}.$$

Вираз $\sqrt{1 + T^2\omega^2}$ є модулем комплексної величини $1 + jT\omega$ і тому можна записати

$$20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg |1 + jT\omega|. \quad (3.45)$$

Враховуючи, що $20 \lg k$ є стала величина, проаналізуємо другу складову $N = 20 \lg |1 + jT\omega|$ при різних значеннях ω .

При малих частотах $T\omega \ll 1$, $N = 20 \lg 1 = 0$. При великих частотах $T\omega \gg 1$ складову $N \approx 20 \lg |jT\omega| = 20 \lg T\omega$ є прямою, що нахилена під деяким кутом відносно осі.

Граничною частотою між зоною малих і великих частот є частота, при якій виконується умова $\omega T = 1$, звідки $\omega = \frac{1}{T}$.

Побудову величини $N = 20 \lg |1 + jT\omega|$ наведено на рис. 3.18, а. Накил прямої BC , що відповідає частотній характеристиці $20 \lg \omega T$, на одну октаву можна обчислити як різницю $20 \lg 2\omega T - 20 \lg \omega T = 20 \lg 2 = 20 \cdot 0,3 = 6$ дБ. Дійсний вигляд характеристики, згідно з яким при $\omega T = 1$ $N = 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2} = 20 \lg \sqrt{2} = 3$ дБ, показано на рис. 3.18, а штриховою лінією.

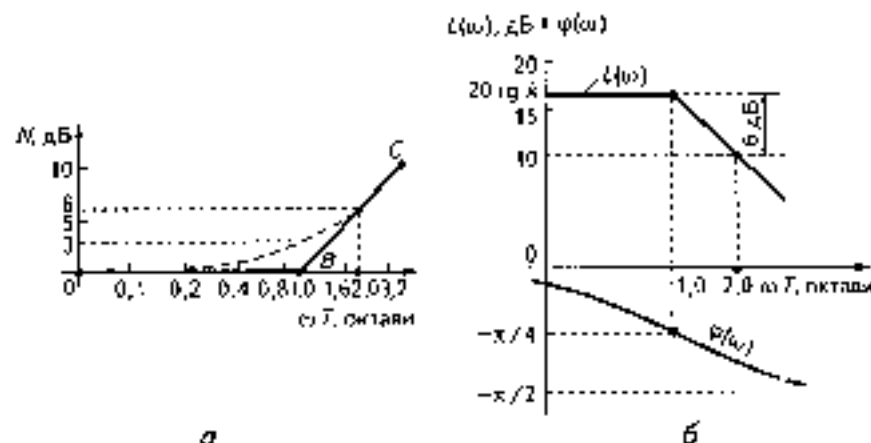


Рис. 3.18

За допомогою виразу (3.45) на рис. 3.18, б побудовано записну логарифмічну амплітудно-частотну характеристику аперіодичної ланки першого порядку. При цьому лінійзовану характеристику часто називають *асимптотичною логарифмічною характеристикою*.

Відповідну фазочастотну логарифмічну характеристику будують за допомогою виразу $\varphi(\omega)$. При цьому на вертикальній осі відкладають фазу в натуральному масштабі (в радіанах або в градусах), а частоту ω — по горизонтальній осі в логарифмічному масштабі. Характеристика будується в четвертому квадранті.

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика ідеальної інтегрувальної ланки. Передаточною функцією інтегрувальної ланки $W(p) = k \frac{1}{p}$, а її амплітудно-фазова частотна характеристика

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega} \quad (\text{рис. 3.19, а}).$$

Амплітудно-частотна характеристика

$$A(\omega) = \sqrt{[U(\omega)]^2 + [V(\omega)]^2} = \sqrt{\left(\frac{k}{\omega}\right)^2} = \frac{k}{\omega}.$$

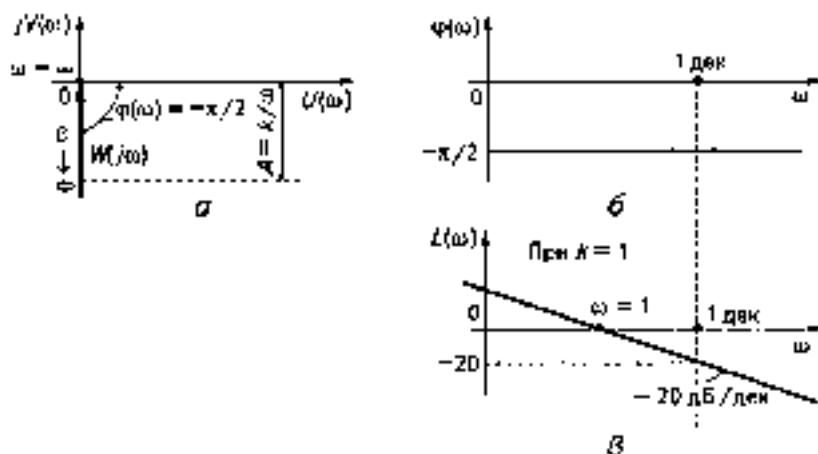


Рис. 3.19

це

$$U(\omega) = 0, \quad V(\omega) = -j \frac{k}{\omega}.$$

Фазочастотна характеристика, яка в загальному випадку записується так: $\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$, у даному разі при $U(\omega) = 0$ матиме вигляд $\varphi(\omega) = -90^\circ$ (рис. 3.19, б).

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика інтегруючої ланки

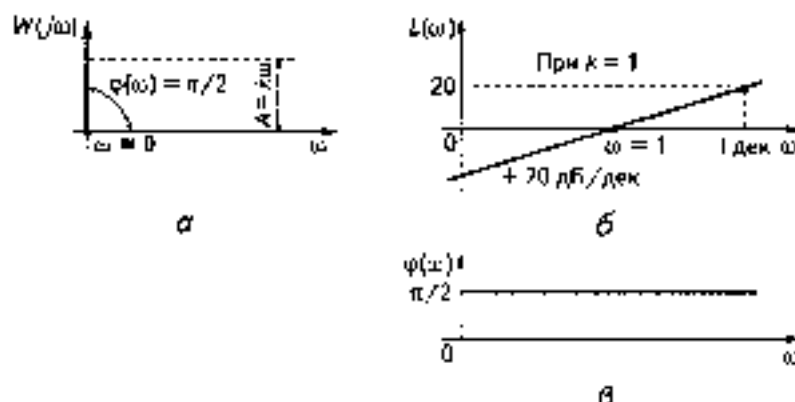
$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega.$$

При $k = 1$ $20 \lg k = 0$, $20 \lg A(\omega) = -20 \lg \omega$. У цьому разі вона являє собою лінійну залежність, яка проходитьиме другим, першим і четвертим квадранти, перетворюючись на нуль при $\omega = 1$ (рис 3.19, в). Її нахил дорівнює -20 дБ/дек.

Логарифмічні характеристики ідеальної диференціальної ланки. Для цієї ланки передаточна функція $W(p) = k p$, а $A \Phi X$ —

$$W(j\omega) = k j\omega \Rightarrow U(\omega) = jV(\omega) = 0 + jk\omega, \quad A = \sqrt{(k\omega)^2} = k\omega.$$

Як зазначалося раніше, характеристика в даному разі — це пряма, що збігається з уявною віссю в першому квадранті (рис. 3.20, а). Фазочастотну характеристику наведено на рис. 3.20, в.

Рис. 3.20

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика має вигляд

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k\omega = 20 \lg k + 20 \lg \omega.$$

Ця характеристика є прямою, яка на відміну від інших частотних логарифмічних характеристик має додатний нахил 20 дБ/дек (рис. 3.20, в).

Логарифмічні частотні характеристики ланки другого порядку. Залежно від коренів характеристичного рівняння ланка може бути апериодичною ланкою другого порядку, якщо обидва корені квадратного характеристичного рівняння дійсні і від'ємні, або коливаюальною стійкою ланкою при комплексних із від'ємною дійсною частотою коренів характеристичного рівняння.

Логарифмічні характеристики апериодичної ланки другого порядку. Передаточна функція ланки

$$W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}$$

при $T_2 > 2T_1$ (умова дійсних, від'ємних коренів характеристичного рівняння).

Цю передаточну функцію можна записати в деякому іншому вигляді:

$$W(p) = \frac{k}{T_1 T_4 p^2 + (T_1 + T_4) p + 1}.$$

$$\text{або } T_1 T_2 = T_1^2; T_3 + T_4 = T_2$$

Розклавши знаменник на множники, дістанемо

$$W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Амплітудно-фазова частотна характеристика запишеться так:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k}{(1 + jT_1\omega)(1 + jT_2\omega)} = \\ &= k \frac{(1 - jT_1\omega)(1 - jT_2\omega)}{(1 + jT_1\omega)(1 + jT_2\omega)(1 - jT_1\omega)(1 - jT_2\omega)} = k \frac{(1 - jT_1\omega)(1 - jT_2\omega)}{(T_1^2\omega^2 + 1)(T_2^2\omega^2 + 1)} = \\ &= k \left[\frac{1}{1 + T_1^2\omega^2} - j \frac{T_1\omega}{1 + T_1^2\omega^2} \right] \cdot \left[\frac{1}{1 + T_2^2\omega^2} - j \frac{T_2\omega}{1 + T_2^2\omega^2} \right] = \\ &= k [U_1(\omega) - jV_1(\omega)][U_2(\omega) - jV_2(\omega)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= k \sqrt{[U_1(\omega)]^2 + [V_1(\omega)]^2} \sqrt{[U_2(\omega)]^2 + [V_2(\omega)]^2} = \\ &= k \sqrt{\frac{1}{(1 + T_1^2\omega^2)^2}} \sqrt{\frac{1}{(1 + T_2^2\omega^2)^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + T_1^2\omega^2} \sqrt{1 + T_2^2\omega^2}} \end{aligned}$$

Фазочастотна характеристика матиме вигляд

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= -\operatorname{arctg} \frac{V_1(\omega)}{U_1(\omega)} - \operatorname{arctg} \frac{V_2(\omega)}{U_2(\omega)} = -\operatorname{arctg} \frac{T_1\omega(1 + T_2^2\omega^2)}{1 + T_1^2\omega^2} - \\ &= -\operatorname{arctg} \frac{T_1\omega(1 + T_2^2\omega^2)}{1 + T_1^2\omega^2} = -\operatorname{arctg} T_1\omega - \operatorname{arctg} T_2\omega, \end{aligned}$$

а логарифмічна амплітудно-частотна характеристика —

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{T_1^2\omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_2^2\omega^2 + 1}$$

При $k = 1$ результуюча логарифмічна амплітудно-частотна характеристика

$$L_2 = 20 \lg A(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + T_1^2\omega^2} - 20 \lg \sqrt{1 + T_2^2\omega^2} = A_1 + A_2$$

є сума двох амплітудно-частотних логарифмічних характеристик аперіодичних ланок першого порядку зі значеннями частот сполуки

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2}.$$

Складові L_1 і L_2 результуючої логарифмічної характеристики L_c показано на рис. 3.21, а—в.

При $k \neq 1$ результуюча характеристика розміщуватиметься в першому і другому квадранті з урахуванням $20 \lg k - a$ і матиме вигляд, показаний на рис. 3.21, в штрихом. Фазочастотну характеристику наведено на рис. 3.21, г.

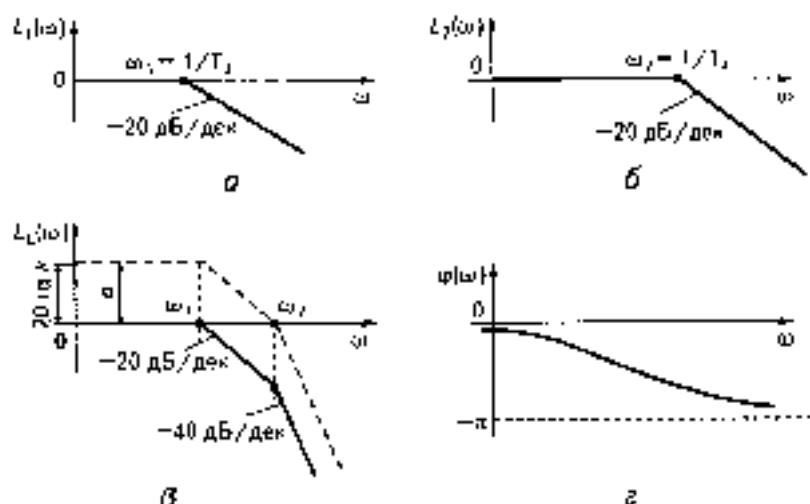


Рис. 3.21

Логарифмічні характеристики коливальної ланки другого порядку
Амплітудно-фазова частотна характеристика в цьому випадку матиме вигляд

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k}{T_1^2 \omega^2 + 1 + jT_2 \omega} = \frac{k[(1 - T_1^2 \omega^2) - jT_2 \omega]}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2} = \\ &= \frac{k(1 - T_1^2 \omega^2)}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2} - j \frac{kT_2 \omega}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2} = U(\omega) + jV(\omega), \end{aligned}$$

а амплітудно-частотна характеристика —

$$A(\omega) = k \sqrt{[I^2(\omega)]^2 + [V(\omega)]^2}$$

або

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}}. \quad (3.16)$$

Фазочастотна характеристика запишеться так:

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{I(\omega)} = -\operatorname{arctg} \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2}. \quad (3.17)$$

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика має вигляд

$$L_\omega = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}.$$

Знайдемо асимптоти цієї характеристики: при $\omega \rightarrow 0$

$$20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg 1 = 20 \lg k;$$

при $\omega \rightarrow \infty$ головне значення матиме член, в який ω входить в четвертому степені, тому наближено можна записати

$$20 \lg A(\omega) \approx 20 \lg k - 2 \cdot 20 \lg T_1 \omega = 20 \lg k - 40 \lg T_1 \omega \rightarrow \dots$$

При $k = 1$ амплітудно-частотні логарифмічні характеристики коливної ланки другого порядку показано на рис. 3.22, а, а фазо-частотні — на рис. 3.22, б. Амплітудно-частотні характеристики $L_\omega = 20 \lg A(\omega)$ побудовано при різних співвідношеннях $T_2/2T_1$, яке, як відомо, визначає коливальні та демпфувальні якості ланки.

При значеннях $T_2/2T_1$, близьких до 0,7...0,75, маємо асимптотичну характеристику, близьку до позначеної цифрою 0 на рис. 3.22, а, яка складається з двох частин — прямої, що збігається з горизонтальною віссю до частоти $\omega = \frac{1}{T_1}$, і прямої з нахилом — 40 дБ/дек.

При $1 > \frac{T_2}{2T_1} > 0,5$ відхилення логарифмічних характеристик від асимптотичної незначне, але при $0,5 > \frac{T_2}{2T_1} > 0$ ці відхилення різко

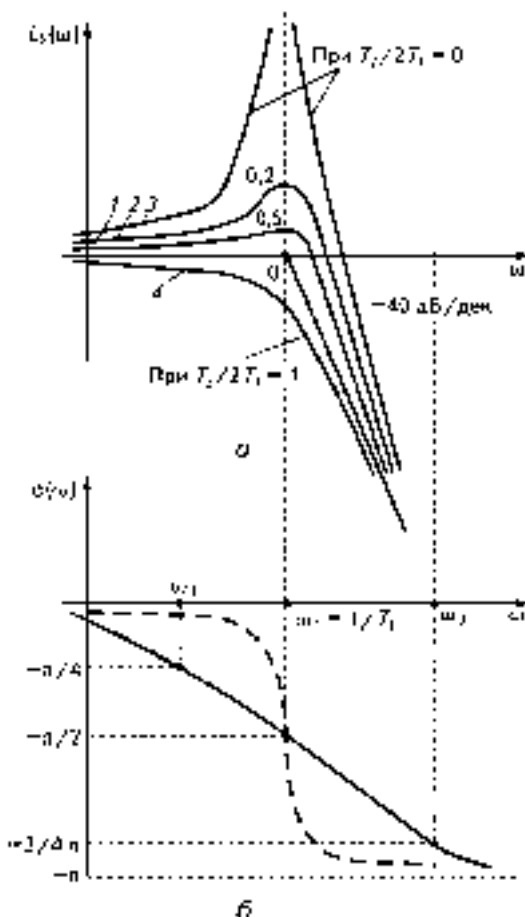


Рис. 3.22

збільшуються, що відображає зростання коливальних і зменшення демпфувальних властивостей ланки.

Знавідомо значення $A(\omega)$ в точці з $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$:

$$A(\omega) = k \frac{T_1}{T_2} \quad \text{і відхилення}$$

від асимптоти логарифмічної характеристики при $k = 1$: $\Delta L_2 = 20 \lg \frac{T_1}{T_2}$. При

випадку демпфувальних властивостей ($T_2 = 0$) $\Delta L_2 \rightarrow \infty$.

Отже, на відміну від аперіодичної ланки друго го порядку коливальна ланка має амплітудно-частотну характеристику з резонансним піком з коефіцієнтом підсилення амплітуди, який може бути значно більшим за статичний коефіцієнт підсилення ланки.

Лінійна фазочастотна характеристика $\phi(\omega)$ побудована на рис. 3.22, б. Вона, як показано штриховою лінією, відносно зменшення демпфувальних властивостей ланки.

Логарифмічна характеристика підсилювальної ідеальної ланки. Для неї амплітудно-частотна характеристика має суто теоретичне значення, бо вона не залежить від частоти

$$L_c = 20 \lg k = \text{const}; \quad \varphi(\omega) = 0.$$

Логарифмічні характеристики інерційних неідеальних диференціювальних та інтегрувальних ланок. Логарифмічні характеристики інерційної диференціювальної ланки. Передаточна функція інерційної диференціювальної ланки має вигляд

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}, \quad (3.48)$$

а амплітудно-фазова характеристика —

$$W(j\omega) = \frac{kj\omega}{Tj\omega + 1} = U(\omega) + jV(\omega) = \frac{kj\omega(1 - jT\omega)}{1 + T^2\omega^2} = \frac{kT\omega^2 + jk\omega}{1 + T^2\omega^2}.$$

Дійсна частотна характеристика запишеться так

$$U(\omega) = \frac{kT\omega^2}{1 + T^2\omega^2},$$

а уявна —

$$V(\omega) = \frac{k\omega}{1 + T^2\omega^2}.$$

Здаючи значення ω від 0 до $+\infty$, можна побудувати АФХ $W(j\omega)$, яка є півколом у першому квадранті (рис. 3.23, а).

Амплітудно-частотна характеристика диференціювальної ланки має вигляд

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{[U(\omega)]^2 + [V(\omega)]^2} = \sqrt{\left[\frac{kT\omega^2}{1 + T^2\omega^2} \right]^2 + \left[\frac{k\omega}{1 + T^2\omega^2} \right]^2} = \\ &= \frac{k\omega}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}, \end{aligned}$$

а фазочастотна

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \arctg \frac{\omega k}{kT\omega^2} = \arctg \frac{1}{\omega T} = 90^\circ - \arctg T\omega$$

(рис. 3.23, б).

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика запишеться так:

$$L_A = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2}$$

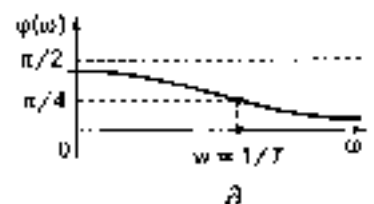
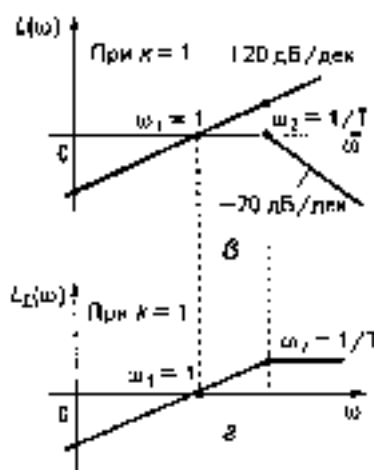
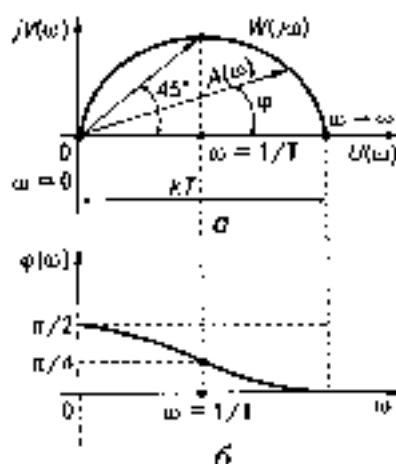


Рис. 3.23

Отже, вона складається з трьох характеристик, які вже було розглянуто раніше. При $k = 1$

$$L_2 = 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}.$$

Ці окремі логарифмічні характеристики показано на рис. 3.23, в, а їх алгебрична сума — на рис. 3.23, з.

Логарифмічну фазочастотну характеристику $\phi(\omega)$ наведено на рис. 3.23, д.

Логарифмічні характеристики інерційної інтегруючої ланки (інерційного інтегровального зв'язу) мають вигляд, передаточна функція якої

$$W(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)} \quad (3.49)$$

Її амплітудно-фазова частотна характеристика

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega(Tj\omega + 1)} = \frac{k(1 - jT\omega)}{-\omega(1 + T^2\omega^2)} = -\frac{kTj\omega - jk}{\omega(1 + T^2\omega^2)},$$

де лінійна частотна характеристика її уявна виражаються відповідно формулами

$$U(\omega) = -\frac{kT}{1 + T^2\omega^2}; \quad V(\omega) = \frac{k}{\omega(1 + T^2\omega^2)}.$$

Амплітудно-частотна характеристика має вигляд

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{[U(\omega)]^2 + [V(\omega)]^2} = \sqrt{\frac{k^2 T^2 \omega^2}{\omega^2 (T^2 \omega^2 + 1)^2} + \frac{k^2}{\omega^2 (T^2 \omega^2 + 1)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{k^2 (T^2 \omega^2 + 1)}{\omega^2 (T^2 \omega^2 + 1)^2}} = \frac{k}{\omega \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}}, \end{aligned}$$

а фазочастотна

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \arctg \frac{-\frac{k}{\omega(T^2\omega^2 + 1)}}{-\frac{kT}{(1 + T^2\omega^2)}} = \arctg \frac{1}{T\omega} = -90^\circ - \arctg T\omega$$

Відповідну амплітудно-фазову частотну характеристику показано на рис. 3.24, а.

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика цієї ланки

$$L_a = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2}$$

при $k = 1$ складається з двох характеристик, наведених на рис. 3.24, б і є результатом логарифмічної характеристики побудовано на рис. 3.24, в, а відповідну фазочастотну логарифмічну характеристику — на рис. 3.24, г.

Як бачимо, інерційність даної ланки збільшує відставання фази на величину, більшу за -90° . При частотах, менших $\omega = \frac{1}{T}$, ця ланка близька до ідеально інтегрувальної ланки

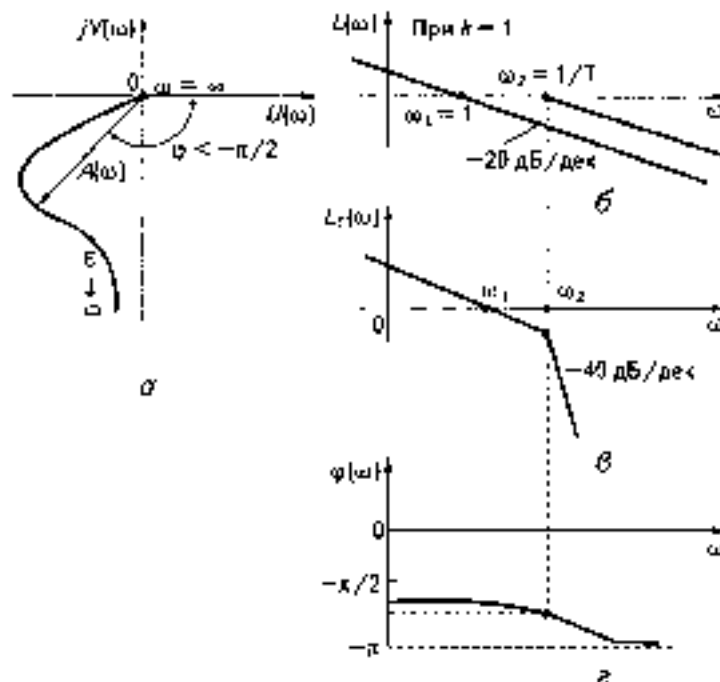


Рис. 3.24

Логарифмічні характеристики ідеальної безінерційної ланки при введенні похідної. Передаточна функція має вигляд

$$W(p) = k(1 - pk_1),$$

де k — передаточний статистичний коефіцієнт безінерційної ланки, k_1 — передаточний коефіцієнт у рівнянні похідної.

Знайдемо для цієї ланки характеристики:
амплітудно-фазова

$$W(j\omega) = k(1 - j\omega k_1);$$

амплітудно-частотна

$$A = k\sqrt{1 + k_1^2 \omega^2};$$

фазочастотна

$$\phi(\omega) = \arctg k_1 \omega;$$

логарифмічна амплітудно-частотна

$$L_{\Sigma}(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{1 + k_1^2 \omega^2}.$$

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика при $k = 1$ показана на рис. 3.25, а, а логарифмічна фазочастотна характеристика — на рис. 3.25, б.

При низьких частотах ($\omega < 1/k_1$) ця ланка близька до ідеальної підсилювальної ланки, а при високих частотах ($\omega > 1/k_1$) — до ідеальної диференціювальної ланки. Випереження за фазою зростає зі збільшенням частоти.

Знаючи правила побудови логарифмічних характеристик окремих ланок, а також результати логарифмічних характеристик, можна побудувати характеристики для групи ланок.

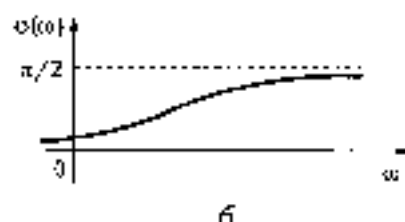
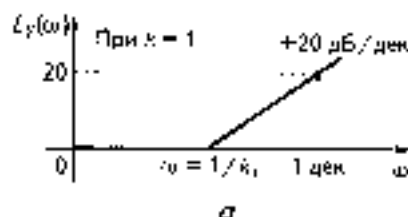


Рис. 3.25

Побудова логарифмічних характеристик групи ланок.

Найчастіше виникає необхідність побудови логарифмічної характеристики розімкнутої системи. (Як буде показано далі, в ТАК є методи, за допомогою яких за виглядом частотних характеристик розімкнутої системи можна визначити динамічні властивості замкнутої системи.)

Відома, що передаточна функція розімкнутої системи з n ланок (як передаточна функція групи послідовно з'єднаних ланок) є добутком передаточних функцій кожної з цих ланок:

$$W(p) = W_1(p)W_2(p) \dots W_n(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p).$$

Аналогічний вигляд матиме і амплітудно-фазова частотна характеристика розімкнутої системи:

$$W(j\omega) = \prod_{i=1}^n W_i(j\omega).$$

Як було показано раніше, при побудові результуючих частотних характеристик для групи послідовно з'єднаних ланок результуючий модуль (амплітудно-частотна характеристика розімкнутої системи) можна дістати як добуток модулів усіх ланок, а результуючу фазочастотну характеристику — як суму фазочастотних характеристик вхідних ланок.

Отже, можна записати

$$A(\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega); \quad \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega)$$

Згідно з наведеними вище формулами при побудові логарифмічної амплітудно-частотної характеристики

$$L_2(\omega) = 20 \lg A_1(\omega) + 20 \lg A_2(\omega) + \dots + 20 \lg A_n(\omega).$$

Загальною методикою побудови результуючої характеристики повинає в знаходженні логарифмічної характеристики окремо кожної ланки з наступним додаванням ординат при відповідних частотах.

Як приклад розглянемо побудову логарифмічної амплітудно-частотної характеристики розімкнутої системи, що складається з чотирьох ланок з передаточними функціями:

- безінерційної підсилювальної $W_1(p) = k_1$;
- аперіодичної першого порядку $W_2(p) = \frac{k_2}{1 + T_2 p}$ (об'єкт керування);
- аперіодичної першого порядку $W_3(p) = \frac{k_3}{1 + T_3 p}$;
- інтегрувальної $W_4(p) = \frac{k_4}{p}$ (при $k_4 = 1$ $W_4(p) = 1/p$).

Відповідні логарифмічні амплітудно-частотні характеристики $L_1(\omega)$, $L_2(\omega)$, $L_3(\omega)$, $L_4(\omega)$ були побудовані раніше (рис. 3.26, а, криві 1, 2, 3, 4). На рис. 3.26, б наведено відповідні логарифмічні фазочастотні характеристики цих ланок $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$, $\varphi_3(\omega)$ (для першої ланки $\varphi_1(\omega) = 0$). Результуюча логарифмічна амплітудна характеристика всіх чотирьох ланок $L_2(\omega)$ наведена на рис. 3.26, в, а результуюча логарифмічна фазочастотна характеристика $\varphi_2(\omega)$ — на рис. 3.26, г.

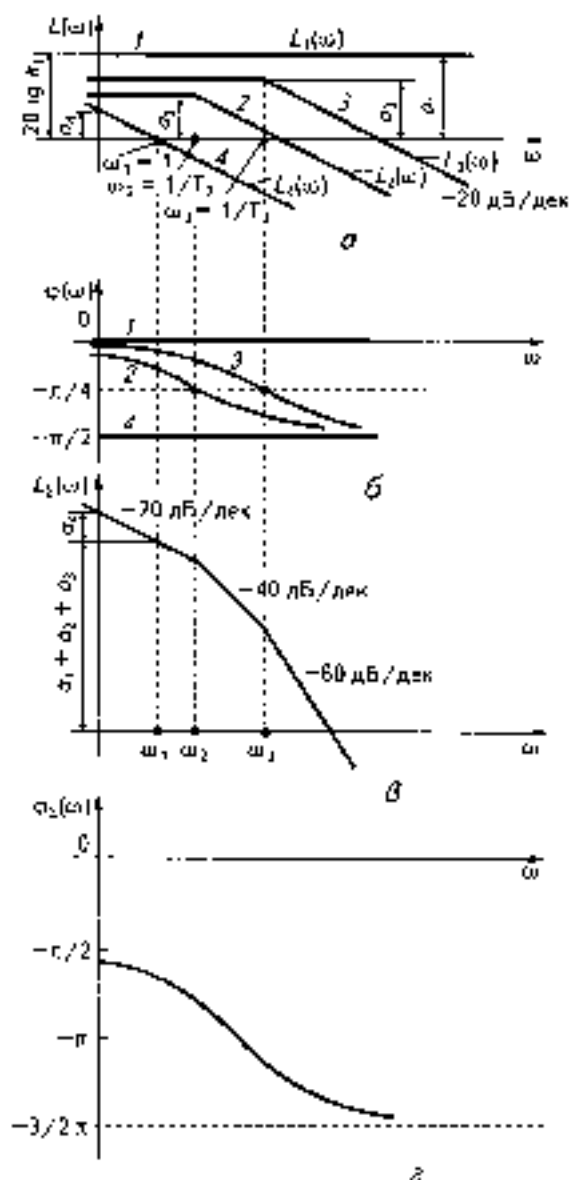


Рис. 3.26

3.7

Мінімально- та немінімально-фазові ланки

Крім розглянутої раніше класифікації, в теорії автоматичного керування ланки класифікують також залежно від вигляду, а точніше, від особливостей передаточних функцій. Ця класифікація базується на поняттях нулів і полюсів передаточних функцій.

Якщо передаточну функцію записати у вигляді

$$W(p) = \frac{Q(p)}{P(p)},$$

то нулями передаточної функції називають корені рівняння $Q(p) = 0$, а полюсами — корені рівняння $P(p) = 0$, де $Q(p)$; $P(p)$ — поліноми від p відносно зростаючих і змінюючих частин рівнянь динаміки.

Нулем, нуль — таке значення кореня чисельника передаточної функції, за яких передаточна функція $W(p)$ дорівнює нулю. Полюсом — таке значення кореня знаменника передаточної функції, за яких вона перетворюється на нескінченність. Якщо всі нулі та полюси передаточної функції ланки мають від'ємні або рівні нулю дійсні частини, то така ланка називається *мінімально-фазовою*.

Немінімально-фазовою називають ланку, в якій серед нулів і полюсів хоча б один, який має додатну дійсну частину. Всі розглянуті раніше типи ланки, крім ланки з чистим затриманням та постійної аперіодичної ланки першого порядку, є мінімально-фазовими.

Передаточні функції немінімально-фазових ланок матимуть вигляд

$$W(p) = \frac{k}{T_p - 1}, \quad W(p) = k(T_p - 1), \quad W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 - T_2 p - 1};$$

$$W(p) = k(T^2 p^2 - T_2 p - 1); \quad W(p) = k e^{-\tau p}.$$

Амплітудно-фазовий характеристика, наприклад, ланки з чистим затриманням, згідно з формулою Ейлера,

$$W(j\omega) = k(\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau),$$

що в комплексній площині є колом з осiami $U(\omega) = k \cos \omega\tau$, $V(\omega) = -k \sin \omega\tau$, які є мінімальне дельтою δ у частотних характеристиках.

Амплітудно-частотна характеристика $A(\omega)$ в загальному випадку, при $k \neq 1$,

$$A(\omega) = k \sqrt{(\cos \omega \tau)^2 + (\sin \omega \tau)^2} = k,$$

а фазовий зсув

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}.$$

Амплітудно-фазова характеристика нестійкої апериодичної ланки першого порядку

$$W(j\omega) = \frac{k(-T\omega - 1)}{(T\omega - 1)(-T\omega - 1)} = \frac{k(-1 - jT\omega)}{1 + T^2\omega^2},$$

а фазово-частотна характеристика $U(\omega) = -\frac{k}{1 + T^2\omega^2}$, оскільки $V(\omega) = -\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}$.

Амплітудно-частотна характеристика немінімально-фазової ланки являють нестійкої апериодичної ланки першого порядку відрізняється від відповідної характеристики стійкої апериодичної ланки першого порядку лише знаком $U(\omega)$. Тому $W(j\omega)$ розміщатиметься в третьому, а не в першому квадранті комплексної площини. Фазова характеристика цієї ланки $\varphi(\omega) = \arctg T\omega - \pi$. Характерною рисою немінімально-фазових ланок є те, що зсув фази у них більший, ніж у відповідних мінімально-фазових ланок. Якщо для мінімально-фазової апериодичної ланки зсув фази не перевищує $\frac{\pi}{2}$, то відповідні фазові частотні характеристики немінімально-фазової ланки досягають за абсолютною величиною значення π .

3.8

Рівняння, передаточні функції та частотні характеристики систем автоматичного керування

Рівняння, передаточна функція та амплітудно-фазова характеристика розімкнутої системи. Розімкнута система в ТАК здебільшого розглядається як окремий випадок стану замкнутої сис-

темплі, коли зворотний зв'язок у системі відсутній і вихідна величина об'єкта керування не падає назад на вхід системи.

У цьому разі функціональна схема розімкнutoї системи складається з послідовно з'єднаних ланок і не має ніяких принципових відмінностей від відповідної схеми. Наведено на рис. 1.

Водночас рівняння, перетворені функція з відповідно частотні характеристики розглянутої системи використовуються й ТАК як при розгляді питань теорії, так і самостійно.

Залишаючи рівняння послідовно з'єднати ланок у вигляді:

$$\begin{aligned} \text{перша ланка} & P_1(p)x_{1,m} = Q_1(p)x_{1,m}; \\ \text{друга ланка} & P_2(p)x_{2,m} = Q_2(p)x_{2,m}; \\ & \dots \dots \dots \quad \dots \dots \dots \quad \dots \dots \quad (3.50) \\ (n-1)\text{-ня ланка} & P_{n-1}(p)x_{n-1,m} = Q_{n-1}(p)x_{n-1,m}; \\ n\text{-на ланка} & P_n(p)x_{n,m} = Q_n(p)x_{n,m}. \end{aligned}$$

де $P_1(p), P_2(p), \dots, P_n(p)$ і $Q_1(p), Q_2(p), \dots, Q_m(p)$ — поліноми від p відповідно лівих і правих частин рівнянь лінійного типу.

Диференціальне рівняння динаміки розглянутої системи запи-
деться у вигляді:

$$x_{i+1} = f(x_i).$$

Його можна дістати, підставляючи послідовно значення вихідних величин, отриманих із рівнянь попередньої ланки, в рівняння наступної ланки. Наприклад, підставляючи $x_{1, \text{max}} = \frac{Q_1(p)}{P_1(p)} x_{1, \text{н}}$, одержане з рівняння першої ланки, в праву частину рівняння другої ланки, дістанемо рівняння двохмікн другої ланки:

$$P_1(y)x_{1, \text{max}} = Q_1(y) \frac{Q_1(y)}{P_1(y)} x_{1, \text{max}}.$$

2514

$$P_1(\rho)P_2(\rho)x_{1,\dots} = Q_1(\rho)Q_2(\rho)x_{1,\dots}$$

Аналізуючи дані з-їз зразків різноманітних натуральних вибірок

$$P_1(p)P_2(p)\dots P_n(p)x_{1,\dots,n} = Q_1(p)Q_2(p)\dots Q_n(p)y_{1,\dots,n}$$

Позначивши добуток поліномів ліній частин усіх рівнянь $P_1(\rho)P_2(\rho) \dots P_d(\rho) = P(\rho)$, в правих частині $Q_1(\rho)Q_2(\rho) \dots Q_d(\rho) = Q(\rho)$, дістанемо рівняння дифракції розіскнутої системи у вигляді:

$$P(p)x_{\text{вих}} = Q(p)x_{\text{вх}}. \quad (3.51)$$

Рівняння незалежних коливань розімкнутої системи

$$P(p)x_{\text{вих}} = 0, \quad (3.52)$$

а характеристичне рівняння –

$$P(p) = 0. \quad (3.53)$$

Передаточну функцію розімкнутої системи можна дістати на основі рішення розімкнутої системи

$$W(p) = \frac{x_{\text{вих}}}{x_{\text{вх}}} = \frac{Q(p)}{P(p)} = \frac{Q_1(p)Q_2(p) \cdot \dots \cdot Q_n(p)}{P_1(p)P_2(p) \cdot \dots \cdot P_n(p)} = W_1(p)W_2(p) \dots W_n(p), \quad (3.54)$$

тобто передаточна функція системи є добутком передаточних функцій усіх її ланок.

Амплітудно-фазова характеристика розімкнутої системи є добутком амплітудно-фазових характеристик відповідних ланок:

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega) \cdot \dots \cdot W_n(j\omega). \quad (3.55)$$

Рівняння динаміки, передаточна функція й амплітудно-фазова характеристика зв'язаних замкнутих систем. Функціональну схему замкнутої системи з n ланок показано на рис. 3.27. Об'єктом автоматичного регулювання є ланка n , на яку діє зовнішнє збурення $F(t)$. Регулювальний параметр — вихідна величина об'єкта — $x_{\text{вих}}$.

Рівняння динаміки. Система рівнянь окремих ланок у складі замкнутої системи легко відрізняється від системи рівнянь цих самих ланок розімкнутої раніше розімкнутої системи.

Ці відмінності полягають у тому, що в даному разі необхідно враховувати:

- дію збурення $F(t) = F$ на об'єкт регулювання;

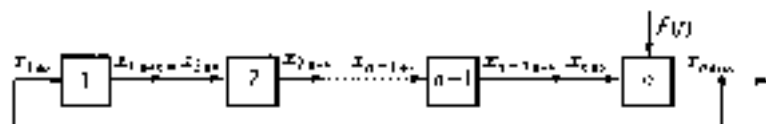


Рис. 3.27

де $x_1, \dots, x_n$ — змінні системи; $f(t), \dots, f_s(t)$ — збурення;
 $d_{11}(p), \dots, d_{nn}(p)$ — оператори ланок системи.

У загальному вигляді

$$d_A(p) = a_n p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n,$$

де $p = \frac{d}{dt}$; $a_1, \dots, a_n$ — коефіцієнти, що визначаються параметрами відповідних ланок.

Розглядаючи наведені вище рівняння ланок системи як алгебричні і викидаючи для спрощення запису символ p , маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k & \dots & x_n \\ d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nk} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3.66)$$

Для знаходження величини Δ_k ступінь загального визначника, що відповідає регульованому параметру x_k , треба замінити відповідними збуреннями (якщо в деяких ланках вони відсутні, то записують нуль).

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k & \dots & x_n \\ d_{11} & d_{12} & \dots & f_1(t) & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & f_2(t) & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & f_n(t) & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3.67)$$

Рівняння незбуджених коливань згідно з теоремою Крамера має вигляд

$$\Delta x_k = 0, \quad (3.68)$$

а характеристичне рівняння

$$\Delta = 0. \quad (3.69)$$

Рівняння замкнутої системи в нормальній формі Коші. Рівняння замкнутої системи

$$a_1 \frac{d^1 x}{dt^1} + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \dots + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_n x = b_0 \frac{d^m f}{dt^m} + \dots + b_{m-1} \frac{df}{dt} + b_m f$$

може бути записано у вигляді систем рівнянь ланок першого та другого порядку (у принципі можливий і вищий порядок рівнянь ланок). Рівняння другого порядку завжди можна замінити двома рівняннями першого порядку.

Наприклад, якщо рідняння другого порядку для деякої лінійної функції виглядає

$$a_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a_1 \frac{dx_1}{dt} + a_2 x_1 = b x_2;$$

то, позначивши $\frac{dx_1}{dt} = x_{-1}$, діставимо рівняння першого порядку

$$a_1 \frac{dx}{dt} = b_1 x_2 - a_1 x_1 - a_2 x_1.$$

Отже, можна дістати рівняння замкнутої системи у вигляді системи рівнянь першого порядку (що називаються *рівняннями в нормальній формі Коші*):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (3.70)$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$ — координати стану системи. (У правій частині рівнянь деякі коефіцієнти можуть дорівнювати нулю.)

Система рівнянь у нормальній формі Коші в даний раз є математичною моделлю системи. Цю систему рівнянь можна записати в матричній формі:

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

де

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

— матриця коефіцієнтів;

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

— вектор-стовпець.

Характеристичне рівняння замкнутої системи

$$\det [A - pE] = 0,$$

де p — змінна в характеристичному рівнянні замкнутої системи у вигляді

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0;$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

— одинична матриця.

3.9

*Приклад знаходження рівняння динаміки
системи стабілізації напруги
генератора постійного струму*

Розглянемо систему автоматичного керування, спрощену принципову схему якої зображено на рис. 3.28, де Γ — генератор, який є об'єктом автоматичного керування з напругою U_{Γ} , що є регульованим параметром; ЕМ — обмотка

електромагніту; Я — якорь електромагніту; R — регулювальний резистор у колі обмотки збудження генератора; ГД — масляний демпфер, поршень якого П має оливи; ПР — пружина; R_2 — еквівалентний опір споживачів, який характеризує навантаження генератора.

При змінному навантаженні генератора з незмінної швидкості його обертання в первинному джерелі (на схемі не показаний) відповідним чином змінюється струм I_1 і напруга генератора

$U_1 = E - I_1 R_2$, де R_2 — активний опір якорного кола генератора; $E = k\Phi\omega$ — електрорушійна сила генератора (k — стала генератора; $\Phi = c I_1$ — магнітний потік обмотки збудження зі струмом I_1 , при сталій c).

При $\omega = \text{const}$ $E = k_1 \Phi$ може змінюватися тільки за рахунок зміни напруги збудження U_2 .

Для стабілізації напруги генератора при зміні його навантаження потрібно відповідним чином змінювати напругу U_2 , що спричинює зміну струму I_2 й електромагнітного потоку генератора Φ . Наприклад, якщо навантаження генератора збільшується, що зумовлює зменшення напруги U_1 (напруги на обмотці електромагніта U_m), то сила притягання електромагніта F_2 зменшується, і під дією пружини ПР якорь електромагніту переміщується вниз. При цьому опір резистора R зменшується, відповідно зростає напруга збудження U_2 , струм I_2 , потік Φ і напруга генератора U_1 збільшується. При зменшенні навантаження генератора напруга зростає. При цьому завдяки відповідній дії системи автоматичного керування напруга збудження U_2 зменшується, що стабілізує напругу генератора U_1 .

Згідно з викладеним раніше розглянута система автоматичного керування є звичайною замкнутою системою стабілізації, в якій реак-

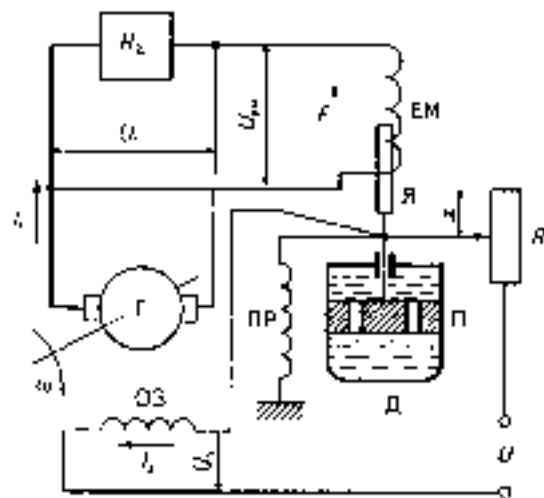


Рис. 3.28

лізовано принцип керування за відхиленням. Крім того, позначимо відповідовачи в ланцюгу керування і тому є системою прямої дії.

Розглянувши принцип роботи окремих елементів і системи в цілому, перейдемо до складання функціональної схеми.

При цьому треба мати на увазі, що принциповим є відношення розміщення елементів згідно з їх дією один на одного й узгодження вхідних і вихідних величин.

Тому об'єкт керування може бути розміщений у будь-якому місці функціональної схеми. Але здебільшого прийнято розміщувати його в правій частині схеми. Дотримуватимемося цього і далі. Згідно з наведеними на принциповій схемі зображеннями і функціональним призначенням окремих елементів зрівняємо виконання завдань автоматичного керування

функціональна схема буде такою, як показано на рис. 3.29.

У схемі, наведеній на рис. 3.28, разом сукупність елементів, до якої нале-

жить якорь електромагніту, поришень демпфера Д, пружина ПР та двигунок реостата R, можна розглядати як єдиний елемент КЕ (див. рис. 3.29), який виконує керуючі функції в функціональній схемі. Інші позначення на рис. 3.29 такі: F_m — сила тяги електромагніту; x — переміщення двигунка реостата; i/i_0 — «бурення генератора, яке в даному разі можна розглядати як струм в якорному колі генератора, що залежить від еквівалентного опору всіх споживачів електроенергії, підключених до якоря генератора (електричної мережі, якщо вона живиться ланкою від цього генератора).

Спочатку розглянемо систему в розімкнутому стані. Принципово розімкнути систему можна в будь-якому місці схеми, але найчастіше це роблять на виході об'єкта, тому покажемо, що вихідна величина розімкнутої системи є вихідна величина об'єкта $U_{\text{в}}$, а вхідна — напруження на обмотці електромагніту $U_{\text{м}}$. У цьому разі рівняння розімкнутої системи має дати залежність у динаміці

$$U_{\text{в}} = f(U_{\text{м}}).$$

Як було показано раніше, для знаходження рівнянь системи необхідно скласти рівняння окремих її елементів.

Рівняння динаміки генератора f . Це рівняння матиме вигляд

$$U_1 = f(U_1)$$

При складанні рівнянь окремих елементів розробник має деяку свободу дій, завдяки якій окремий досить складний елемент можна представити його окремими (складовими) частинами. При цьому важливо уловити їхні вхідні та вихідні величини і відобразити взаємодію окремих частин елемента.

У даному разі генератор можна розглядати як складний елемент, основними частинами якого є обмотка збудження та якірне коло генератора. Рівняння генератора виведено раніше. Це рівняння в операторній формі

$$(T_g p + 1) \Delta U_1 = k_g \Delta U_{11}$$

де T_g — стала генератора; $\Delta U_1, \Delta U_{11}$ — відхилення від початкових значень відповідних величин; k_g — передаточний коефіцієнт генератора

Рівняння обмотки є екстремальним. У загальному випадку його рівняння має дати залежність у динаміці

$$F_{ca} = f(u_{ca})$$

Якщо знехтувати коефіцієнтом самоіндукції котушки, то дусіяля тяги елемента можна подати у вигляді

$$F_{ca} = c_{ca} U_{ca}^2$$

де c_{ca} — коефіцієнт пропорційності.

Виходячи початкові значення величин F_{ca} та U_{ca} , запишемо

$$F_{ca} + \Delta F_{ca} = c_{ca} (U_{ca} + \Delta U_{ca})^2$$

Позначимо нелінійну функцію так: $(U_{ca} + \Delta U_{ca})^2 = f(z)$. Лінеаризуючи її зі допомогою ряду Тейлора, дістанемо рівняння

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (z - a) = U_{ca}^2 + 2U_{ca} \Delta U_{ca}$$

або

$$F_{ca} + \Delta F_{ca} = c_{ca} U_{ca}^2 + c_{ca} 2U_{ca} \Delta U_{ca}$$

Враховуючи, що рівняння рівноваги для початкового положення

$$F_{em} = c_{em} U_{em}^2,$$

запишемо рівняння динаміки обмотки електромагніту у відхиленнях:

$$\Delta F_{em} = k_{em} \Delta U_{em}, \quad (3.71)$$

де $k_{em} = c_{em} 2U_{em}$.

Рівняння рухомих частин елементів. Як було показано раніше, рухомі елементи (якор електромагніту, поршень демпфера, пружина та двигунок редостата) можна розглядати як єдину механічну систему елементів з масою m .

Рівняння динаміки даної системи в загальному вигляді

$$F_{dyn} = F_{zs} - F_{op},$$

де $F_{dyn} = m \frac{d^2 x}{dt^2}$ — динамічне зусилля; $F_{zs} = F_{em}$ — рушійне зусилля електромагніту; F_{op} — зусилля опору переміщенню рухомих частини елементів.

Зусилля F_{em} в даному разі визначається жорсткістю пружини c_{em} , величиною переміщення рухомих частини елементів x та вагою G_{em} опору, яке спричиняє часло при переміщенні в цьому середовищі поршня П демпфера, а також опором переміщенню двигунка резистора R , який має бути порівняно невеликим (ним можна нехтувати).

Розглянемо ці складові F_{op} окремо:

- опір пружини

$$F_{opr} = c_{opr} x = c_{opr} (\lambda_1 + \lambda x);$$

- опір переміщенню поршня демпфера

$$F_2 = c_2 \frac{dx}{dt} = c_2 \frac{(x_0 + \Delta x)}{dt} = c_2 \frac{d\Delta x}{dt},$$

де c_2 — стала демпфера, яка зумовнюється властивостями масла і особливостями конфігурації поршня П (наприклад, кількістю «активних» отворів у поршні та ін.).

Наприклад, поршень з отворами матиме менший опір переміщенню в масляному середовищі, ніж суцільний. При цьому чим більше отворів у площині поршня демпфера, тим менший опір його переміщенню. Створюючи заглибки в деякі отвори поршня демпфера, можна ступінчасто змінювати його властивості (величину c_2).

При нерухомому порідні опір F_n відсутній.

Нехтуючи порівняно невеликим опором двигунка резистора, запишемо

$$F_{\text{нн}} + \Delta F_{\text{нн}} = c_{\text{нн}} x_0 + c_{\text{нн}} \Delta x + c_z \frac{d\Delta x}{dt} + G_{\text{нн}}.$$

Виключивши рівняння статички $F_{\text{нн}} = c_{\text{нн}} y_0 + G_{\text{нн}}$, дістанемо

$$\Delta F_{\text{нн}} = c_{\text{нн}} \Delta x + c_z \frac{d\Delta x}{dt}.$$

Підставивши ці складові в рівняння динаміки, одержимо

$$m \frac{d^2(x_0 + \Delta x)}{dt^2} = \Delta F_{\text{нн}} - c_{\text{нн}} \Delta x - c_z \frac{d\Delta x}{dt}$$

або

$$\Delta F_{\text{нн}} = m \frac{d^2 \Delta x}{dt^2} + c_z \frac{d\Delta x}{dt} + c_{\text{нн}} \Delta x.$$

Нехтуючи величиною $c_{\text{нн}} \Delta x$, яка значно менша від «динамічних» складових опору, запишемо рівняння елемента КЕ у підхиленнях в операторній формі:

$$\Delta F_{\text{нн}} = (mp^2 + c_z p) \Delta x.$$

Позначивши $\frac{m}{c_z} = T_z$; $\frac{1}{c_z} = k_z$, дістанемо

$$(T_z p + 1) p \Delta x = k_z \Delta F_{\text{нн}}. \quad (3.72)$$

Рівняння резистора, який є безінерційним елементом, можна записати у вигляді

$$\Delta U_r = k_R \Delta x, \quad (3.73)$$

де k_R — коефіцієнт пропорційності або передачі даного елемента

Отже, рівняння елементів, з яких складається дана система,

$$\begin{cases} (T_z p + 1) \Delta U_r = k_z \Delta F_{\text{нн}}; \\ \Delta F_{\text{нн}} = k_{\text{нн}} \Delta U_{\text{нн}}; \\ (T_r p + 1) p \Delta x = k_{\text{нн}} \Delta F_{\text{нн}}; \\ \Delta U_r = k_R \Delta x. \end{cases} \quad (3.74)$$

Користуючись формулою рівняння розімкнутої системи, маючи на увазі, що вихідною величиною є ΔU_r , а вхідною ΔU_{ω} , дістанемо рівняння розімкнутої на виході об'єкта системи у вигляді

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p \Delta U_r = k_1 k_{\omega} k_{\omega} k_{\delta} \Delta U_{\omega},$$

де $k_1 k_{\omega} k_{\omega} k_{\delta} = k_p$ – коефіцієнт передачі розімкнутої системи.

Розкриваючи дужки, дістанемо рівняння даної розімкнутої системи:

$$(T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1) p \Delta U_r = k_p \Delta U_{\omega}. \quad (3.75)$$

Рівняння замкнутої системи. Для знаходження рівняння замкнутої системи необхідно врахувати, що вихідна величина генератора, кінцеве її надихнення ΔU_r , подається на вхід електромашини, а замикання системи автоматичного регулювання відбувається за допомогою від'ємного зворотного зв'язку, тому можна записати

$$\Delta U_r = -\Delta U_{\omega}.$$

Треба врахувати також дію збурення на об'єкт керування при перелаточному операторі об'єкта за збуренням $S(p)$. Тоді система рівнянь елементів для замкнутої системи

$$\begin{cases} (T_1 p + 1) \Delta U_r = k_1 \Delta U_r + S(p) f(t); \\ \Delta F_{\omega} = -k_{\omega} \Delta U_r; \\ (T_2 p + 1) p \Delta U_r = k_{\omega} \Delta F_{\omega}, \\ \Delta U_r = -k_{\delta} \Delta U_r \end{cases} \quad (3.76)$$

Розв'язуючи систему (3.76) відносно ΔU_r , дістанемо рівняння замкнутої системи. Але в даному разі скористаємся раніше знайденою формулою рівняння системи стабілізації, згідно з якою

$$[P(p) + Q(p)] \Delta U_r = P_1(p) S(p) f(t),$$

де $P(p) = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)$; $Q(p) = k_1 k_{\omega} k_{\omega} k_{\delta}$; $P_1(p) = (T_2 p + 1) p$.

Враховуючи викладене, рівняння даної замкнутої системи автоматичної стабілізації напруги генератора постійного струму запишемо у вигляді

$$[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p + k_p] \Delta U_r = (T_2 p + 1) p S(p) f(t). \quad (3.77)$$

Рівняння незбурених координат у даному разі

$$(T_r p + 1)(T_s p + 1)p + k_r |\Delta U_r| = 0, \quad (3.78)$$

а характеристичне рівняння замкнутої системи

$$(T_r p + 1)(T_s p + 1)p + k_r = 0$$

або

$$T_r T_s p^3 + (T_r + T_s)p^2 + p + k_r = 0. \quad (3.79)$$

Дістанемо рівняння (3.77) - (3.79) за допомогою теореми Крамера.

У системі рівнянь (3.76) зробимо такі перетворення, щоб у правій частині записалися тільки збурення або нулі:

$$\begin{cases} (T_r p + 1)\Delta U_r - k_r \Delta U_s = S(p)f(v); \\ \Delta F_{\omega} + k_{\omega} \Delta U_s = 0; \\ (T_s p + 1)p\Delta x - k_{\omega} \Delta F_{\omega} = 0; \\ \Delta U_r - k_r \Delta x = 0. \end{cases} \quad (3.80)$$

Рівняння даної системи автоматичного регулювання за Крамером

$$\Delta_{\Delta U_r} = \Delta_s.$$

Знайдемо головний визначник (детермінант) Δ та приєднаний Δ_s . Згідно з системою рівнянь (3.80) запишемо стовпці, що відповідають змінним $\Delta U_r, \Delta U_s, \Delta F_{\omega}, \Delta x$, у такій послідовності:

$$\Delta = \begin{bmatrix} T_r p + 1 & -k_r & 0 & 0 \\ k_{\omega} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{\omega} & p(T_s p + 1) \\ 0 & 1 & 0 & -k_r \end{bmatrix}.$$

Замінивши перший стовпець, що відповідає регульованій величині системи ΔU_r , правими частинами рівнянь даної системи (3.80), дістанемо

$$\Delta_s = \begin{bmatrix} S(p)f(v) & -k_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{\omega} & p(T_s p + 1) \\ 0 & 1 & 0 & -k_r \end{bmatrix}.$$

Обчислимо визначники Δ та Δ_s .

Розклавши визначник Δ за елементами першого рядка, одержимо

$$\Delta = (T_1 p + 1) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k_{\omega} & p(T_2 p + 1) \\ 1 & 0 & -k_A \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} k_{\omega} & 1 & 0 \\ 0 & -k_{\omega} & p(T_2 p + 1) \\ 0 & 0 & -k_A \end{bmatrix}.$$

Застосовуючи правило Сюрреда, згідно з яким дописуються два перші стовпці до визначника третього порядку і перемножуються члени угору по діагоналі зі знаком «плюс», а вниз — зі знаком «мінус», дістанемо

$$\begin{aligned} \Delta &= (T_1 p + 1) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k_{\omega} & p(T_2 p + 1) \\ 1 & 0 & -k_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -k_{\omega} + \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} k_{\omega} & 1 & 0 \\ 0 & -k_{\omega} & p(T_2 p + 1) \\ 0 & 0 & -k_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{\omega} & 1 \\ 0 & -k_{\omega} = \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + k_1 k_{\omega} k_{\omega} k_A = T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p + k_1. \end{aligned}$$

Розкриваючи аналогічним чином визначник Δ_1 , маємо

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= S(p)f(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k_{\omega} & p(T_2 p + 1) \\ 1 & 0 & -k_A \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k_{\omega} & T_2 p + 1 \\ 0 & 0 & -k_A \end{bmatrix} - \\ &- S(p)f(t)(T_1 p + 1)p. \end{aligned}$$

Як бачимо, рівняння замкнутої системи за Крамером має той самий вигляд, що й зняйдене раніше.

3.10

Рівняння і передаточні функції автоматичних слідкувальних (програмних) систем

З точки зору методики знаходження рівнянь і відповідних передаточних функцій слідкувальних і програмних систем повністю схожі. Відмінність полягає лише в способі формування змашуючого сигналу $y(t)$. (Як відомо, в програмній системі він обчислюється заздалегідь, а в слідкувальній формується в ході

роботи системи залежно від стану об'єкта.) У зв'язку з цим функціональна схема і рівняння відповідних ланок обох систем будуть однаковими. Тому все, що стосуватиметься слідкувальних систем, має таке саме відношення і до програмних систем автоматичного регулювання.

Спрощену функціональну схему слідкувальної системи показано на рис. 3.30, де 1 — об'єкт регулювання, який має змінювати свою вихідну величину $x_{1, \text{вих}}$ згідно зі зміною заданої величини (програми) $y(t)$; 2 — пристрій зворотного зв'язку (в програмних системах його називають чутливим елементом), який контролює вихідну величину об'єкта; ДР — датчик розбіжності, який порівнює задану величину з величиною, пропорційною вихідній величині об'єкта; x — величина розбіжності між заданою і дійсною величинами (точніше, величиною, пропорційною заданій).

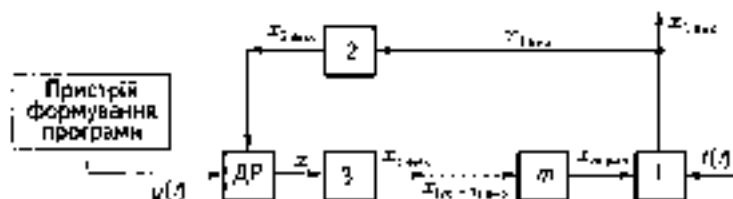


Рис. 3.30

Запишемо рівняння об'єкта та інших ланок системи в загальному вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(p)x_{1, \text{вих}} = Q_1(p)x_{1, \text{вих}} + S_1(p)f(t); \quad (1) \\ P_2(p)x_{2, \text{вих}} = Q_2(p)x_{1, \text{вих}}; \quad (2) \\ x = y(t) - x_{2, \text{вих}}; \quad (2') \\ P_3(p)x_{1, \text{вих}} = Q_3(p)x; \quad (3) \\ \dots \dots \dots \\ P_n(p)x_{n, \text{вих}} = Q_n(p)x_{n-1, \text{вих}}; \quad (n) \end{array} \right. \quad (3.81)$$

де $S_1(p)$ — передаточний коефіцієнт (полюс) об'єкта за збуренням; $P_1(p), \dots, P_n(p)$ і $Q_1(p), \dots, Q_n(p)$ — поліноми від p відповідно ланок і правих частин рівнянь ланок системи.

Розв'язуючи систему рівнянь (2) та (2'), з рівняння (2) знаходимо

$$x_{2, \text{вих}} = \frac{Q_2(p)}{P_2(p)} x_{1, \text{вих}}.$$

Підставивши його в рівняння (2'), дістанемо

$$x = y(t) - \frac{Q_2(p)}{P_2(p)} x_{1\text{max}}.$$

звідки

$$P_2(p)x = P_2(p)y(t) - Q_2(p)x_{1\text{max}}. \quad (2)-(2')$$

Розглядаючи ланки з третьої по m -ну як деяку розімкнуту систему, згідно зі знайденим вище розв'язанням розімкненої системи, маючи на увазі, що вихідною величиною цієї системи є $x_{1\text{max}}$, а вхідною x , матимемо

$$P_1(p)P_4(p) \cdot P_7(p)x_{1\text{max}} = Q_4(p)Q_2(p) \cdot Q_m(p)x.$$

Замінивши добутки поліномів від p лівої і правої частин відповідно величинами $P_{11}(p)$ і $Q_{11}(p)$, дістанемо рівняння, що відповідає ланкам з третьої по m -ну:

$$P_{11}(p)x_{1\text{max}} = Q_{11}(p)x. \quad (3) \quad (m)$$

Розв'язуючи систему рівнянь об'єкта (1) та рівнянь (2)–(2') і (3)–(m) відносно $P_1(p)x_{1\text{max}}$, матимемо

$$x = \frac{P_{11}(p)}{Q_{11}(p)} x_{1\text{max}}.$$

Підставляючи це значення x у рівняння (2)–(2'), після деяких перетворень дістанемо

$$P_1(p) \frac{P_{11}(p)}{Q_{11}(p)} x_{1\text{max}} = P_2(p)y(t) - Q_2(p)x_{1\text{max}}.$$

звідки

$$x_{1\text{max}} = \frac{Q_{11}(p)}{P_{11}(p)} y(t) - \frac{Q_2(p)}{P_2(p)} \frac{Q_{11}(p)}{P_{11}(p)} x_{1\text{max}}.$$

Позначивши $P_2(p)P_{11}(p) = P_1(p)$, а $Q_2(p)Q_{11}(p) = Q_1(p)$, де $P_1(p)$ і $Q_1(p)$ — відповідно добутки поліномів від p лівих і правих частин рівнянь усіх ланок, окрім об'єкта, матимемо

$$x_{1\text{max}} = \frac{Q_{11}(p)}{P_{11}(p)} y(t) - \frac{Q_1(p)}{P_1(p)} x_{1\text{max}}.$$

Підставивши це значення $x_{1\text{max}}$ у рівняння об'єкта, дістанемо

$$P_1(p)x_{1,\text{нов}} = Q_1(p) \left[\frac{Q_{11}(p)}{P_{11}(p)} y(t) - \frac{Q(p)}{P_1(p)} x_{1,\text{нов}} \right] + S(p)f(t).$$

Після деяких перетворень дістанемо рівняння динаміки замкнутої слідкувальної (програмної) системи у вигляді

$$[P(p) + Q(p)]x_{1,\text{нов}} = Q_{11}(p)P_2(p)y(t) + P_1(p)S(p)f(t). \quad (3.82)$$

де $P(p)$, $Q(p)$ — добутки поліномів від p , що стоять відповідно у лівих і правих частинах рівнянь усіх ланок; $Q_{11}(p) = Q_1(p)Q_{11}(p)$ — добуток поліномів від p правих частин рівнянь усіх ланок, окрім полінома правої частини рівняння ланки зворотного зв'язку $Q_1(p)$; $P_1(p) = -P_1(p) \dots P_n(p)$ — поліном без урахування відповідного оператора об'єкта; $P_2(p)$ — поліном лівої частини рівняння ланки зворотного зв'язку.

Порівнюючи рівняння замкнутої системи стабілізації з рівнянням (3.82), можна дійти висновку, що вони відрізняються лише наявністю в правій частині рівняння (3.82) члена $Q_{11}(p)P_2(p)y(t)$.

Передаточні функції слідкувальних (програмних) систем. Розділивши в рівнянні слідкувальної системи праву і ліву частини на величину $P(p) + Q(p)$, дістанемо

$$x_{1,\text{нов}} = \frac{Q_{11}(p)P_2(p)}{P(p) + Q(p)} y(t) + \frac{P_1(p)S(p)}{P(p) + Q(p)} f(t).$$

Розділивши чисельник і знаменник обох складових правої частини виразу на $P(p)$, матимемо

$$x_{1,\text{нов}} = \frac{Q_{11}(p)}{1 + \frac{Q(p)}{P(p)}} \frac{1}{P_1(p)} y(t) + \frac{S(p)}{1 + \frac{Q(p)}{P(p)}} \frac{1}{P_1(p)} f(t).$$

Розв'язання слідкувальної системи через передаточні функції матиме вигляд

$$x_{1,\text{нов}} = \frac{W_{11}(p)}{1 + W(p)} y(t) + \frac{W'(p)}{1 + W(p)} f(t). \quad (3.83)$$

де $\frac{W_{11}(p)}{1 + W(p)}$ — передаточна функція зі зв'язанням; $W_{11}(p) = Q_{11}(p)/P_1(p)$ — передаточна функція всіх ланок системи без ураху-

визних ланки зворотного зв'язку; $\frac{W_1'(p)}{1 + W(p)} = W_2(p)$ — передаточна функція за збуренням; $W'(p)$ — передаточна функція об'єкта за збуренням, $W(p)$ — передаточна функція розімкнутої системи.

З урахуванням викладеного рівняння слідкувальної (програмної) системи через передаточні функції за заданням і збуренням можна записати так:

$$x_{\text{ц.к.}} = W_2(p)y(t) + W_1(p)f(t). \quad (3.84)$$

Рівняння, записане у віхиленіях регульованої величини від заданого значення, часто називають *рівнянням помилки (похибки)*. Воно має аналогічний вигляд

$$\Delta x_{\text{ц.к.}} = W_2(p)y(t) + W_1(p)f(t). \quad (3.85)$$

Якщо елемент зворотного зв'язку безінерційний, то $Q_2(p) = -P_2(p) = 1$ і передаточна функція за заданням

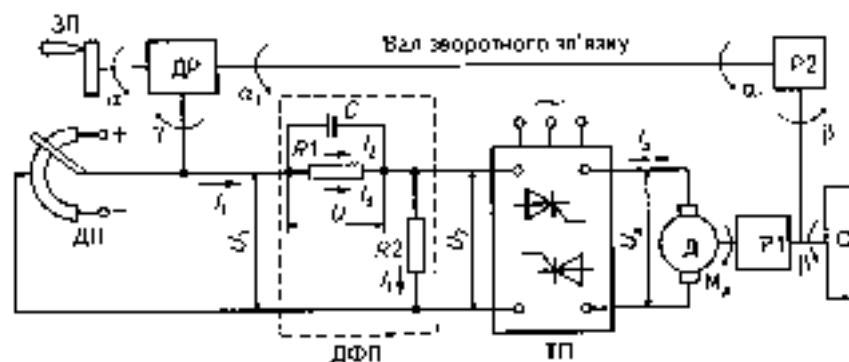
$$W_2(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}. \quad (3.86)$$

Передаточна функція за збуренням залишиться, очевидно, без змін.

3.11

Приклад знаходження рівняння динаміки слідкувальної системи

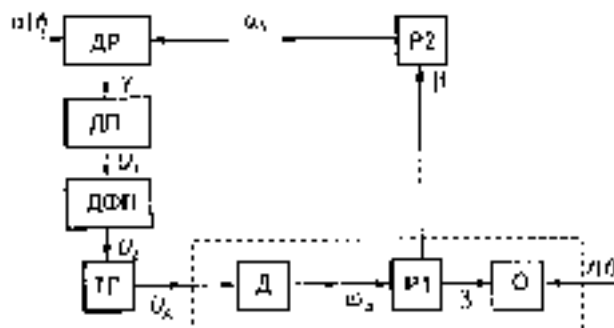
Як приклад розглянемо спрощену принципову схему, наведену на рис. 3.31, де ЗП — задаточний пристрій, який обертається за деяким повільним законом $\alpha = \alpha(t)$. Цей закон повинен відтворюватись у заданому масштабі на об'єкті О у вигляді $k_{\alpha} = \alpha(t)$ (k_{α} — коефіцієнт пропорційності об'єкта керування); ДР — датчик розумодження (у даному разі — механічний диференціал). На його вихідному штиф відтворюється сигнал (розумодження), який є різницею двох сигналів заданого α і сигналу зворотного зв'язку α_1 .



Puc. 3.31

Механічний вал зворотного зв'язку при необхідності можна замінити на електричний вал за допомогою елемента. Сигнал розузгодження за допомогою потенціометричного датчика ДП перетворюється в напругу розузгодження U_1 . Елементи $R1, R2$, C представляють диференціювальний пристрій ДФП, який використовується для поліпшення динамічних характеристик системи керування. Його вихідна напруга U_2 після підсилення тиристорним перетворювачем ТП у вигляді напруги U_3 подається до якорного кола двигуна Д, який через редуктор Р1 обертає об'єкт О.

Функциональну схему цієї системи показано на рис. 3.32, де $f(t)$ – збурення, що діє на об'єкт з визначтє навантаженнями двигуна.



Pvc. 3,32

Виведемо рівняння всіх ланок системи. Враховуючи, що об'єкт у даному разі можна розглядати як деяку механічну масу, яка разом із редуктором обертається двигуном, розглядаємо об'єкт як одне ціле — у вигляді ланки системи з приведеним моментом інерції J .

Рівняння ланки двигун—редуктор—об'єкт, або умовно «об'єкта», матиме вигляд

$$J \frac{d^2 \beta}{dt^2} = M_d - M_w - M_f, \quad (3.87)$$

де M_d — рушійний момент двигуна; M_w — момент тертя; M_f — момент, зумовлений дією зовнішніх сил $f(t)$; β — кут повороту вала двигуна.

У даному разі при сталій величині потоку в магнітній системі двигуна Φ

$$M_d = c \Phi I_d = c_1 U_d,$$

де U_d — напруга на ехорі двигуна; c_1 — коефіцієнт пропорційності.

Враховуючи, що момент тертя залежить від швидкості обертання, можна записати

$$M_w = \frac{d\beta}{dt} c_2,$$

де c_2 — коефіцієнт пропорційності.

Підставивши значення M_d , M_w у вихідне рівняння, дістанемо

$$J \frac{d^2 \beta}{dt^2} + c_2 \frac{d\beta}{dt} = c_1 U_d - M_n(t),$$

де $M_n(t)$ — момент збурення зовнішніх сил.

Після нескладних перетворень в операторній формі маємо

$$(T_1 p^2 + p) \beta = k_1 U_d - f(t), \quad (3.88)$$

де

$$T_1 = \frac{J}{c_2}; \quad k_1 = \frac{c_1}{c_2}; \quad f(t) = \frac{M_n(t)}{c_2}.$$

Запишемо рівняння окремих ланок:

- зворотного зв'язку

$$u_1 = \frac{1}{k_1} \beta_1, \quad (3.89)$$

- датчика розузгодження (ДР)

$$\gamma = \alpha(t) - \alpha, \quad (3.90)$$

- потенціометричного датчика порівняння (ДП)

$$U_1 = k_2 \gamma,$$

де k_2 — коефіцієнт пропорційності

Рівняння диференціального пристрою (ДФП), згідно з рис. 3.31, має вигляд

$$I_1 = I_2 + I_3; \quad I_2 = C \frac{dU_2}{dt}; \quad I_3 = \frac{U}{R_1}; \quad U = U_1 - U_2,$$

звідки

$$I_1 = C \frac{d(U_1 - U_2)}{dt} + \frac{U_1 - U_2}{R_1} = \frac{U_2}{R_2},$$

або

$$C \frac{dU_1}{dt} + C \frac{dU_2}{dt} + \frac{U_1 - U_2}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}.$$

Після нескладних перетворень дістанемо

$$C \frac{dU_2}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U_2 = C \frac{dU_1}{dt} + \frac{U_1}{R_1}.$$

Розділивши всі члени рівняння на коефіцієнт при U_2 , одержимо

$$(T_2 p + 1) U_2 = (k_1 + k_2 p) U_1, \quad (3.91)$$

де

$$T_2 = \frac{C}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}; \quad k_1 = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad k_2 = C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Розглядаючи тиристорний підсилювач як ланку із запізненням, запишемо його рівняння у вигляді

$$U_c = k_{11} e^{-\tau p}.$$

Після розкладу в степеневий ряд функції $e^{-\tau p} = (1 + \tau p)^{-1} = \frac{1}{1 + \tau p}$,

дістанемо

$$U_2 = k_{1n} U_1 \frac{1}{1 + \tau p},$$

або

$$(1 + \tau p) U_2 = k_{1n} U_1, \quad (3.92)$$

де τ — запізнення; k_{1n} — коефіцієнт передачі.

Отже, рівняння всіх ланок слідкувальної системи можна записати у вигляді системи рівнянь:

- об'єкта

$$(T_1 p^2 + p) \beta = k_2 U_2 - f(t);$$

- зворотного зв'язку

$$\alpha_1 = \frac{1}{k_n} \beta_1;$$

- датчика розузгодження

$$\gamma = \alpha(t) - \alpha_1; \quad (3.93)$$

- потенціометричного датчика

$$U_1 = k_3 \gamma;$$

- диференціального пристрою

$$(T_2 p + 1) U_2 = (k_4 + k_5 p) U_1;$$

- тиристорного підсилювача

$$(\tau p + 1) U_2 = k_{1n} U_1.$$

Використовуючи вираз (3.92), записуємо рівняння слідкувальної системи в загальному вигляді:

$$[P(p) + Q(p)] \beta = P_1(p) S(p) f(t) + Q_1(p) P_2(p) \alpha(t),$$

де $P(p) = (T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1)$ — добуток лівих частин усіх рівнянь ланок; $Q(p) = k_2 \frac{1}{k_n} k_3 (k_4 + k_5 p) k_{1n}$ — добуток правих частин

усіх рівнянь; $P_1(p) = (T_2 p + 1)(\tau p + 1)$ — добуток усіх лівих частин рівнянь, крім об'єкта; $S(p) = 1$ — коефіцієнт при збуренні; $Q_1(p) = k_2 k_3 \times (k_4 + k_5 p) k_{1n}$ — добуток правих частин усіх рівнянь, крім рівняння

зворотного зв'язку: $P_1(p)$ — ліва частина рівняння зворотного зв'язку (в даному разі дорівнює одиниці)

Отже, рівняння динаміки слідкувальної системи можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} & [(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1) + k_n \frac{1}{k_u} k_2 (k_1 + k_3 p) k_{1n}] \beta = \\ & = k_2 k_2 (k_1 + k_3 p) k_{1n} \alpha(t) + (T_2 p + 1)(\tau p + 1) f(t). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Поклавши $p = 0$, $f(t) = 0$, дістанемо рівняння статички системи

$$k_2 \frac{1}{k_u} k_1 k_2 k_{1n} \beta = k_2 k_2 k_3 k_{1n} \alpha(t) = f(t).$$

Визначивши $k_1 k_2 k_3 k_{1n} = k$ при статич. значеннях $f(t) = f_c$, $\alpha(t) = \alpha_n$, дістанемо рівняння статичного стану системи

$$\frac{k_1}{k_u} \beta_n = k_2 \alpha_n = f_c$$

або

$$\beta_n = k_c \alpha_n = \frac{k_n}{k_1} f_c. \quad (3.95)$$

Звідси видно, що β_n відстає від потрібного значення сигналу $k_n \alpha_n$ на величину, що залежить від збурення f_c . Величина $\frac{k_n f_c}{k_1}$ є статичною помилкою даної слідкувальної системи. Вона обернено пропорційна добутку коефіцієнтів підсилення ланок. Припущено статична помилка може бути як зі знаком «мінус», так і зі знаком «плюс».

Передаюча функція за збуренням у даному разі матиме вигляд

$$\begin{aligned} W_f(p) &= \frac{W_1'(p)}{1 + W(p)} = \frac{1}{k_n \frac{1}{k_u} k_2 (k_1 + k_3 p)} \cdot \frac{1}{(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1)} \\ &= \frac{(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1)}{(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1) + \frac{k_1}{k_n}}. \end{aligned}$$

де $W_1^f(p) = 1$ — передаточна функція об'єкта за збуренням;

$W(p) = \frac{Q(p)}{P(p)}$ — передаточна функція розімкнутої системи

У даному разі амплітудно-фазова характеристика слідкувальної системи за збуренням

$$W_f(j\omega) = \frac{(1 - T_1\omega^2 + j\omega)(jT_2\omega + 1)(j\tau\omega + 1)}{(-T_1\omega^2 + j\omega)(jT_2\omega + 1)(j\tau\omega + 1) + k_1/k_0}.$$

Передаточну функцію даної системи за заданням після перетворень запишемо так:

$$\begin{aligned} W_c(p) &= \frac{W_0(p)}{1 + W(p)} = W_{\text{н}}(p) = \frac{\frac{k_1}{(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1)}}{1 + \frac{k_1 \tilde{k}_0}{(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1)}} = \\ &= \frac{k_1}{(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1) + k_1 \tilde{k}_0}. \end{aligned}$$

де $W_0(p)$ — передаточна функція всіх ланок системи без зворотного зв'язку.

Відповідно до цього амплітудно-фазова характеристика даної слідкувальної системи за заданням матиме вигляд

$$W_c(j\omega) = \frac{k_1}{(1 - T_1\omega^2 + j\omega)(jT_2\omega + 1)(j\tau\omega + 1) + k_1 \tilde{k}_0}.$$

На основі знайдених виразів за викладеними раніше методиками можна вістати всі необхідні частотні характеристики системи.

В даному разі рівняння помилки

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= W_c(p)\alpha(t) - W_f(p)f(t) = \\ &= \frac{k_1}{(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1)} \alpha(t) + \\ &+ \frac{(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1)}{(T_1 p^2 + p)(T_2 p + 1)(\tau p + 1) + k_1 \tilde{k}_0} f(t) \end{aligned}$$

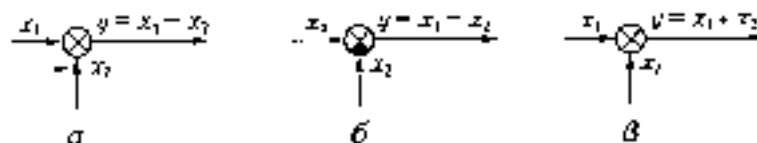
3.12

Структурні схеми та їх перетворення

Під структурною схемою САК у теорії автоматичного керування розуміють графічне зображення математичної моделі системи у вигляді з'єднаних ланок, які відіграють функціональній схемі даної системи. При цьому кожна ланка структурної схеми зображується прямокутником, в якому відображаються у вигляді передаточних функцій, рівнянь динаміки або часової характеристики динамічні властивості даної ланки.

У деяких випадках ланки можна прономерувати, а їх динамічні характеристики зобразити окремо. Вхідні і вихідні величини на структурних схемах можуть бути записані у вигляді зображень або їх оригіналів.

Ланки, які забезпечують алгебраїчне підсумовування (суматори) деяких величин, зображують у вигляді кола, поділеного на чотири рівні сектори. Якщо вхідні величини мають різний знак, то це відображується або знаком «мінус», або затуплюванням відповідного сектора (рис. 3.33).

Рис. 3.33

Структурні схеми широко застосовуються в ТАК при дослідженнях і проектуванні. За їх допомогою легко простежити зв'язки між ланками, їх вплив, проходження сигналів у системі.

Ланки структурної схеми можуть відображати не тільки окремі елементи, а й їх об'єднання, а також частини системи, як було показано, наприклад, при виведенні рівняння електричного механічної системи.

За допомогою апарату передаточних функцій можливе також перетворення складених структурних схем на проєкції, що в ряді випадків необхідно для знаходження відповідних рівнянь системи за відомих формул.

Правила перетворення структурних схем. Найпростіші перетворення структурних схем та їх окремих елементів було розглянуто раніше.

При послідовному з'єднанні ланок результуюча передаточна функція $W(p)$ ланок у загальному вигляді може бути визначена як добуток передаточних функцій $W_i(p)$ ланок:

$$W(p)_{\text{лн}} = \prod_{i=1}^n W_i(p), \quad (3.96)$$

а при паралельному — як їх сума:

$$W(p)_{\text{лп}} = \sum_{i=1}^n W_i(p). \quad (3.96a)$$

Передаточна функція ланки зі зворотним зв'язком (аналогічно група ланок, охоплених зворотним зв'язком, рис. 3.34, а) матиме вигляд

$$W^{(z)}(p) = \frac{W_{\text{пр}}(p)}{1 \pm W_{\text{пр}}(p)W_{\text{оз}}(p)}, \quad (3.97)$$

де $W_{\text{пр}}(p)$ — передаточна функція прямого каналу, яка є передаточною функцією окремої ланки або групи послідовно з'єднаних ланок (тоді $W_{\text{пр}}(p) = W_1(p) \dots W_l(p)$), що охоплюються зворотним зв'язком (рис. 3.34, б).

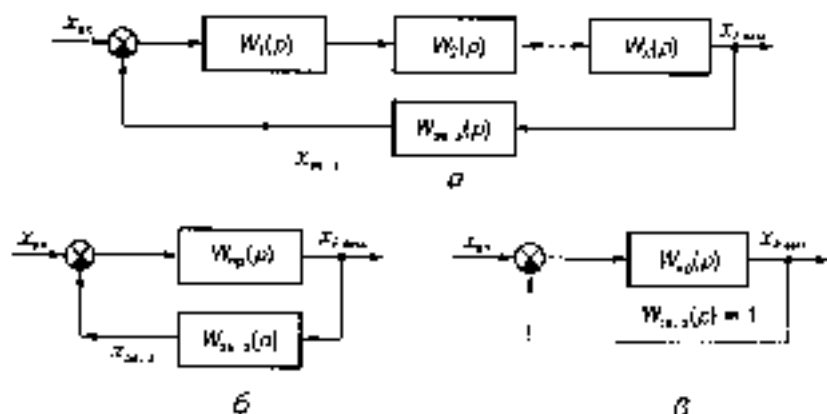


Рис. 3.34

Знак «плюс» відповідає від'ємному, а знак «мінус» — додатному зворотному зв'язку; $W_{\text{зв}}(p)$ — передаточна функція самої ланки зворотного зв'язку; $W_{\text{пр}}(p)W_{\text{зв}}(p) = W(p)$ — передаточна функція розімкнутої системи, тобто, контура зворотного зв'язку, що містить ланки з передаточними функціями $W_{\text{пр}}(p)$ та $W_{\text{зв}}(p)$.

Отже, передаточна функція ланки (або групи ланок), охопленої зворотним зв'язком, є передаточною функцією прямого каналу, розділеною на $1 \pm$ передаточна функція розімкнутого контуру зворотного зв'язку. У випадку, коли розглядається головний зворотний зв'язок САР, цей контур є контуром розімкнутої САР. У цьому разі передаточна функція замкнутої системи (системи з головним зворотним зв'язком) записується у вигляді

$$W^{\text{зам}}(p) = \frac{W_{\text{пр}}(p)}{1 \pm W(p)} \quad (3.98)$$

Якщо передаточна функція зворотного зв'язку $W_{\text{зв}}(p)$ дорівнює одиниці, то такий зворотний зв'язок називають *одиничним*, що зображується так, як на рис. 3.34, а.

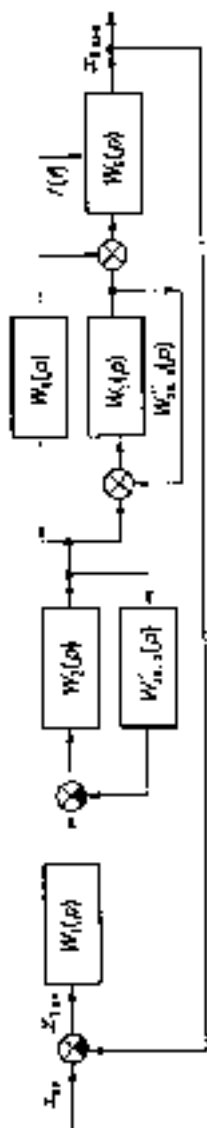
Передаточній функції прямого каналу і розімкнутої системи в цьому разі дорівнюють одна одній $W_{\text{пр}}(p) = W(p)$, і передаточна функція ланки з зворотним зв'язком

$$W^{\text{зам}}(p) = \frac{W(p)}{1 \pm W(p)} \quad (3.99)$$

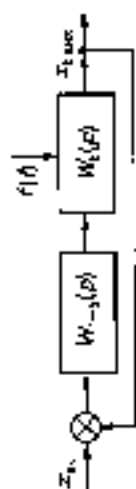
Знаючи правила перетворення структурних схем, можна досить просто розв'язати завдання перетворення одноконтурних і деяких багатоконтурних систем. При цьому під *одноконтурною* замкнутою системою розуміють систему, при розмиканні якої в довільній точці можна дістати ланцюжок ланок, в якому відсутні паралельно з'єднані ланки і ланки, охоплені зворотними зв'язками.

Багатоконтурною називають систему, яка має в своєму складі паралельно з'єднані ланки, а також ланки з місцевими зворотними зв'язками.

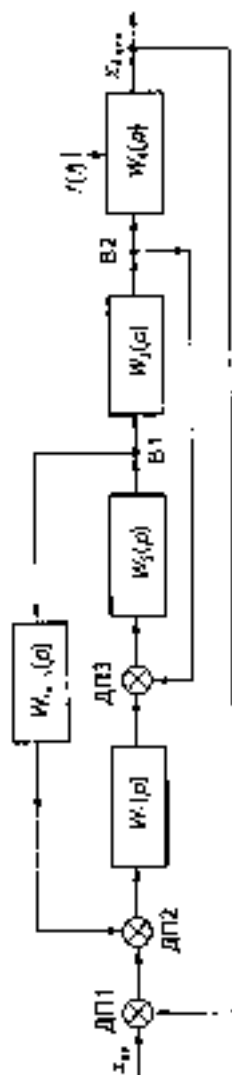
Як приклад розглянемо структурну схему, зображену на рис. 3.35, а. Ця схема є багатоконтурною і має в своєму складі ланки з місцевими зворотними зв'язками: ланку $W_2(p)$ з від'ємним місцевим зворотним зв'язком $W_{\text{зв}2}(p)$; ланку $W_3(p)$ з додатним одиничним



a



b



c

Рис. 3.35

зворотним зв'язком $W_{n+1}^{-1}(p)$, а також паралельно з'єднати ланки $W_2(p)$ і $W_3(p)$. Об'єктом системи крування є ланка $W_6(p)$.

Спочатку проведемо перегрупування ланок зі зворотними зв'язками:

$$W_{1-n+1}(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_2(p)W_{n+1}^{-1}(p)}; \quad W_{1-n+1}(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_3(p)}.$$

Для паралельного з'єднання ланок дістанемо

$$W_{1-n+1}(p) = W_2(p) + W_{1-n+1}(p)$$

Розглядаючи дані ланки як послідовно з'єднані, знаходимо їх передаточну функцію

$$\begin{aligned} W_{1-n+1}(p) &= W_1(p)W_{1-n+1}(p)[W_2(p) + W_{1-n+1}(p)] = \\ &= W_1(p)W_{2-n+1}(p)W_{1-n+1}(p). \end{aligned}$$

Відповідно спрощену структурну схему системи показано на рис. 3.35, б.

Розглянемо можливість перетворення структурної схеми, наведеної на рис. 3.35, в. Ця структурна схема має додатні зворотні зв'язки, кожен з яких охоплює по дві ланки. Одна з них входить також до контура іншого зворотного зв'язку. Такі структурні схеми називають *схемами з перекресненими зворотними зв'язками*. Їх не можна перетворити за допомогою розглянутих вище формул. Тому їх треба перетворити таким чином, аби ліквідувати зв'язки, що перекреснюються.

Для перетворення структурних схем із перекресненими зворотними зв'язками використовуються правила переносу додатних пристроїв (на схемі ДП1, ДП2, ДП3) та вузлів (позначення В1, В2).

Правила переносу додатних пристроїв і вузлів у схемі

Закладений принцип переносу додатного пристрою або вузла в схемі полягає в тому, що при подвійній яднці перекреснування зворотних зв'язків вихідні величини ланок мають бути позитивними. Цей принцип добре ілюструють схеми переносу додатного пристрою ДП (рис. 3.36, а, б, в) і вузла В (рис. 3.37, а, б, в).

Так, на рис. 3.36, б показано перенос ДП вправо по ходу процесу. При цьому величина x не проходить крізь ланку $W_2(p)$, що має місце у вихідній схемі. Для того щоб процес у перетвореній схемі не змінився, необхідно ввести додаткову ланку $W_2(p)$ між точкою входу сигналу x і ДП.

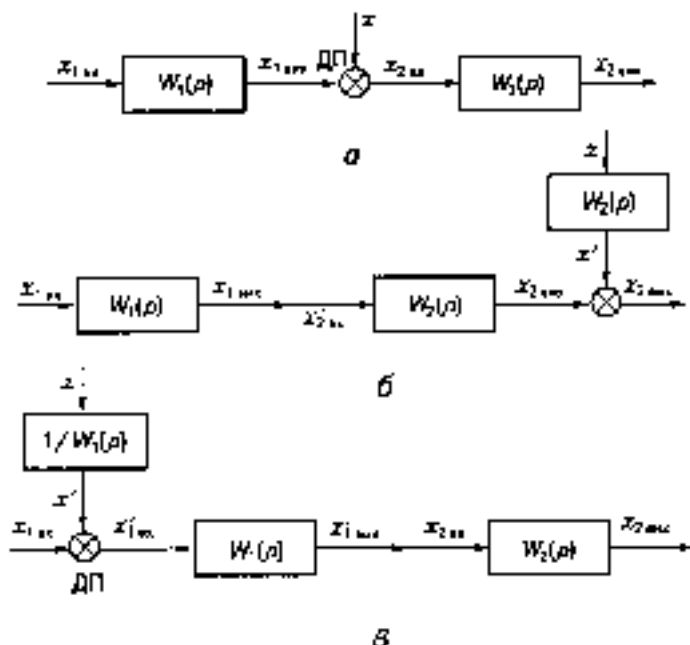


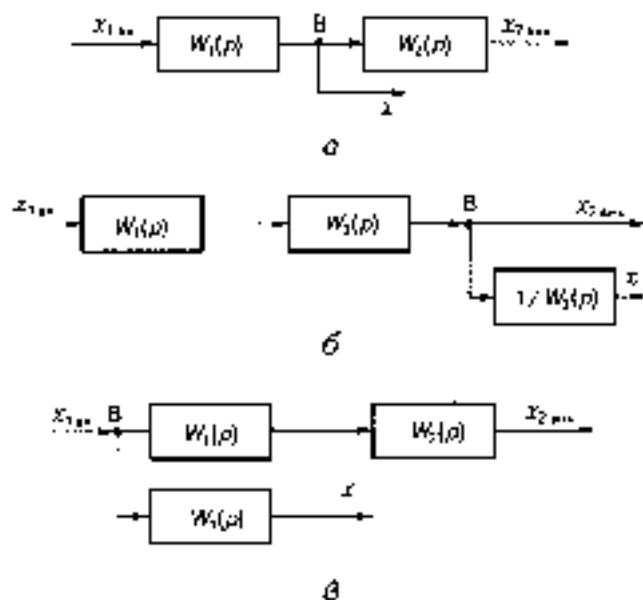
Рис. 3.36

Справді, якщо у вихідній схемі $x_{2\text{вн}} = W_2(p)x_{2\text{вх}} = W_2(p) \times (x_{1\text{вн}} + x)$, то в цьому разі $x_{2\text{вн}} = x_{2\text{вн}}' + x'$, де $x_{2\text{вн}}' = W_2(p)x_{1\text{вн}}$, $x' = W_2(p)x$, тому $x_{2\text{вн}} = W_2(p)x_{1\text{вн}} + W_2(p)x = W_2(p)(x_{1\text{вн}} + x)$ буде таким самим, як і у вихідній схемі.

Якщо ДП переміщується вліво (проти ходу процесу), то між точкою прикладання величини x і ДП потрібно ввести ланку, передаточна функція якої буде оберненою функцією ланки, через яку ДП переміщується вліво.

При цьому $x_{2\text{вн}} = W_2(p)x_{1\text{вн}}'$; $x_{1\text{вн}}' = W_1(p)x_{1\text{вх}} + \frac{1}{W_1(p)}x'$; звідки $x_{2\text{вн}} = W_2(p)W_1(p)x_{1\text{вх}} + x' = W_2(p)(x_{1\text{вх}} + x)$ дорівнює вихідній величині вихідної схеми.

Вихідну (а) і перетворені (б, в) схеми переміщення вузла В вліво та вправо відносно початкового положення показано на рис. 3.37. При переміщенні вузла також необхідно ввести додаткові ланки, як показано на рис. 3.37. б, в. Справді, якщо вузол В переміщується

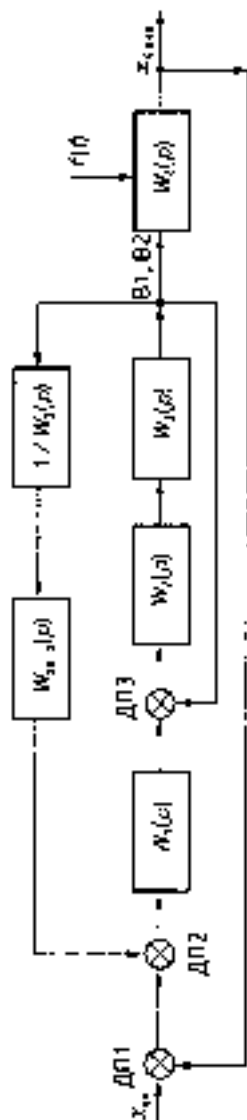
**Рис. 3.37**

вліво, то для того, щоб величина x не змінилася, необхідно ввести в ланку x ланку з передаточною функцією, оберненою передаточній функції ланки, через яку було переміщено цей вузол. Якщо вузол B переміщується вліво, треба ввести додаткову ланку з передаточною функцією, що дорівнює передаточній функції ланки, через яку переміщується цей вузол.

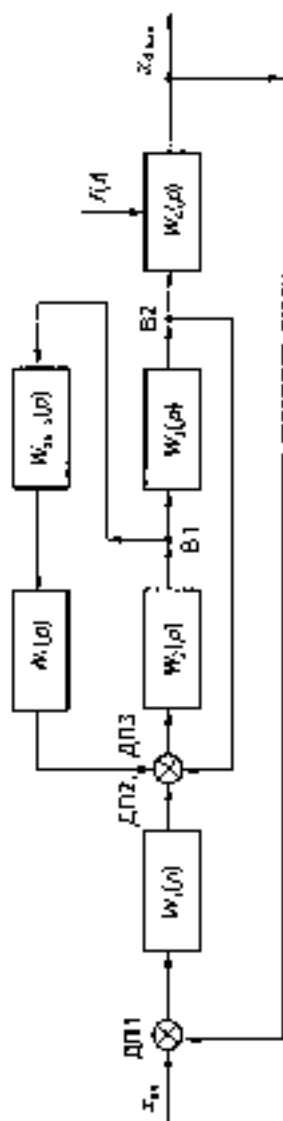
Розглянемо ще раз схему на рис. 3.35, *а*. Для ліквідації перехресних зворотних зв'язків можна перемістити додатний пристрій ДП2 вправо, об'єднавши його з ДП3, або вузол $B1$ вправо, об'єднавши його з вузлом $B2$. Можливе також перенесення вузла $B2$ вліво й об'єднання його з вузлом $B1$.

Перетворення схеми з переносом вузла $B1$ вправо показано на рис. 3.38, *а*, а з переносом ДП2 вправо й об'єднання його з ДП3 — на рис. 3.38, *б*.

Перехреснування зворотних зв'язків можна ліквідувати також перемістивши вузол $B2$ вліво й об'єднавши його з вузлом $B1$. В цьому разі в коло єдиничного зворотного зв'язку треба ввести додаткову ланку з передаточною функцією $W_3(p)$.



a



б

Рис. 3.38

Діквідувавши перехреснення зворотних зв'язків, нескладно спростити одержані структурні схеми за раніше викладеними правилами і наведеними формулами

3.13

Графи та їх використання в теорії автоматичного керування

Загальні відомості про графи. Математичну модель системи автоматичного керування можна дати також за допомогою орієнтованих графів

У загальному випадку під графом розуміють деяку множину точок M , які називають *вершинами*, і множину непересічних кривих — *ребер* R , що відповідають умовам:

- кожне ребро R має рівно дві точки множини M , які є граничними точками ребра (ребро в цьому разі називають *незамкнутим*);
- замкнуте ребро має тільки одну точку з множини M (граничні точки збігаються);
- ребра R не мають інших спільних точок, окрім тих, які входять у множину M .

Якщо на ребрах вказано напрям переміщення, то відповідний граф називають *орієнтованим*, а ребро орієнтованого графа — *дугою*. Граничні точки ребра є вершинами. Вважають, що саме ребро R індивідуальне кожній з вершин, а кожна вершина індивідуальна цьому ребру.

У загальному випадку граф позначається буквою G або (R, M) , де R — множина ребер; M — множина вершин.

Якщо якийсь граф $G_1 = f(M_1, R_1)$, де M_1 та R_1 входять до множин M і R , з яких складається граф G , то граф G_1 називають *підграфом* графа G (або підграфом G), який, своєю чергою, називають *надграфом* графа G_1 (або надграфом G_1).

Граф зі скінченною кількістю вершин і ребер називають *скінченним*. На кожній дузі є початкова і кінцева вершини.

Згідно з викладеним орієнтований граф є сукупністю множин вершин і дуг. Дуги називають паралельними, якщо вони мають спільні початкові і кінцеві вершини. З'єднання дуг, за якого кінцева

маршрут кожної дуги є початковою вершиною для наступної дуги, називають *орієнтованим маршрутом*. Якщо кінцева вершина останньої дуги збігається з початковою вершиною першої, то такий маршрут називають *замкнутим*.

Орієнтований маршрут, в якому всі дуги різні, називають шляхом від початкової до кінцевої вершини (при незамкненому стані). Якщо цей маршрут замкнутий, то його називають контуром або орієнтованим циклом.

Основні властивості графів САК і методи їх побудови.

Граф системи автоматичного керування є орієнтованим графом, що має такі властивості:

- кожна дуга виображає ланку системи з відповідним математичним зображенням;
- якщо до вхідної (початкової) вершини деякої дуги приєднуються (входять в неї) кілька дуг, то відповідна вхідна змінна є сумою вихідних величин цих дуг. При одній приєднуваній дугі змінна, що їй відповідає, є вхідною змінною наступної дуги (її вершини);
- якщо з кінцевої вершини виходять кілька дуг, то вхідна величина всіх дуг є однаковою.

Графи САК легко побудувати, якщо відома структурна схема системи. Якщо вісний граф, то нескладно побудувати структурну схему відповідної системи. Вершини графа зображуються колами.

При побудові графа за структурною схемою необхідно виконати такі перетворення.

1. Зобразити схему таким чином, щоб у суматорах усі вхідні величини мали знак плюс.
2. Кожний суматор замінити вершиною з вхідною величиною, що дорівнює вихідній вершині цього суматора.
3. Кожну ланку структурної схеми замінити дугою з оператором (передпочинною функцією), який дорівнює оператору цієї ланки.
4. Кожній змінній, в тому числі й збуренню, поставити у відповідність свою вершину.
5. Додаткова зображення (якщо це потрібно) вершини однієї з дуг на загальному графі деякої дуги провести з урахуванням одиничної передаточної функції.

Деяку вихідну структурну схему слідкувальної САК показано на рис. 3.39, а, а змінену структурну схему згідно з п. 1 — наведено на рис. 3.39, б.

Кінцевий результат — відповідний граф САК, наведено на рис. 3.39, в.

При побудові графів можливе їх спрощення, яке досягається за рахунок того, що паралельні дуги можна замінити однією дугою з передаточною функцією, яка дорівнює сумі передаточних функцій цих дуг. Простий шлях (якщо немає не належних до нього дуг, інцидентних його проміжним вершинам) можна замінити дугою з передаточною функцією, що дорівнює добутку передаточних функцій дуг цього шляху.

Знаходження передаточної функції САК за допомогою формули Мейсона. Формула Мейсона використовується для спрощення графів та знаходження передаточної функції замкнутої системи автоматичного керування за відомим графом системи.

Формулу записують у вигляді

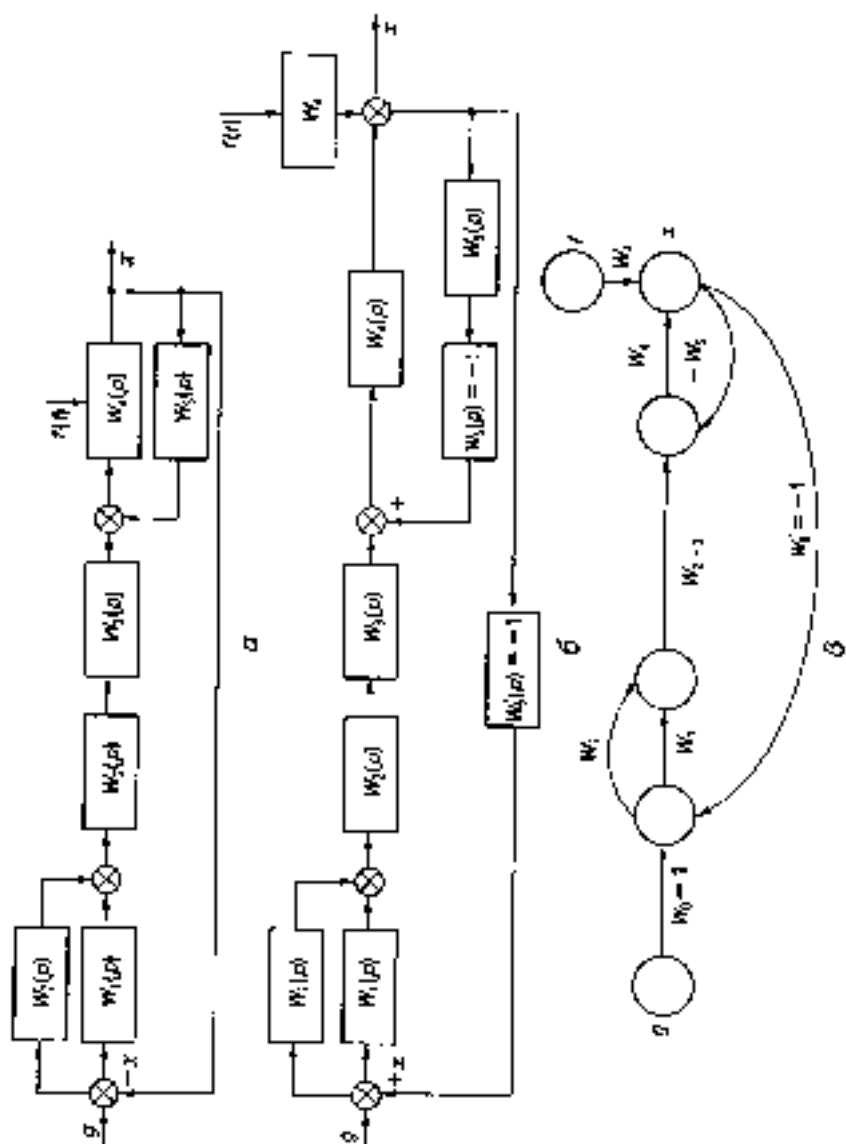
$$W(p)_{x,y} = \sum_{j=1}^n \frac{W_j(p) \Delta_j}{\Delta}, \quad (3.100)$$

де x — вхідна, а y — вихідна величини системи (графів); $W_j(p)$ — передаточна функція j -го простого шляху від вершини x до вершини y , що дорівнює добутку передаточних функцій дуг, які належать цьому шляху (контурі); n — кількість таких шляхів (для спрощення запису передаточних функцій для не писатимемо знак оператора p); Δ — визначник графа

Записується визначник графа у вигляді

$$\Delta = 1 - \sum W_{ij} - \sum_{j \neq i} W_{ij} W_{ik} - \sum_{i,j,k} W_{ij} W_{jk} W_{ki} - \dots$$

де W_{ij} — передаточна функція j -го простого контуру, яка дорівнює добутку передаточних функцій всіх дуг даного контуру. Перший член $\sum W_{ij}$ є сумою всіх подібних простих контурів. Другий член $\sum W_{ij} W_{jk}$ — сума пар контурів j та k , що не стикаються з іншими контурами (W_{ik} — результуюча передаточна функція контуру k , подібна до W_{ij}). Третя складова формули визначника $\sum W_{ij} W_{jk} W_{ki}$ — сума добутків передаточних функцій відповідних контурів; їх додан-



куть по трійці контури, що не стикаються. Аналогічно можна обчислювати й інші членні, якщо вони є в даному складному графі. При цьому треба мати на увазі, що контурами, що не стикаються, називають такі два контури, які не мають спільних дуг або вершин. Трійка, четвірка і так далі контурів вважається такою, що не стикається, якщо будь-яка пара контурів цієї трійки (четвірки і т. д.), взятою чергою, не стикається; Δ_i — детермінант підграфа, який можна лістати з головного (вихідного) графа при виключенні дуг і вершин i -го простого шляху, а також дуг і вершин, інцидентних цим вершинам.

Запишемо передаточну функцію системи автокатичного керування за завданням g згідно з формулою Менсона відповідно до рис. 3.39 (при цьому вважатимемо $f = 0$). З рис. 3.39, а видно, що від вершини g до вершини x є два $\{1, 1\}$ зрості шляхи з такими передаточними функціями:

$$W^I = W_2 W_1 W_{2-1} W_4 = W_1 W_{2-1} W_4;$$

$$W^II = W_3 W_2 W_{2-1} W_4 = W_2 W_{2-1} W_4.$$

Крім цього, у вихідному графі є три контури (позначимо їх 1, 2, 3), передаточні функції яких

$$W^I = W_1 W_{2-1} W_4 W_3 = -W_1 W_{2-1} W_4;$$

$$W^2 = -W_3 W_2;$$

$$W^3 = W_2 W_{2-1} W_4 W_3 = -W_2 W_{2-1} W_4.$$

Парі контурів, що не стикаються, граф не має, тому його визначник

$$\Delta = 1 - (W^I + W^2 + W^3) = 1 + W_1 W_{2-1} W_4 + W_2 W_3 + W_2 W_{2-1} W_4.$$

Підграфи, які відповідають простим шляхам від вершини g до x , замкнених контурів не мають, тому

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 1.$$

Формула Менсона в цьому разі матиме вигляд

$$W_{x,g} = \frac{W^I + W^II}{\Delta} = \frac{W_1 W_{2-1} W_4 + W_2 W_{2-1} W_4}{1 + W_1 W_{2-1} W_4 + W_2 W_3 + W_2 W_{2-1} W_4}.$$

Якщо потрібно знайти передаточну функцію за збуренням, то враховують, що $g = 0$. При цьому від вершини f до x маємо лише

$$+ C_{1k}(p)f_1 + \dots + C_{nk}(p)f_k.$$

У компактній формі це рівняння можна записати так:

$$\sum_{j=1}^n P_{ij}(p)x_j = \sum_{i=1}^n Q_{ij}(p)u_i + \sum_{j=1}^k C_{ij}(p)f_j,$$

де $P_{ij}(p), Q_{ij}(p), C_{ij}(p)$ – поліноми від p зі сталими коефіцієнтами при підпорядканих регульованих змінних $x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m$ – керуючі сигнали; $f_1, \dots, f_k$ – збурення.

Для багатовимірних систем найпоширенішою є матрична форма запису рівнянь, згідно з якою в даному разі введемо такі матриці:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad B(p) = \begin{bmatrix} Q_{11}(p) & \dots & Q_{1m}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ Q_{n1}(p) & \dots & Q_{nm}(p) \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix};$$

$$A(p) = \begin{bmatrix} P_{11}(p) & \dots & P_{1n}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{n1}(p) & \dots & P_{nn}(p) \end{bmatrix}; \quad C(p) = \begin{bmatrix} C_{11}(p) & \dots & C_{1k}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n1}(p) & \dots & C_{nk}(p) \end{bmatrix}; \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{bmatrix}.$$

При цьому вихідну систему рівнянь багатовимірної системи можна записати у вигляді

$$A(p)x = B(p)u + C(p)f.$$

□ **Приклад 3.4.** Дяка двовимірні система описується рівняннями

$$(T_1 p + 1)x_1 + (T_2 p + 1)x_2 = b_1 u_1 + b_2 u_2;$$

$$(T_1 p + a_1)x_1 + a_2 x_2 = b_1 u_1.$$

Записати рівняння цієї системи в матричній формі.

Розв'язання. Рівняння цієї системи в матричній формі матиме вигляд

$$A(p)x = B(p)u,$$

де

$$A(p) = \begin{bmatrix} T_1 p + 1 & T_2 p + 1 \\ T_1 p + 1 & a_2 \end{bmatrix}; \quad B(p) = \begin{bmatrix} b_1 p & b_2 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}.$$

Поведінку багатовимірних систем можна описувати також за допомогою передаточних функцій.

Передаточною функцією за деяким i -м параметром та k -м виходом називають відношення зображення за Лапласом $X_k(s)$ вихідного параметра x_k до зображення $U_i(s)$ вхідної величини u_i за нульових початкових умов. Згідно з цим

$$W_{ik}^u(s) = \frac{X_k(s)}{U_i(s)}.$$

Обчислити цю передаточну функцію можна, якщо згустувати у вихідній системі рівнянь зображеннями всіх сигналів і параметри керування, крім $U_i(s)$.

Аналогічно можна знайти також передаточну функцію за збуренням відповідно до цього виходу (параметра x_k).

$$W_{ik}^f(s) = \frac{X_k(s)}{F(s)}.$$

Для повного описання багатовимірних систем потрібно мати $n \times m$ передаточних функцій за керуванням і $n \times k$ передаточних функцій за збуренням, які в загальному вигляді можна записати як матриці.

$$W^u(s) = \begin{bmatrix} W_{11}^u(s) & \dots & W_{1m}^u(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{n1}^u(s) & \dots & W_{nm}^u(s) \end{bmatrix}, \quad W^f(s) = \begin{bmatrix} W_{11}^f(s) & \dots & W_{1k}^f(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{n1}^f(s) & \dots & W_{nk}^f(s) \end{bmatrix},$$

де $W^u(s)$ — матриця передаточних функцій за керуванням (або передаточна матриця), $W^f(s)$ — передаточна матриця за збуренням.

Зображення керованого параметра x через передаточні матриці матиме вигляд

$$X(s) = W^u(s)U(s) + W^f(s)F(s).$$

Розглянемо спосіб визначення передаточних матриць, що базується на відомих співвідношеннях, які наведемо без доведення.

$$W^u(s) = A^{-1}(s)B(s); \quad W^f(s) = A^{-1}(s)C(s).$$

При нульових початкових умовах $A(p) = A(s)$; $B(p) = B(s)$; $C(p) = C(s)$.

Згідно з положеннями теорії алгебри оберненої матрицю визначимо так:

$$A^{-1}(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} A_{11}(s) & \dots & A_{1n}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(s) & \dots & A_{nn}(s) \end{bmatrix}^T.$$

Знак T означає операцію транспонування.

Проілюструємо викладене на допоміжному простому прикладі.

- **Приклад 3.5.** Массо-пружинну систему, поведінка якої визначається двома диференціальними рівняннями

$$p^2 x_1 + px_1 + x_1 = u_1 + f_1;$$

$$px_1 + x_1 + px_2 = u_2 + f_2.$$

Необхідно знайти передаточні матриці за керуванням u і збуренням f .

Розв'язання. Запишемо наведені вище рівняння в формі зображення Лапласа

$$(s^2 + s)X_1(s) + X_2(s) = U_1(s) + F_1(s);$$

$$(s + 1)X_1(s) + sX_2(s) = U_2(s) + F_2(s).$$

Ця система в матричній формі матиме вигляд

$$A(s)X(s) = B(s)U(s) + C(s)F(s),$$

де

$$A(s) = \begin{bmatrix} s^2 + s & 1 \\ s + 1 & s \end{bmatrix}; \quad B(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Знайдемо визначник матриці

$$\Delta(s) = (s^2 + s)s - (s + 1) = s^2(s + 1) - (s + 1) = (s^2 - s)(s + 1).$$

Переставивши по діагоналі складові матриць $A(s)$ та змінюючи знаки елементів із непарною сумою індексів, отримаємо

$$\begin{bmatrix} s & -(s + 1) \\ -1 & s^2 + s \end{bmatrix}.$$

Легко знайдемо доповнення: $A_{11} = s$, $A_{12} = -(s + 1)$; $A_{21} = -1$; $A_{22} = s^2 + s$.

Оскільки $B(s)$ і $C(s)$ є одиничні матриці, то

$$W^{-1}(s) = W'^{-1}(s) = A^{-1}(s) =$$

У разі застосування перетворення Лапласа при ненульових початкових умовах ці поліноми є функцією деякої комплексної величини s і мали б записуватись у вигляді $d_s(z)$. При нульових початкових умовах, як зазначалося раніше, поліноми можна записувати у вигляді $d_s(p)$.

Перевід від рівнянь ланок конкретної системи в визначення системи рівнянь та їх коефіцієнтів вигляду d_s (рідко описаних конкретної САК досить детально викладено рідше на конкретному прикладі застосування теореми Крамера).

У разі багатовимірних систем їх описання і дослідження значно ускладнюються. Тому для дослідження таких систем розроблено так звані *методи змінних стану*, який може застосовуватись також і для дослідження одновимірних систем.

Метод базується на тому, що для розв'язання диференціального рівняння n -го порядку, яке характеризує динамічні процеси в деякій системі автоматичного керування (рис. 3.40), необхідно знати n початкових значень регульованої величини x - її початково-го значення $x(t_0) = x(0)$ та $n-1$ похідних при $t = t_0$, а саме: $x(t_0) = \dot{x}(0)$, $\ddot{x}(t_0) = \ddot{x}(0)$, ..., $x^{(n-1)}(t_0) = x^{(n-1)}(0)$.

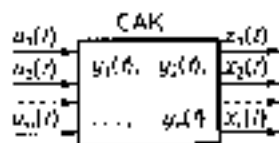


Рис. 3.40

Ці початкові умови визначають подальший рух системи.

Для характеристики внутрішнього стану системи виводять деякі абстрактні характеристики системи $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ з початковими умовами $y_1(0), y_2(0), \dots, y_n(0)$, за допомогою яких з урахуванням вихідної для $u(t)$ можна однозначно визначити динамічні процеси в системі.

Змінні $y_1(t), \dots, y_n(t)$ називають *змінними стану системи*.

У загальному вигляді деякі змінні стану $y_k(t)$ записується так

$$y_k(t) = f_k[y_1(0) \dots y_n(0); u_1(t) \dots u_n(t)].$$

Стан системи в довільний момент часу t визначають за допомогою вектора стану $y(t)$, що є функцією змінних стану $y_k(t) (k = 1, \dots, n)$:

$$y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]'. \quad (3.102)$$

Множину всіх значень вектора стану $y(t)$ на деякому інтервалі зміни часу t називають *простором стану* або *фазовим простором*. Його можна розглядати як деякий n -вимірний абстрактний простір, що відповідає порядку диференціального рівняння системи.

Кінець вектора стану при русі в просторі стану має множину положень, яка називається *траєкторією вектора стану* або *фазовою траєкторією*. Кожна фіксована точка цього положення називається *зображеною точкою*.

Фазовий простір, який відповідає рівнянню динаміки першого порядку, називають *одновимірним*. Його можна зобразити як пряму на деякій площині, а фазову траєкторію — як сукупність точок (відрізок) на цій прямій.

При $n = 2$ вектор стану є функцією двох змінних $y_1(t)$ і $y_2(t)$. Фазовий простір при цьому називають *двовимірним*. Він є площинною з координатами $y_1 = y_2$, а фазова траєкторія — крива на цій площині.

Тривимірний простір відповідає системам при $n = 3$.

Фазові траєкторії і простори стану одно-, дво- і тривимірних систем зображено на рис. 3.41, а—в.

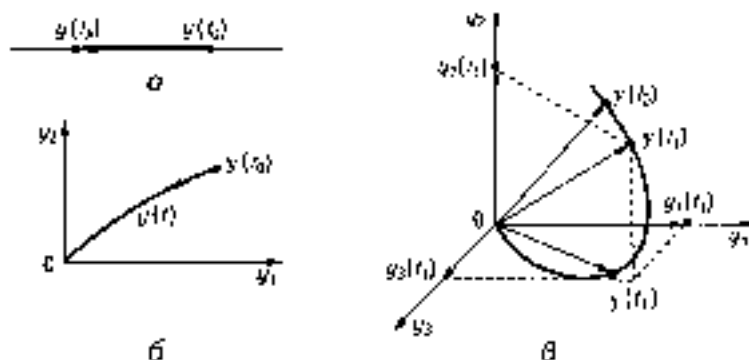


Рис. 3.41

При $n = 4$ маємо чотиривимірний простір і т. д.

При застосуванні методу змінних стану виділяють *простору керувань*, *простору виходів* і *простору збурень*. При цьому під простором керувань розуміють множину можливих значень $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$, під простором виходів — множину $x_1(t), x_2(t), \dots, x_r(t)$, а під простором збурень — множину $f_1(t), f_2(t), \dots, f_l(t)$. Ці множини є координатами векторів: керувань в n -вимірному просторі $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)]^T$, виходів в r -вимірному просторі $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_r(t)]^T$ і збурень в l -вимірному просторі $f(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_l(t)]^T$.

Фізична суть змінних стану (які, як було вказано раніше, в загальному вигляді можуть бути абстрактними величинами) залежить від вибору базису, при зміні якого можна змінити і величин стану.

При дослідженні конкретних систем за зміни стану приймають деякі фізичні величини, які характеризують поведінку даної системи.

Рівняння стану. Якщо вважати, що змінна $\dot{y}(t)$ в $x = \dot{y}$ залежить тільки від поточного стану системи, то систему автоматичного керування можна описати системою диференціальних рівнянь першого порядку в нормальній формі Коші, згідно з якою похідні змінних стану залежать від значення змінних часу і керувань $u(t)$.

Згідно з рис. 3.40 можна записати:

$$\begin{aligned} J_1(t) &= \varphi_1[y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t); t]; \\ J_2(t) &= \varphi_2[v_1(t), v_2(t), \dots, v_s(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t); t]; \\ &\vdots \\ J_m(t) &= \varphi_m[y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t); t]. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Значення змінної стану, знаходимо кожній з вихідних систем $x_i(t)$ як функцію $x_i(t)$ змінних стану і керувань (вхідні).

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \gamma_1[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t); u_0(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t]; \\x_2(t) &= \gamma_2[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t); u_0(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t] \\&\vdots \\x_k(t) &= \gamma_k[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t); u_0(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t].\end{aligned}\quad (3.104)$$

Якщо рівняння (3.103), (3.104) виразити лінійними гіперпервідами, а систему детермінованою, то ці рівняння однозначно визначають поведінку системи. Ці рівняння називають *рівняннями стану системи*. При визначенні умов змін стану і вихідні величини не залежить від моменту появи вхідного сигналу $u(t)$.

При цьому рівняння (3.103), (3.104) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + \\ &\quad + b_{11}u(t) + b_{12}u_1(t) + \dots + b_{1m}u_m(t); \\ \dot{V}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + \\ &\quad + b_{21}u(t) + b_{22}u_1(t) + \dots + b_{2m}u_m(t); \end{aligned}$$

ϵ *матриця керування* (матриця входу) розмірності $l \times m$, яка визначає взаємозалежність входу системи і змінних стану;

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} c_{12} \dots c_{1m} \\ c_{21} c_{22} \dots c_{2m} \\ \dots \dots \dots \\ c_{r1} c_{r2} \dots c_{rm} \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

ϵ *матриця вихідних координат* (матриця виходу) розмірності $r \times l$, яка визначає характер взаємозв'язку вихідних величин зі змінними стану;

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} d_{12} \dots d_{1l} \\ d_{21} d_{22} \dots d_{2l} \\ \dots \dots \dots \\ d_{r1} d_{r2} \dots d_{rl} \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

ϵ *матриця* розмірності $r \times l$, що характеризує прямий зв'язок вихідних координат $x(t)$ з керуванням; визначає безпосередній вплив керування на різні складові вихідних координат, для багатовихідних систем $D \neq 0$.

Структурну схему багатовимірної системи, що відповідає наведеним рівнянням стану, подано на рис. 3.42. Подвійні лінії відображають матрично-векторний характер математичної моделі системи.

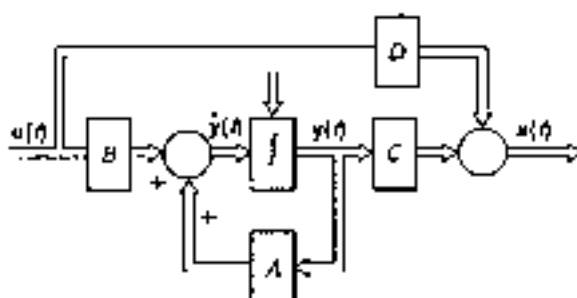


Рис. 3.42

Знаходження рівнянь стану і аналогових моделей систем Розглянемо одновимірну систему, динаміка якої описана диференціальним рівнянням n -го порядку, зведеним до нормованого вигляду:

слідку, при якому коефіцієнти за найвишого порядку похідної від регульованої величини x дорівнюють одиниці ($a_n = 1$); $u(t)$ — вхідна величина. Отже, вихідне рівняння має вигляд

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} + a_n x(t) = b_0 u(t). \quad (3.112)$$

Якщо початкові умови відомі, то, як вказувалося раніше, змінні стану можна записати так:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= x(t), \\ y_2(t) &= \dot{x}(t) = \dot{y}_1(t), \\ \dot{y}_3(t) &= \ddot{x}(t) = \dot{y}_2(t), \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{y}_n(t) &= x^{(n-1)}(t) = \dot{y}_{n-1}(t). \end{aligned} \quad (3.113)$$

З рівняння (3.112) знайдемо зв'язання похідної найвишого порядку:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = -a_n x(t) - a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} - \dots - a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + b_0 u(t). \quad (3.114)$$

На основі рівнянь (3.113) і (3.114) можна дістати систему диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2(t); \\ \dot{y}_2(t) &= y_3(t); \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{y}_n(t) &= -a_n y_1(t) - a_{n-1} y_2(t) - \dots - a_1 y_n(t) + b_0 u(t); \\ \dot{x}(t) &= y_1(t). \end{aligned} \quad (3.115)$$

Зведемо наведений систему рівнянь стану (3.115) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1}(t) \\ \dot{y}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t);$$

$$x(t) = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] y_1(t) y_2(t) \dots y_n(t)^T \quad (3.116)$$

У векторній формі рівняння стану матимуть вигляд

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t); \quad (3.117)$$

$$x(t) = Cy(t),$$

а відповідні матриці ---

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}. \quad (3.118)$$

Матриця керування B розмірністю $n \times 1$ має вигляд

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (3.119)$$

а матриця вихідних координат C розмірністю $1 \times n$ ---

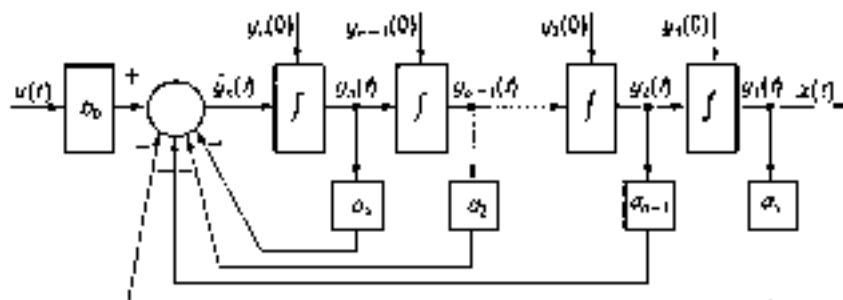
$$C = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]; \quad (3.120)$$

$$y(t) = [y_1(t) y_2(t) \dots y_n(t)]^T. \quad (3.121)$$

Схему аналогового моделювання одновимірної системи автоматичного керування, що відповідає рівнянням (3.115), наведено на рис. 3.43. У модель введено початкові умови змінних стану $y_1(0), \dots, y_1(0)$, а також значення коефіцієнтів $a_1, \dots, a_n$. Змінюючи вхідну величину $u(t)$ за допомогою даної аналогової моделі, можна дістати залежність $x(t)$.

Загальна методика розв'язання рівнянь стану Однорідні рівняння. Однорідні рівняння стану (яке не враховує ліній вхідних величин $u(t)$) є векторно-матричним рівнянням вигляду

$$\dot{y}(t) = Ay(t). \quad (3.122)$$

**Рис. 3.43**

Воно визначає вільні коливання системи. Позначимо початкові умови, $y_1(0), y_2(0), \dots, y_n(0)$. Іній вектор

$$y(0) = [y_1(0) y_2(0) \dots y_n(0)]^T.$$

Відповідне скалярне диференціальне одноразне рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) \quad \text{або} \quad \frac{dy(t)}{y(t)} = a dt,$$

Зміст рівняння обидві частини останнього виразу, дістанемо

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{dy(t)}{y(t)} = a \int_0^t dt$$

або

$$\ln \frac{y(t)}{y(0)} = at,$$

звідки

$$y(t) = e^{at} y(0).$$

Розкладемо експоненціальну функцію e^{at} в степеневий ряд, одержимо

$$y(t) = e^{at} y(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (at)^k y(0) \quad (3.123)$$

Для матричної функції e^{At} згідно з формулами матричного числення маємо

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k.$$

де A , I — відповідно довільна й одинична матриці розмірності $n \times n$.
Згідно зі скалярним рівнянням (3.123)

$$y(t) = e^{-At} y(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k y(0). \quad (3.124)$$

Здиференціювавши обидві частини цього рівняння, маємо

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^k t^{k-1} y(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} (At)^{k-1} y(0), \quad (3.125)$$

де $k-1 = k$.

Підставляючи в ліву частину виразу (3.125) відповідне значення з (3.123), а в праву — з (3.124), бачимо, що вони тотожні, а це дає змогу стверджувати, що (3.124) — загальний розв'язок векторно-матричного рівняння.

Функція e^{-At} називають *перехідною функцією стану* або (часто) *фундаментальною матрицею*.

Отже, розв'язок однорідного векторно-матричного рівняння (3.122) матиме вигляд

$$y(t) = e^{-At} y(0).$$

Для лінійних стаціонарних систем розв'язок однорідного рівняння через перехідну матрицю стану можна записати у вигляді

$$y(t) = e^{-At} y(0). \quad (3.126)$$

Основні властивості перехідної матриці стану наведено без вичислювальних доказів.

1. Вимірність перехідної матриці стану дорівнює вимірності відповідної квадратної матриці A . Тому вона також є квадратною матрицею розмірності $n \times n$, а її складові — функціїми часу.

2. При $t = 0$

$$e^{-At} = I$$

3. Перехідна матриця стану e^{-At} є неособливою матрицею, а це можливо при умові, що $\det e^{-At} \neq 0$.

4. Для перехідної матриці стану $e^{-At} e^{-Bt} = e^{-(A+B)t}$ дійсно тоді, коли $AB = BA$.

$$5. |e^{-At}|^{-1} = e^{At}.$$

$$6. \frac{d}{dt} e^{-At} = -A e^{-At} = -e^{-At} A.$$

$$7. \int_0^t e^{-As} ds = A^{-1}(e^{-At} - I) = (e^{-At} - I)A^{-1}.$$

Загальна методика розв'язання неоднорідних рівнянь.

Розглянемо це питання на прикладі стаціонарного векторно-матричного рівняння стану:

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t).$$

Початкові умови визначаються вектором початкових умов і рівнянням виходу:

$$\dot{x}(t) = C'y(t) + Du(t).$$

Помноживши на e^{-At} обидві частини виразу $\dot{y}(t)$, дістанемо

$$e^{-At}\dot{y}(t) = e^{-At}Ay(t) + e^{-At}Bu(t),$$

або

$$e^{-At}\dot{y}(t) - e^{-At}Ay(t) = e^{-At}Bu(t).$$

Згідно з властивостями матриці маємо

$$\frac{d}{dt}e^{-At} = -e^{-At}A = -Ae^{-At},$$

тому

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}y(t)] = e^{-At}Bu(t).$$

Зінтегрувавши обидві частини цього виразу від 0 до t , маємо

$$e^{-At}y(t) - y(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau.$$

Врахувавши цілу властивість матриці, дістанемо

$$y(t) = e^{At}y(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau.$$

або, з урахуванням четвертої властивості,

$$y(t) = e^{At}y(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Перша складова правої частини цього рівняння описує вільні рухи системи, зумовлені початковими умовами, а друга — рух системи, зумовлений вектором керування і реакцією системи з відповідними нульовими початковими умовами.

Якщо підставити $y(t)$ у вираз $\dot{x}(t)$, записаний вище, то

$$\dot{x}(t) = Ce^{-At}x(0) + \int_0^t Ce^{-A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Реакція стаціонарної системи не залежить від моменту t , прикладання дії, тому можна записати розв'язок неоднорідного рівняння стану у вигляді

$$y(t) = e^{-At-t_0}y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$

$$x(t) = Ce^{-At-t_0}y(t_0) + \int_{t_0}^t Ce^{-A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Ці вирази відносять до розв'язку скалярного рівняння першого порядку

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t),$$

яке має вигляд

$$\dot{y}(t) = e^{At-t_0}y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Знайдені згідно з наведеною методикою рівняння стану та їх розв'язки можуть бути основою для дослідження поведінки САК у динамічних режимах. Цей процес зводиться до визначення перехідної матриці стану e^{-At} . У цьому разі це має важливе значення, тому, що складові перехідної матриці стану відображають перехідну функцію системи і функцію ваги, які є основними динамічними характеристиками САК.

Аналіз виразу e^{-At} потребує застосування окремих методів дослідження. За великих розмірностей n матриці єдиними практично можливими є методи, що базуються на використанні ЕОМ за допомогою спеціальних алгоритмів і програм, які наводяться в спеціальній літературі.

Контрольні запитання та завдання

1. Назвіть основні типи ланки САК.
2. Назвіть динамічні характеристики ланок і запишіть їх рівняння.
3. Від чого залежать динамічні властивості ланок другого порядку?
4. Що таке передаточна функція? Напишіть вираз передаточних функцій основних типових ланок.
5. Випадіть методику побудови амплітудно-фазової частотної характеристики ланки.
6. Назвіть основні частотні характеристики ланок. Наведіть приклад їх побудови для апериодичної ланки першого порядку.
7. У чому полягає методика побудови результуючих частотних характеристик при послідовному і паралельному з'єднанні ланок?
8. Як дістати логарифмічні частотні характеристики? Вкажіть їхні переваги.
9. Назвіть особливості мінімізації і максимізації фазових ланок.
10. Як визначите рівняння динаміки при послідовному з'єднанні ланок?
11. Запишіть рівняння динаміки САК стабілізації та поясніть значення його складових.
12. Запишіть рівняння динаміки САК слідувальної системи та поясніть значення його складових.
13. Як дістати рівняння динаміки САК за допомогою теорему Кулсера?
14. Запишіть вирази передаточних функцій САК за збуренням і заданим.
15. Перелічіть основні принципи побудови одноконтурних структурних схем.
16. Сформулюйте принципи переносу вузлів і додатних пристроїв у структурних схемах із перехресними зворотними зв'язками.
17. Що таке граф? Назвіть види графів, укажіть особливості їх використання в ТАК.
18. Запишіть і поясніть суть складових формули Мейсона для деякого найпростішого випадку.
19. У чому полягає суть методу змінних стану?
20. Напишіть рівняння стану в загальному вигляді.

4.1

Поняття стійкості САК

Під стійкістю системи в найзагальнішому випадку розуміють її властивість повертатися у початкове (або близьке до того) положення після зникнення дії факторів (збурень), які вивели систему зі стану початкової рівноваги. Стійкість системи є необхідною умовою можливості САК виконувати поставлене перед нею завдання.

Найпростішим прикладом, що характеризує різні сторони поняття стійкості системи, може бути рис. 4.1.

Розглянемо рух кулі по деякому криволінійному шляху (рис. 4.1, а). Якщо куля переміщуватиметься зовнішніми силами із початкового початкової рівноваги 0 в положення I, II або III, то після зникнення цих сил куля повернеться у початкове положення (або близьке до нього) залежно від сил тертя. При цьому можливі коливання кулі відносно початкового положення.

У випадку, що відповідає рис. 4.1, б, куля займає нестійке положення рівноваги 0. Досить незначного зміщення кулі відносно цього положення, і вона не зможе самостійно повернутися до початкового стану.

Обидва розглянуті варіанти поведінки кулі зображено на рис. 4.1, в. Залежно від початкового положення рівноваги і характеру дії зовнішніх сил у разі відхилень кулі в межах відрізка шляху 0 — I вона повертатиметься у положення 0. У разі виходу за межі цього відрізка повернення в початкове положення стає неможливим.

Для характеристики поведінки кулі в найзагальнішому випадку нелінійних систем використовується поняття стійкості «в малому», «в великому» і «в цілому» (для окремих видів нелінійностей її називають абсолютною стійкістю).

Система є стійкою «у великому», якщо визначено межі області можливих відхилень, в яких система повертається у початкове положення, з відомо, що початкові відхилення системи не виходять за межі цієї області. Система стійка «в малому», якщо межі області стійкості не визначені, а показано лише факт її наявності. Система стійка «в цілому», якщо вона повертається у початкове положення рівноваги за будь-яких початкових відхилень (рис. 4.1, а).

Шлях кулі, зображений на рис. 4.1, а, відповідає стійкості «у великому», якщо початкові відхилення є тільки в межах $0 - I$, і нестійкості «у великому», якщо початкові відхилення можливі в межах $0 - II$. У цьому випадку система стійка «в малому» (на відрізку $0 - I$) і нестійка «у великому» (на відрізку $0 - III$).

Система, стійка «в цілому», завжди є стійкою «у великому» і «в малому». Система, стійка «у великому», є стійкою «в малому».

В теорії автоматичного керування розрізняють поняття незбуреної рівноваги (положення 0 на рис. 4.1, а) і збуреного стану, в яке переходить система у разі дії збурення і наступного його зникнення (положення II на рис. 4.1, а).

Крім відносно простого випадку початкового положення рівноваги, коли об'єкт (кулі) нерухомирні, можливі й складніші випадки, коли незбурений стан системи є рухом за деякою траєкторією (наприклад, у програмних САК). Такий стан системи називають *незбуреним рухом*. У разі дії на систему зовнішніх факторів виникають відхилення від початкового руху, з таким станом системи називають *збурений рух*.

Незбурений рух системи називають *стійким*, якщо після зняття зовнішніх сил збурений рух через деякий час увійде в задану область ε .

При цьому можна записати

$$\Delta x(t) \leq \varepsilon, \quad (4.11)$$

де $\Delta x(t)$ — відхилення координат збуреного руху.

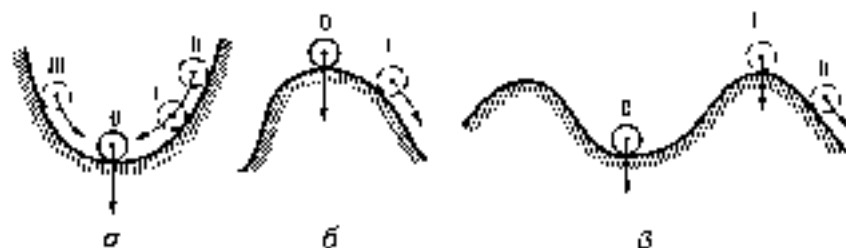


Рис. 4.1

4.2

Стійкість за Ляпуновим

У 1892 р. О. М. Ляпунов сформулював поняття стійкості, виходячи із того, що незбурений рух є деяким визначеним рухом системи, що підлягає дослідженню на стійкість. Він міг бути як ustalений, так і не ustalений. Згідно з цим визначення стійкості за Ляпуновим формулюється таким чином:

незбурений рух є стійким відносно змінних x , якщо за будь-якого довільно заданого додатного числа ε , яким би малим воно не було, можна вибрати друге додатне число $\delta(\varepsilon)$ таке, що за будь-яких збурень x_0 , що задовольняють умову

$\sum_{i=1}^n x_{i0}^2 < \delta$, і за довільних $t \geq t_0$ виконуватиметься нерівність

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(t) < \varepsilon. \quad (4.2)$$

Практично стійкість незбуреного руху за Ляпуновим означає, що за досить малих початкових збурень збурений рух як загодно мало відрізняється від незбуреного. Якщо незбурений рух нестійкий, то збурений все більше віддалятиме від нього в разі найменших початкових збурень.

Основні особливості визначення поняття стійкості за Ляпуновим полягають в тому, що стійкість розглядається на нескінченному інтервалі часу, збурення були малими і діють лише на початкові умови. В ТАК існує також поняття *асимптотичної стійкості*, при якому розуміють таку стійкість незбуреного руху, за якою збурений рух за досить малих початкових збурень прагне до незбуреного руху.

Теоретично умову асимптотичної стійкості можна записати у вигляді

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta x(t)| = 0. \quad (4.3)$$

Іншої умову стійкості технічних систем записують так.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta x(t)| < \varepsilon, \quad (4.4)$$

де $\Delta x(t)$ — відхилення ординати неусталеного руху відносно відповідної ординати ustalеного; ε — деяка довільно мала величина.

У найбільшій частині випадків відповідь на всі питання динаміки САК, у тому числі стійкості, можна дістати на основі аналізу харак-

теристиками перехідного процесу, яку визначають у разі розв'язання диференціального рівняння замкнутої системи.

При виведенні рівняння замкнутої САК, як вказувалось раніше, в багатьох випадках використовується лінеаризація нелинійних залежностей за допомогою ряду Тейлора. Виведене таким чином рівняння називають рівнянням *першого наближення*.

4.3

Дослідження і аналіз стійкості за коренями характеристичного рівняння

Розглянемо лінійну САК стабілізації, рівняння динаміки якої в загальному вигляді в операторній формі має вигляд

$$[P(p) + Q(p)]x(t) = P_1(p)S(p)f(t), \quad (4.5)$$

де $f(t)$ — функція збурення.

Після нескладаних перетворень це рівняння можна записати так:

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = \\ = b_0 \frac{d^n f}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} + \dots + b_n f, \end{aligned} \quad (4.6)$$

де $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ — коефіцієнти рівняння, що визначаються параметрами ланок системи (сталими часу та коефіцієнтами передачі); x — регульований параметр.

Наведене рівняння замкнутої системи є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку ($n \geq m$). Його розв'язок згідно з відомим принципом суперпозиції

$$x = x_{\text{пер}} + x_{\text{ст}}, \quad (4.7)$$

де $x_{\text{пер}}$ — перехідна складова, яка є загальним розв'язком однорідного диференціального рівняння

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = 0, \quad (4.8)$$

яке визначає рух системи після зникнення збурення і називається *розв'язком вільного руху*; $x_{\text{вн}}$ — частковий розв'язок неоднорідного рівняння, який характеризує усталення стан системи (при $t \rightarrow \infty$) залежить від параметрів системи та збурення f , але на стійкість системи не впливає.

Отже, стійкість лінійної системи залежить від розв'язку рівняння вільного руху (4.8)

$$x_{\text{вн}} = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}, \quad (4.9)$$

де $C_1, \dots, C_n$ — сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов; $p_1, \dots, p_n$ — корені характеристичного рівняння, які визначаються параметрами ланки системи.

Характеристичне рівняння має вигляд

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_0 = 0 \quad (4.10)$$

Отже, можна зробити такі висновки.

1. Стійкість лінійних САК не залежить від величини і вигляду збурення.

2. Стійкість лінійних систем визначається за коренями характеристичного рівняння, які залежать від параметрів системи.

Згідно з викладеним найзагальнішим методом аналізу стійкості є аналіз за коренями характеристичного рівняння.

Аналіз стійкості за коренями характеристичного рівняння замкнутої системи. Розглянемо розв'язок рівняння вільного руху залежно від вигляду коренів характеристичного рівняння

1. Нехай усі корені дійсні та від'ємні: $p_1 < 0, \dots, p_n < 0$. У цьому разі кожна складова розв'язку рівняння вільного руху (4.9) $N_1, N_2, \dots, N_n$ є експоненціою, яка при $t \rightarrow \infty$ прямує до нуля (рис. 4.2, а). Перехідний процес у цьому разі буде затухаючим, а система — стійкою.

2. Нехай усі корені дійсні та від'ємні, крім кореня $p_1 > 0$. Тоді всі складові розв'язку $x_{\text{вн}}$ будуть затухаючими, крім

$$N_1 = C_1 e^{p_1 t} \rightarrow \infty, \quad (4.11)$$

яка визначає нестійкість системи в даному випадку (рис. 4.2, б).

3. Нехай усі корені характеристичного рівняння лінійні та від'ємні, крім двох:

$$p_1 = \alpha + j\beta, \quad p_{n-1} = \alpha - j\beta,$$

Сума складових розв'язку $x_{пер}$, що відповідає сумі цих коренів, матиме вигляд

$$N = N_k + N_{s+1} = C_k e^{p_k t} + e^{p_{s+1} t} (C_{s+1} e^{i\omega t} + C_{s+2} e^{-i\omega t}) = e^{p_k t} (C_k e^{i\omega t} + C_{s+1} e^{-i\omega t})$$

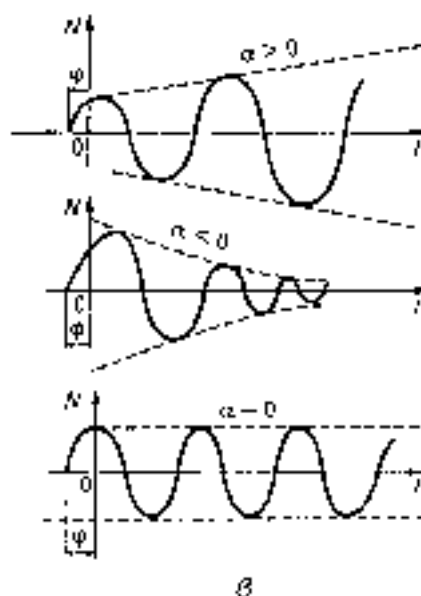
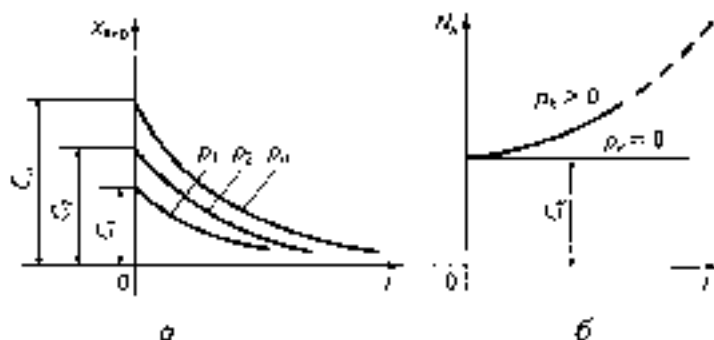


Рис 4.2

Замінивши показникову форму запису на тригонометричну, згідно з формулою Ейлера можна записати

$$\begin{aligned} e^{i\beta t} &= \cos \beta t + j \sin \beta t; e^{-i\beta t} = \cos \beta t - j \sin \beta t, \\ N = e^{i\beta t} [C_k (\cos \beta t + j \sin \beta t) + C_{k+1} (\cos \beta t - j \sin \beta t) - \\ &= e^{i\beta t} [(C_k + C_{k+1}) \cos \beta t + j(C_k - C_{k+1}) \sin \beta t] = \\ &= e^{i\beta t} (A \cos \beta t + jB \sin \beta t), \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$N = e^{i\beta t} D \sin(\beta t + \varphi),$$

де $A = C_k + C_{k+1}$; $B = C_k - C_{k+1}$; $D = \sqrt{A^2 + B^2}$; $\varphi = \arctg \frac{A}{B}$.

Співмножник $D \sin(\beta t + \varphi)$ є синусоїдою з амплітудою D , зсунутою відносно початку координат на кут φ . У цьому разі характер зміни складової N перехідного процесу $x_{\text{вх}}$ визначається знаком величини α у співмножнику $e^{i\beta t}$ складової N .

При графіки, які відповідають різним значенням α , зображено на рис. 4.2, а. Так, при $\alpha < 0$ і $t \rightarrow \infty$ $e^{i\beta t} = \frac{1}{e^{-\alpha t}} \rightarrow 0$, $N \rightarrow 0$ і система буде стійкою.

При $\alpha > 0$ і $t \rightarrow \infty$ $N \rightarrow \infty$, $x_{\text{вх}} \rightarrow \infty$ і система буде нестійкою.

При $\alpha = 0$ $N = D \sin(\beta t + \varphi)$ є складовою, яка зумовить коливання в системі зі сталою амплітудою D .

4. Якщо всі корені характеристичного рівняння замкнутої системи дійсні та від'ємні, а один із них $p_1 = 0$, то $N_1 = C_1$ буде сталою величиною (рис. 4.2, б).

Для зображення поведінки САК залежно від впливу коренів характеристичного рівняння замкнутої системи часто використовують комплексну площину коренів (рис. 4.3).

При цьому корені p_1 (дійсний, додатний), p_2, p_3 (комплексні з додатною дійсною частиною), які знаходяться у правій частині комплексної площини коренів, розділені уявною віссю, відповідають нестійкій САК. Ці корені часто називають «правими коренями».

Корені, які знаходяться ліворуч від уявної вертикальної осі (лінійні, від'ємні p_4, p_5 , комплексні з від'ємною дійсною частиною p_6, p_7 — «ліві корені»), відповідають стійкій САК.

Отже, перехід коренів з лівої налівопівплощини в праву у разі зміни деяких параметрів системи, що зумовлює зміну знака коренів, стійку

систему може зробити нестійкою. Згідно з цим вертикальну (уявну) вісь у комплексній площині кінців називають *межею стійкості*.

Відстань до уявної осі найменшого «лівого» кореня (за відсутності «правих» коренів або коренів, які знаходяться на уявній осі) характеризують *танге стійкості* системи.

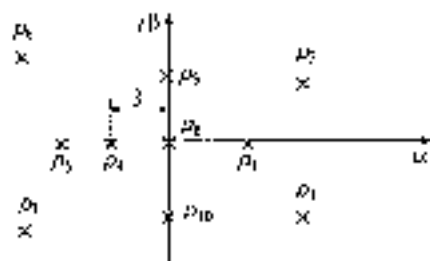


Рис. 4.3

Наявність нульового кореня p_0 або пари чисто уявних коренів p_1, p_2 зумовлює особливий випадок поведінки системи — перебування її на межі стійкості.

При дослідженні ринних першого наближення виникає принципове запитання: якою мірою результати, які можна дістати при цьому, відповідалимуть реальним нелінійним системам?

Висновки дослідження щодо принципового питання, відомі як теорема Ляпунова, наведено також без доведень.

Теорема 1

Якщо всі корені характеристичного рівняння лінеаризованої системи є дійсними або комплексними з від'ємною дійовою частиною, то збіжний рух вихідної (нелінійної) системи буде стійким незалежно від значень відхилення при лінеаризації членів ряду Тейлора.

Теорема 2

Якщо серед коренів характеристичного рівняння лінеаризованої системи є дійсний корінь з від'ємною дійовою частиною і дійсний дійовий частини, то збіжний рух вихідної системи буде нестійким незалежно від значень відхилення при лінеаризації членів ряду Тейлора.

Теорема 3

Якщо серед коренів характеристичного рівняння лінеаризованої системи є нульовий або чисто уявний, то для оцінки стійкості вихідної системи необхідно врахувати наступні складові ряду Тейлора, відхилення при лінеаризації.

Наведені теореми є теоретичною основою можливості оцінки стійкості реальних (вихідних) системи за допомогою лінеаризованих рівнянь.

Сного часу існують відомі складнощі щодо знаходження коренів алгебраїчних рівнянь високого порядку. Тому було розроблено методи, що дають змогу досліджувати стійкість САК без знаходження коренів характеристичного рівняння. Ці методи ґрунтуються на *критеріях стійкості*.

Зараз у зв'язку із поширенням комп'ютерних і адаптивних численних прикладних програм труднощі у визначенні коренів практично не існують, проте комп'ютери стійкості не втрачають свого значення. Вони дають змогу не тільки визначити факт стійкості або нестійкості. Їх широко застосовують для визначення запасу стійкості, вирішення задач щодо підвищення якості систем та їх корекції, визначення амплітуди і частоти автоколивань нелінійних систем тощо.

Існують два основні види критеріїв стійкості: алгебраїчні та частотні.

4.4

Алгебраїчні критерії стійкості

До алгебраїчних критеріїв стійкості належать критерії Рауса, Гурвіца, Вунша-єрадекого, Чіапа-Шатера, до частотних — критерій Михайлова та його наслідок (друге формулювання критерію), критерій Найквіста, метод D-розбиття, логарифмічні критерії.

Алгебраїчні критерії дають змогу оцінювати стійкість за коефіцієнтами характеристичного рівняння замкнутої системи.

Як вказувалося раніше, характеристичне рівняння одноконтурної замкнутої системи

$$P(p) + Q(p) = 0.$$

Після перемноження співмножників, які входять до складу операторів $P(p) = P_1(p)P_2(p)\dots P_n(p)$; $Q(p) = Q_1(p)Q_2(p)\dots Q_m(p)$, та зведення подібних членів характеристичне рівняння замкнутої системи має вигляд

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0 \quad (4.13)$$

Аналіз перехідних характеристик типових ланок першого і другого порядків свідчить, що для рівняння першого і другого порядків необхідною і достатньою умовою є додатне значення коефіцієнтів.

що зумовлюється від'ємними знаками дійсних коренів або дійсних частин комплексних коренів.

Для систем вищого порядку ($n \geq 3$), крім доштаного знака коефіцієнтів характеристичного рівняння замкнутої системи, необхідно, щоб виконувалися й інші умови згідно з відповідними критеріями.

Критерій Рауса—Гурвіца. Англієцький математик Е. Раус (1877 р.) і австрійський вчений А. Гурвіц (1895 р.) незалежно один від одного запропонували критерії, на основі яких єдиним можливим лінійним умови стійкості лінійних САР, виходячи зі значень коефіцієнтів характеристичного рівняння.

Е. Раус запропонував критерій у вигляді алгоритму, на основі якого можна скласти таблицю для оцінки стійкості системи. Критерій А. Гурвіца було представлено визначниками, які формуються за відповідними правилами. Кінцеві результати (умови стійкості) в обох критеріях однакові. Тому в ТАК для економії часто використовується одна записка на дві — критерій Рауса—Гурвіца. Проте, враховуючи більшу простоту формування визначників, які визначають умови стійкості, на практиці частіше користуються критерієм Гурвіца.

Згідно з цим критерієм умови стійкості формуються таким чином:

усі корені характеристичного з'являння $a_0 p^n + \dots + a_1 p + a_0 = 0$ мають у від'ємні дійсні частини (або будуть дійсними від'ємними), якщо три додатному знаку всіх коефіцієнтів $a_0, \dots, a_1$ будуть додатними головний визначник Гурвіца $\Delta_1 > 0$ і його діагональні минори $\Delta_2, \dots, \Delta_{n-1} > 0$.

Наведемо правило знаходження визначника Гурвіца.

1. По головній діагоналі записують коефіцієнти характеристичного рівняння під a_1 до a_n .

2. Містя зверху від діагоналі записують коефіцієнтами з більшим індексом, знизу — з меншим.

3. За відсутності відповідного коефіцієнта ставлять нуль.

4. Діагональні минори визначають із головного визначника Гурвіца викреслюванням відповідних стовпців і рядків.

Розглянемо конкретний приклад формулювання умов стійкості для системи п'ятого порядку.

■ Приклад 4.1. Знайти головний визначник Гурвіца і його діагональні минори для замкнутої системи з характеристичним рівнянням

$$a_5 p^5 + a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Розв'язання. Головний визначник Гурвіца має вигляд

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}, \quad (4.14)$$

а діagonalна канони —

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$$

Умови стійкості наданому виразу є: $a_0 > 0$; $a_1 > 0$; ..., $a_4 > 0$; $\Delta_1 > 0$; $\Delta_2 > 0$; $\Delta_3 > 0$; $\Delta_4 > 0$.

У системі при $n = 3$ характеристичне рівняння замкнутої системи має вигляд

$$a_3 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_4 = 0,$$

а головний визначник Гурвіца —

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Розкриваючи його за елементами останнього стовпця, дістаємо

$$\Delta_1 = a_3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2$$

Звідси можна зробити висновок: оскільки $a_3 > 0$, то Δ_1 може бути більше за нуль лише тоді, коли $\Delta_2 > 0$.

Отже, при $n = 3$ необхідною і достатньою умовою стійкості системи є $\Delta_2 > 0$ (звичайно, при $a_0 > 0$; $a_1 > 0$; $a_2 > 0$; $a_3 > 0$).

При $n = 4$ характеристичне рівняння замкнутої системи

$$a_4 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_0 = 0,$$

а визначники Гурвіца —

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_4 \end{vmatrix} = a_4 \Delta_1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_2 a_1^2 - a_1(a_2 a_1 - a_1 a_1) - a_1^2 a_1 = a_1 \Delta_2 - a_1^3 a_1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_1 - a_1 a_1.$$

З цього виразу випливає, що $\Delta_1 > 0$ можливе лише за умови $\Delta_2 > 0$. Крім того, якщо $\Delta_1 > 0$ і $a_1 > 0$, то Δ_2 обов'язково буде більше нуля.

Отже, для системи четвертого порядку необхідною і достатньою умовою стійкості системи є $\Delta_1 > 0$.

Інакше кажучи, для системи з $n = 4$ достатньо визначити лише знак виразу Δ_1 . Якщо $\Delta_1 > 0$, то в цьому разі обов'язково виконуватимуться необхідні за критерієм Гурвіца умови $\Delta_2 > 0$ і $\Delta_4 > 0$.

Критерій Гурвіца здебільшого використовують для систем з $n \leq 4$. При $n > 4$ обчислення стають дуже громіздкими.

Критерій стійкості Айснера—Шіпара. Цей критерій розроблено в 1914 р. і розрахований для систем з відносно великим ступенем характеристичного рівняння ($n \geq 5$). Він ґрунтується на варіації критерію Гурвіца. Доведено, що за умови $a_n > 0$, $a_1 > 0$, ..., $a_n > 0$ при додатному значенні всіх виразників Гурвіца з індексами 3, 5, ... будуть додатними також усі виразники з індексами 2, 4, 6, ... Отже, при $\Delta_1 > 0$, $\Delta_3 > 0$, ... виразники Δ_2 , Δ_4 , Δ_6 , ... обов'язково будуть додатними. Тому при $n = 5$ необхідні виконання умов $\Delta_1 > 0$, $\Delta_3 > 0$, а при $n = 6$ — умов $\Delta_1 > 0$, $\Delta_3 > 0$.

Умовою знаходження системи на межі стійкості є рівність нулю відповідного виразника.

Загальна методика дослідження впливу параметрів системи на її стійкість за допомогою критеріїв Гурвіца та Айснера—Шіпара. Дослідження впливу довгого параметра T на стійкість системи можна проводити в такій послідовності.

1. Згідно з викладеним, відповідно до ступеня характеристичного рівняння прийняти умови:

при $n = 3$ $\Delta_1 > 0$; при $n = 4$ $\Delta_1 > 0$, при $n = 5$ $\Delta_1 > 0$, $\Delta_3 > 0$; при $n = 6$ $\Delta_1 > 0$, $\Delta_3 > 0$.

2. Встановити функціональну залежність відповідного взаємника або визначника (згідно з п. 1) і параметра T_c :

$$\Delta_c = f(T_c).$$

Наприклад, при $n = 5$ такі ж залежностями мають бути: $\Delta_1 = f(T_1)$ і $\Delta_2 = f(T_2)$.

3. З умов $\Delta_c = f(T_c)$ – 0 визначити критичні значення T_c (змінення T_c , за яких система переходить на межі стійкості), а також зоні, в яких T_c відповідає стійкому або нестійкому стану системи.

4. У зоні «стійких значень» T_c встановити необхідний запас стійкості за параметром T_c і виділити зону рекомендованих значень цього параметра.

Знайдені значення параметра T_c за умовами стійкості надалі треба узгоджувати з вимогами якості переданого процесу. Якщо параметр T_c входить до складу коефіцієнта a_n характеристичного рівняння і визначає статичну помилку системи, то вимоги стійкості й якості мають узгоджуватися з вимогами статичної точності.

Для ілюстрації викладеної методики розглянемо рис. 4.4. Деяку залежність $\Delta_c = f(T_c)$ що відповідає системі четвертого порядку, умовою стійкості якої є $\Delta_c > 0$, зображено на рис. 4.4, а. Критичні значення параметра T_{c1} і T_{c2} відповідають $\Delta_c = 0$, і рекомендоване значення параметра T_c має перебувати в межах $T_{c1} - T_{c2}$.

Випадок, що відповідає системі п'ятого порядку ($n = 5$), наведено на рис. 4.4, б. У цьому разі умовою стійкості є $\Delta_2 > 0$, $\Delta_1 > 0$. Тому аналіз виконується із врахуванням взаємного розміщення кривих $\Delta_1 = f(T_1)$ і $\Delta_2 = f(T_2)$. У цьому випадку параметр T_c має знаходитися в межах $T_{c2} - T_{c1}$, де T_{c1} і T_{c2} – критичні значення параметра T_c .

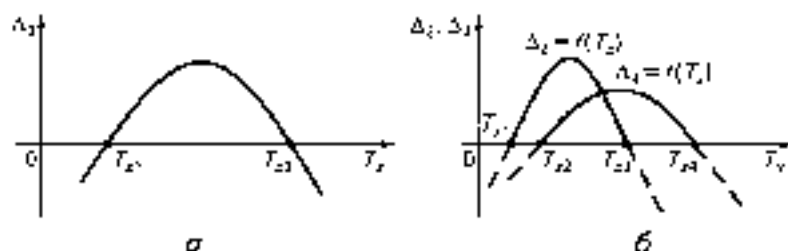


Рис. 4.4

Критерій Вишнєградського. Цей критерій розроблено в 1977 р. для систем автоматичного керування парових машин, які мали третій порядок рівнянь динаміки, чим обмежується область його використання. І. О. Вишнєградський звів характеристичне рівняння

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0,$$

яке має чотири коефіцієнти, до рівняння з двома коефіцієнтами X , Y , які дістали назву параметрів Вишнєградського. Для цього вихідне характеристичне рівняння спочатку було зведено до вигляду

$$p^3 + C_1 p^2 + C_2 p + C_3 = 0, \quad (4.15)$$

$$\text{де } C_1 = \frac{a_1}{a_3}; \quad C_2 = \frac{a_2}{a_3}; \quad C_3 = \frac{a_0}{a_3},$$

і для нього знайдено умови стійкості

$$C_1 C_2 - C_3 > 0 \quad (4.16)$$

Параметри X і Y було запропоновано у вигляді

$$X = \frac{C_1}{\sqrt[3]{C_3}}; \quad Y = \frac{C_2}{\sqrt[3]{C_3}}, \quad (4.17)$$

звідки знайдено

$$C_1 = X \sqrt[3]{C_3}; \quad C_2 = Y \sqrt[3]{C_3}.$$

Після підстановки значень C_1 і C_2 у вираз (4.16) дістанемо

$$X \sqrt[3]{C_3} Y \sqrt[3]{C_3} - C_3 > 0,$$

або

$$XY - 1 > 0,$$

або

$$XY > 1. \quad (4.18)$$

Останній вираз і є умовою стійкості (критерієм) Вишнєградського. Рівняння межі стійкості в площині параметрів X , Y має вигляд гіперболи (рис. 4.5):

$$XY = 1. \quad (4.19)$$

яку називають *гіперболою Вишнєградського*.

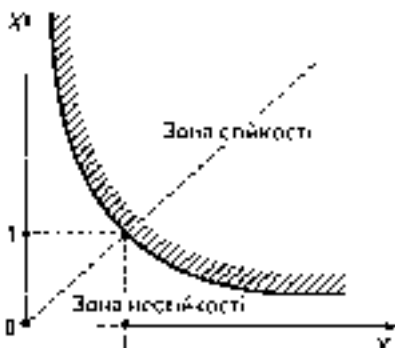


Рис. 4.5.

Праворуч від критерію міститься зона стійкості $XU > 1$, а ліворуч — зона нестійких режимів $XU < 1$.

На основі наведених формул можна встановити залежності між іншими параметрами, що входять до складу коефіцієнтів $\alpha_0, \dots, \alpha_7$, і, отже, в певному вигляді — рівняння (4.18), (4.19). При цьому залежності між іншими параметрами, як правило, відрізняються від гіперболічного закону.

Приклад дослідження стійкості конкретних систем за допомогою алгебричних критеріїв стійкості. Дослідження проведемо для конкретної системи стабілізації напруги генератора постійного струму, рівняння якої було знайдено в п. 3, а принципову і структурну схеми зображено на рис. 3.28 і 3.29.

Характеристичне рівняння системи стабілізації

$$T_1 T_2 p^3 + (I_1 + T_2) p^2 + p - k_p = 0, \quad (4.20)$$

де коефіцієнт передачі (поділення) розімкненої системи

$$k_p = k_1 k_{\omega} k_{\omega} k_k,$$

$k_1, k_{\omega}, k_{\omega}, k_k = 1/c_j$, k_k — коефіцієнти відповідно передачі генератора, електромагніту, демпфера, резистора; c_j — стала демпфера, яка залежить від характеристик масла і конфігурації поршня самого демпфера (наприклад, від числа отворів у ньому та їхніх розмірів); $T_1 = L_1/R_1$ — стала часу генератора постійного струму; L_1, R_1 — індуктивність і активний опір обмотки збудження генератора; $T_2 = m/c_d$ — стала часу масляного демпфера; m — приведена маса рухомих елементів системи якоря електромагніту, поршня демпфера, пружини, півзв'язки реостата.

Розглянемо методику дослідження основних питань стійкості за допомогою різних критеріїв стійкості для конкретних значень параметрів

- **Приклад 4.2.** Нехай $T_1 = 0,01$ с; $T_2 = 0,03$ с; $k_p = 360$. Треба дослідити стійкість системи

Розв'язання. За рівнянням (4.20) сформуємо лінійний визначник Гурвіца в загальному вигляді

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 - T_2 & k_p & 0 \\ T_1 T_2 & 1 & 0 \\ 0 & T_1 + T_2 & k_p \end{vmatrix}$$

Для системи третього порядку, крім додатного знака коефіцієнтів, як зазначалося раніше, унікально стійкості є $\Delta_2 > 0$. Тому в даному разі унікальну стійкість можна записати так:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} T_1 + T_2 & k_p \\ T_1 T_2 & 1 \end{vmatrix} = T_1 + T_2 - T_1 T_2 k_p > 0 \quad (4.21)$$

Підставляючи чисельні значення параметрів, маємо:

$$\Delta_2 = 0,01 + 0,01 - 0,01 \cdot 0,03 \cdot 300 = 0,04 - 0,09 = -0,05 < 0,$$

що вказує на нестійкість системи.

Аналізуючи умову стійкості $\Delta_2 > 0$, бачимо, що в теоретичному плані стійкість даної системи можна досягти за рахунок:

- зменшення сталих часу T_1 , T_2 або однієї з них (стві треба врахувати, що добуток цих параметрів зменшуватиметься більшою мірою, ніж їхня сума);
- зменшення коефіцієнта передачі розімкнутої системи шляхом зменшення будь-якого коефіцієнта (або коефіцієнтів) передачі, що входить до складу k_p як співмножника;
- одночасної зміни в потрібному напрямку сталих часу і коефіцієнтів передачі.

Виділяючи варіанти налаштування системи, насамперед слід враховувати ефективність і технічну зручність вибору і зміни регулюючого параметра системи. З принципової схеми САК і згайдених раніше рівнянь ланок швидко, що з технічної і теоретичної точок зору в даному разі найзручнішим буде зменшення коефіцієнта підсилення (передачі) розімкнутої системи і сталої часу демпфера за рахунок збільшення величини c_d . Так, зменшуючи кількість вічок (випливаючих і отворів у циліндрі поршня демпфера, можна збільшити величину c_d і зменшити сталу демпфера $T_2 = m/c_d$. У разі збільшення c_d в потрібному напрямку змінюватиметься (зменшуватиметься) також і коефіцієнт підсилення відповідної ланки $k_1 = 1/c_d$, а також величина коефіцієнта підсилення розімкнутої системи k_p .

Нехай параметр c_d збільшимо втричі. Знайдемо нові значення швидкоплинних параметрів системи

$$T_2' = \frac{m}{3c_d} = T_2/3 = 0,03/3 = 0,01 \text{ с},$$

$$k_p' = k_p/3 = 300/3 = 100; \quad T_1 = 0,01 \text{ с}.$$

При цьому

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= T_1 + T_2 - T_1 T_2 (k_r' = 0,01 + 0,01 - 0,01 \cdot 0,01 \cdot 100 = \\ &= 0,02 - 0,01 = 0,01 > 0.\end{aligned}$$

Система в даному разі є стійкою.

□ **Приклад 4.3.** Знайти критичне значення параметра k_r , якщо викладати $T_1 = T_2 = 0,01$ с – const.

Розв'язання. Критичне значення параметра можна дістати за умови, що система перебуває на межі стійкості $\Delta_2 = 0$.

При цьому

$$(k_r)_{cr} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = \frac{0,01 + 0,01}{0,01 \cdot 0,01} = 200.$$

При $k_r > 200$ система стає нестійкою.

Цей результат підтверджує сформульоване раніше положення про проміжність вимог динаміки та статички.

Дійсно, чим більше коефіцієнт підсилення наближатиметься до свого критичного значення, тим менший запас стійкості (z_{cr}) за даним параметром матиме система:

$$z_{cr} = (k_r)_{cr} - k_r.$$

Так, при $T_1 = T_2 = \text{const}$ і $k_r' = 100$ запас стійкості за параметром k_r становить

$$z_{cr} = 200 - 100 = 100.$$

Водночас статична помилка системи

$$\Delta = \frac{A_1}{1 + k_r}$$

збільшиться майже втричі.

Приклад аналізу стійкості за допомогою критерію Винаградського. Визначимо, виключаючи із умов знаходження системи на межі стійкості, критичне значення параметра k_r для САК напруги генератора, розглянутої раніше.

Для знаходження параметрів Винаградського визначимо коефіцієнти C_1 , C_2 , C_3 :

$$C_1 = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}; \quad C_2 = \frac{1}{T_1 T_2}; \quad C_3 = \frac{k_p}{T_1 T_2}.$$

Умова знаходження САК на межі стійкості така: $XY = 1$. Враховуючи, що $x = C_1 / \sqrt[3]{C_2}$, а $y = C_2 / \sqrt[3]{C_3^2}$, ця умова матиме вигляд

$$XY = \left(\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} / \sqrt[3]{\frac{k_p}{T_1 T_2}} \right) \left(\frac{1}{T_1 T_2} / \sqrt[3]{\left(\frac{k_p}{T_1 T_2} \right)^2} \right) = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2 k_p} = 1,$$

звідки

$$(k_p)_{cr} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2},$$

відповідає критичному значенню цього параметра, знайденому раніше за допомогою критерію Гурвіца.

4.5

Частотні критерії стійкості.

Критерій Михайлова

Критерій Михайлова, запропонований в 1928 р., є класичним зручним для аналізу лійнійних систем, особливо високого порядку ($n \geq 5$).

Оцінка стійкості системи за даним критерієм виконується на основі характеристики (годографа) Михайлова, яка будується таким чином.

1. У характеристичному рівнянні замкнутої системи

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

виконують підстановку $p = j\omega$, де $j = \sqrt{-1}$, після чого вираз годографа Михайлова дістають у вигляді

$$L(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n \quad (4.22)$$

2. У виразі $L(j\omega)$ виділяють дві частини — дійсну $A(\omega)$ і уявну $B(\omega)$. У цьому разі годограф Михайлова набуде вигляду

$$L(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega), \quad (4.23)$$

де

$$A(s) = a_n - a_{n-1}s + a_{n-2}s^2 - a_{n-3}s^3 + a_{n-4}s^4 - \dots$$

$$B(s) = a_{n-1}\omega - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-3}\omega^3 - \dots$$

3. Заданою значення ω в межах від 0 до $+\infty$, на комплексній площині в координатах $A(\omega)$, $B(\omega)$ будують голограф Михайлова. радіус-вектор $U(\omega)$ якого при зміні ω від 0 до $+\infty$ обертається проти годинникової стрілки (рис. 4.6).

Оцінка стійкості системи здійснюється за виглядом і розміщенням кривої $U(\omega)$ відносно квадрантів площини $A(\omega) - B(\omega)$.

Критерій стійкості Михайлова формулюється таким чином:

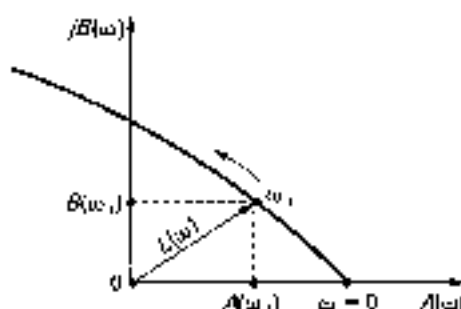


Рис. 4.6

для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб радіус-вектор голографа Михайлова при зміні частоти від 0 до $+\infty$, почавши обертання з точки, яка лежить на дійсній осі праворуч від нуля, обертаючись проти годинникової стрілки і не перетворюючись на нуль, пройшов послідовно n квадрантів комплексної площини, повернувшись на кут $\frac{\pi}{2}n$.

Приклади голографів Михайлова стійких і нестійких систем показано відповідно на рис. 4.7, а і б.

Характеристики на рис. 4.7, а відповідають системам з різними степенями n характеристичного рівняння. На рис. 4.7, б криві 1, 3 і 4 є характеристиками нестійких систем. Крива 2 — 2' відповідає нестійкій системі, оскільки не витримується принцип послідовності обходу квадрантів комплексної площини, а крива 2 — 2'' — стійкій системі при $n = 4$.

Умовою знаходження системи на межі стійкості є проходження голографа Михайлова через початок координат комплексної площини.

Знає стійкості системи може характеризувати відстань від точки перетину голографа Михайлова дійсної осі до початку координат у разі стійкої системи (відстань $O' - O$ на рис. 4.7, б).

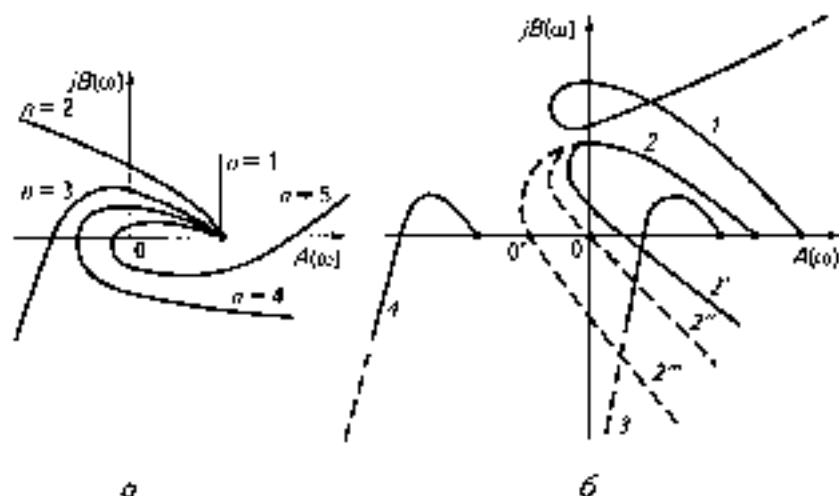


Рис. 4.7

Друге формулювання (наслідок) критерію Михайлова.

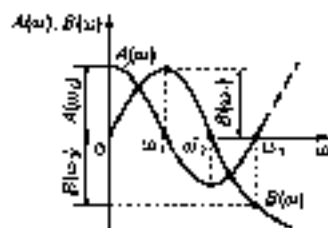
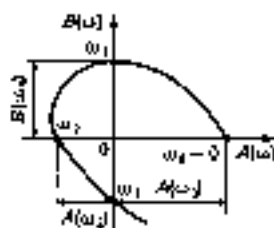
Перевага цього методу дослідження стійкості порівняно з основним формулюванням полягає в тому, що дає змогу визначити стійкість системи за взаємним розміщенням дійсної $A(\omega)$ і уявної $B(\omega)$ складових без побудови самого голографа Михайлова. Крім того, друге формулювання критерію Михайлова є зручним для знаходження запasu стійкості за деяким параметром.

Розглянемо особливості взаємного розміщення дійсної й уявної складових $A(\omega)$ і $B(\omega)$ для стійкої (рис. 4.8, а) і двох нестійких (рис. 4.8, б, в) систем.

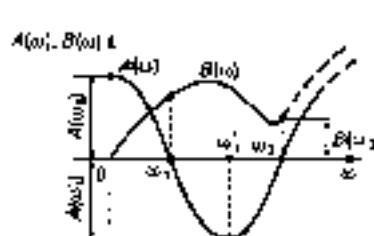
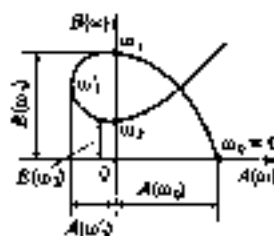
Характерною рисою стійких систем і їхня відмінність від нестійких є переміжний характер розміщення точок перетину осей ω дійсною $A(\omega)$ і уявною $B(\omega)$ складовими голографа Михайлова. Переміжний характер перетину характеристиками $A(\omega)$ і $B(\omega)$ осей ω на рис. 4.8, б, в відсутній.

Як зазначалося раніше, при знаходженні системи на межі стійкості голограф Михайлова проходить через початок координат. У цьому разі розміщення $A(\omega)$ і $B(\omega)$ відповідає кривим I' і I'' на рис. 4.3, з, які перетинаються в одній точці ω_2 на осі ω .

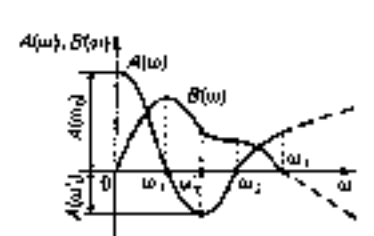
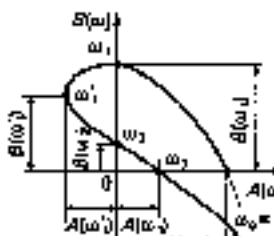
Якщо система стійка, то вигляд голографа Михайлова відповідає кривим 2 і кривим I' та I'' на рис. 4.3, з. У цьому разі запас стійкості характеризує відстані між точками ω_2 і ω_3 на осі ω .



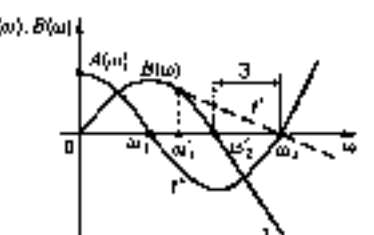
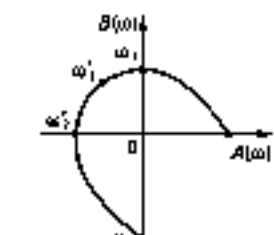
а



б



в



г

Рис. 4.8

Критичне значення певного параметра системи можна знайти з умови перетину характеристик $A(j\omega)$ і $B(j\omega)$ в одній точці на осі ω .

Частоту, за якої характеристики $A(j\omega)$ і $B(j\omega)$ перетинаються на осі ω , називають *критичною частотою*.

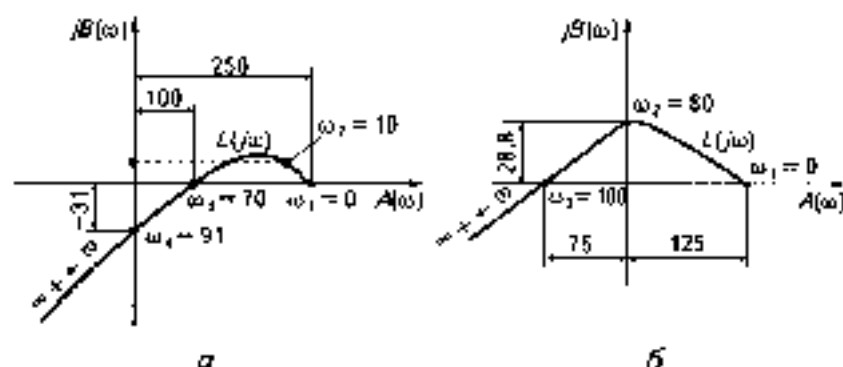


Рис. 4.9

Згідно з наведеним вислідок критерію Михайлова можна сформулювати таким чином:

для стійкості замкнутої системи корені поліномів дійсної $A(s)$ і уявної $B(s)$ частотних складових подографу Михайлова мають бути дійсними (мати точку перетину з віссю ω) і переможними.

Приклад аналізу стійкості за допомогою критерію Михайлова. Визначимо стійкість розглянутої раніше САР стабілізації напруги генератора постійного струму

Нехай значення параметрів системи такі: $T = 0.01$ с; $T_g = 0.02$ с; $k_p = 250$. Використаємо основне формулювання критерію Михайлова

Після підстановки $p = j\omega$ в характеристичне рівняння

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + k_p = 0, \quad (4.24)$$

дістанемо вираз подографу Михайлова для даної системи:

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= T_1 T_2 (j\omega)^3 + (T_1 + T_2) (j\omega)^2 + j\omega + k_p = \\ &= A(j\omega) + jB(j\omega). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ділення і уявна складові після підстановки числових значень параметрів матимуть вигляд

$$A(\omega) = 250 - (0,01 + 0,02)\omega^2 = 250 - 0,03\omega^2;$$

$$B(\omega) = \omega - 0,01 \cdot 0,02 \cdot \omega^3 = \omega(1 - 0,0002\omega^2).$$

Для скорочення розрахунків під час побудови характеристики $M(j\omega)$ потрібно знайти точки перетину голографом Михайлова осей координат.

Координату точки перетину дійсної осі характеристикою $M(j\omega)$ знайдемо з умови $B(\omega) = 0$.

Обчислимо частоти відповідних точок:

$$B(\omega) = \omega(1 - 0,0002\omega^2) = 0;$$

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2, \omega_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{0,0002}} = \pm \sqrt{5000} \approx \pm 70.$$

Розглядаємо лише частоти $\omega \geq 0$. При $\omega_1 = 0$ $A(0) = 250$, при $\omega_2 = +70$ $A(70) = 250 - 0,03 \cdot 70^2 \approx 100$.

Знайдемо координати точок перетину голографу Михайлова з вертикальною віссю з умови $A(\omega) = 0$. При цьому

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{250}{0,03}} = \pm 91.$$

Для розрахунків беремо $\omega_2 = +91$.

Ордината точки перетину $M(\omega)$ з вертикальною віссю

$$B(\omega_2) = 91(1 - 0,0002 \cdot 91^2) = 91(1 - 1,66) = -31$$

Результати розрахунків наведено в табл. 4.1.

Голограф Михайлова, побудований за шми ланими, відповідає нестійкій системі (рис. 4.9, а).

Аналітичні дослідження виконаємо для значень параметрів

$$T_1 = T_2 = 0,01 \text{ с}; \quad k_p = 125$$

Зробимо розрахунки:

$$A(\omega) = 125 - (0,01 + 0,01)\omega^2 = 125 - 0,02\omega^2;$$

$$B(\omega) = \omega(1 - 0,01 \cdot 0,01\omega^2) = \omega(1 - 0,0001 \cdot \omega^2).$$

Результати обчислень наведено в табл. 4.2.

Таблиця 4.1

Частота	Складові частоти Митлайтца	
ω	$A(\omega)$	$B(\omega)$
0	250	0
10	243	9,8
70	100	0
91	0	31
∞	$-\infty$	$-\infty$

Характеристика, що відповідає стійкій системі, показана на рис. 4.9, б.

Виконаємо дослідження стійкості, використовуючи наслідок критерія Митлайтца.

Нехай значення параметрів такі: $T = 0,01$ с; $T_d = 0,02$ с; $k_r = 250$.

Побудовані за даними табл. 4.1 характеристики $A(\omega)$, $B(\omega)$ показані на рис. 4.11, а. Корені виразів $A(\omega)$, $B(\omega)$ дійсними, але принцип перемежування коренів не виконується, що відповідає нестійкій системі.

Характеристики, знайдені при значеннях параметрів $T_r = 0,01$ с; $T_d = 0,01$ с; $k_r = 125$ і побудовані згідно з даними табл. 4.2, які відповідають стійкій системі, показано на рис. 4.10, б.

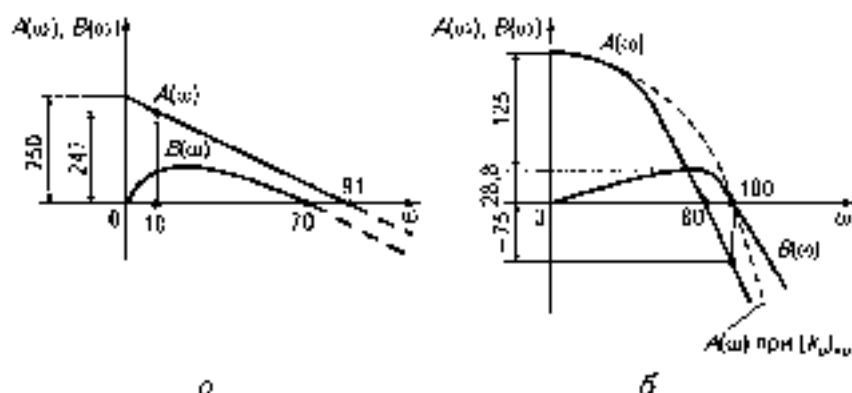


Рис. 4.10

Знайдемо критичні значення коефіцієнта підсилення розімкнутої системи $(k_p)_{кр}$ і запас стійкості при значеннях параметрів $T_1 = T_2 = 0,01$ с.

Враховуємо випадок частотних характеристик, збіглих у склавну колографа Михайлова

$$A(\omega) = k_p - (T_1 + T_2)\omega^2.$$

Параметр k_p виходить до виразу $A(\omega)$. Тому його критичне значення можна визначити з умови $A(\omega_{кр}) = 0$ з урахуванням числових значень сталих часу дістаємо

$$(k_p)_{кр} - 0,02 \cdot \omega_{кр}^2 = 0.$$

Критичне значення частоти знайдемо з умови $B(\omega_{кр}) = 0$, лішки $1 - T_1 T_2 \omega_{кр}^2 = 0$ або

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{1}{0,01 \cdot 0,01}} = 100.$$

Для розрахунків беремо $\omega_{кр} = +100$.

Таблиця 4.2

Частота	Складові колографа Михайлова	
ω	$A(\omega)$	$B(\omega)$
0	125	0
80	0	28,8
100	-75	0
∞	$-\infty$	$-\infty$

При даному значенні частоти обидві складові $A(\omega)$ і $B(\omega)$ перетинатимуться в одній точці на осі ω (рис. 4.10, б, штрихова лінія), тому

$$(k_p)_{кр} = 0,02 \cdot 100^2 = 200.$$

При $k_p = 125$, яке було прийняте у зроблених раніше розрахунках і відповідало стійкому стану системи, знайдемо запас стійкості системи

$$\mathfrak{D}_{ст} = (k_p)_{ст} - k_p = 200 - 125 = 75.$$

4.6

**Дослідження стійкості за допомогою побудови
зон стійкості (метод D-розбиття)**

При розробці САР важливо встановити вплив окремих параметрів (або параметра) на стійкість системи за фіксованих значень інших параметрів. При цьому необхідно встановити зони параметрів, у яких їхня зміна не призводить до нестійкої роботи системи.

Дане завдання можна вирішити за допомогою розглянутих вище критеріїв стійкості, але зі зростанням порядку системи рівнянь розрахунки різко ускладнюються.

Ю.Д. Соколов і Ю.І. Неймарк запропонували метод, який дає змогу знайти зазначену вище зону в площині одного або двох параметрів. Основу методу становить дослідження полінома $D(p)$, який відображує характеристичне рівняння замкнутої системи, зведене до вигляду, коли коефіцієнт a_n у характеристичному рівнянні дорівнює одиниці:

$$D(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \dots + a_{n-1}p + a_n = 0. \quad (4.26)$$

Можна уявити деяке n -мірне середовище, по координатних осях якого розміщуються коефіцієнти характеристичного рівняння (або параметрів ланок системи). У цьому разі середовище називають *середовищем коефіцієнтів* (параметрів). Кожній точці такого середовища відповідає певне значення всіх n коефіцієнтів (параметрів), які визначають n коренів характеристичного рівняння.

При деякому значенні коефіцієнтів система може бути на межі стійкості (якщо корені нульові або чистого уявного). Тому відповідна точка в просторі параметрів у цьому разі має задовольняти рівняння

$$D(j\omega) = (j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n = 0.$$

Якщо змінювати параметри системи, то корені змішуватимуться і переміщуватимуться по комплексній площині: коренів і за деяких значень параметрів (коефіцієнтів характеристичного рівняння) можуть переміститися з лівої частини площини коренів у праву, що призведе до нестійкої роботи системи, або, навпаки, переміститися з правої напівплощини коренів у ліву, в результаті чого нестійка система стане стійкою.

Отже, переміщення коренів зумовлено рухом відповідних точок в n -вимірному просторі параметрів (коефіцієнтів).

Для практичних цілей важливо встановити зони значень параметрів, які відповідають положенню коренів на межі стійкості, і зони значень параметрів, що відповідають стійким системам. Поділ простору коефіцієнтів (параметрів) на відповідні зони і є основною метою методу D-розбиття.

Так, нехай параметри, які нас цікавлять, входять до складу деяких коефіцієнтів рівняння. Якщо змінювати один з параметрів T , то змінюватимуться всі коефіцієнти, які є функціями цього параметра. Поді кожньому новому значенню T , відповідатиме n нових коренів полінома $D(p) = 0$, положення яких у комплексній площині коренів залежить від числових значень параметра T , і, як результат, значень відповідних коефіцієнтів.

D-розбиття за одним параметром. Розглянемо методку побудови зони стійкості в площині комплексного параметра T_x .

1. Вихідне характеристичне рівняння $D(p) = 0$ представимо у вигляді $X(p) + T_y Y(p) = 0$.

2. Знаходимо величину досліджуваного параметра $T_y = -\frac{X(p)}{Y(p)}$.

3. Знаходимо комплексний вираз параметра T_x , використовуючи підстановку $p = j\omega$, і виділяємо його дійсну $A(\omega)$ і уявну $B(\omega)$ складові:

$$T_x = A(\omega) + jB(\omega),$$

T_x становить деяку криву в комплексній площині, яка відповідає уявним корням характеристичного рівняння і є сукупністю параметрів T_x , за яких система перебуває на межі стійкості. Така характеристика називається *межею стійкості в площині параметра D*, або *кривою D-розбиття*.

4. В комплексній площині параметра D за правилом штриховки Неймарка знаходимо зону стійкості.

Правило штриховки формулюють так: якщо рухатися по межі D-розбиття від значень $\omega = -\infty$ до значень $\omega = +\infty$, то зони стійкості розгортаватимуться зліва від межі стійкості. Це аналогічно тому, що в разі руху в комплексній площині коренів характеристичного рівняння вздовж вертикальної (уявної) осі, яка є межею стійкості в площині коренів, від $-\infty$ до $+\infty$, зона стійкості знаходитиметься зліва від вертикальної осі.

5. Заданою запас стійкості в зоні, обмежений кривою D -розбиття, відліки на дійсній (горизонтальній) осі (бо параметр T_r є дійсною, фізично реальною величиною) необхідний робочий діапазон значень параметра T_r , який може бути рекомендовано при проектуванні і настроюванні відповідної системи.

- **Приклад 4.4.** Дослідити стійкість САР генератора постійного струму з характеристичним рівнянням

$$T_r T_a p' + (T_r + T_a) p^2 + p + k = 0$$

чи методом D -розбиття відносно коефіцієнта підсилення розімкнutoї системи при $T_a = T_r = 0,01$ с.

Розв'язання. Для розв'язання поставленої задачі побудуємо межу стійкості в комплексній площині параметра k .

Із характеристичного рівняння знаходимо

$$k = -(T_r T_a p' + (T_r + T_a) p^2 + p).$$

Виключивши підстановку $p = j\omega$, дістаємо

$$k = -(T_r T_a j\omega^2 - (T_r + T_a)\omega^2 + j\omega) = A(\omega) + jB(\omega),$$

де

$$A(\omega) = (T_r + T_a)\omega^2 = 0,02\omega^2;$$

$$B(\omega) = T_r T_a \omega^2 - \omega = 0,0001\omega^2 - \omega.$$

Заданою значеннями ω від $+\infty$ до $-\infty$, побудуємо криву D -розбиття. Практично для цього слід зняти характерні точки, які виконівають перехідом кривою D -розбиття через дійсну й уявну осі комплексної площини.

З формули для $A(\omega)$ видно, що $A(\omega)$ може дорівнювати нулю лише при $\omega = 0$. Інших точок перетину кривої D -розбиття з вертикальною віссю немає. Із виразу $B(\omega)$ можна знайти значення ω , при якому $B(\omega) = 0$, що відповідає переходу кривої D -розбиття через горизонтальну вісь. Відповідні значення ω знайдемо із виразу $B(\omega) = \omega(0,0001 \cdot \omega - 1) = 0$, звідки

$$\omega_1 = 0, \omega_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{1}{0,0001}} = \pm 100;$$

$$A(\omega_{2,3}) = 0,02 \cdot 100^2 = 200.$$

Знайдемо також відповідні точки при $0 < \omega < 100$ і $|\omega| > 100$. Результати розрахунків для $A(\omega)$ і $B(\omega)$ наведено в табл. 4.2.

4.6. Дослідження стійкості за допомогою побудови
там стійкості (метод D-розбиття);

Таблиця 4.3

Частот.	Складов. параметри k	
	$A(\omega)$	$B(\omega)$
0	0	0
100	200	0
-100	200	0
10	2	-9,9
-10	2	9,9
120	288	52,8
-120	288	-52,8
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Характеристику D-розбиття, побудовану за даними табл. 4.3, показано на рис. 4.11.

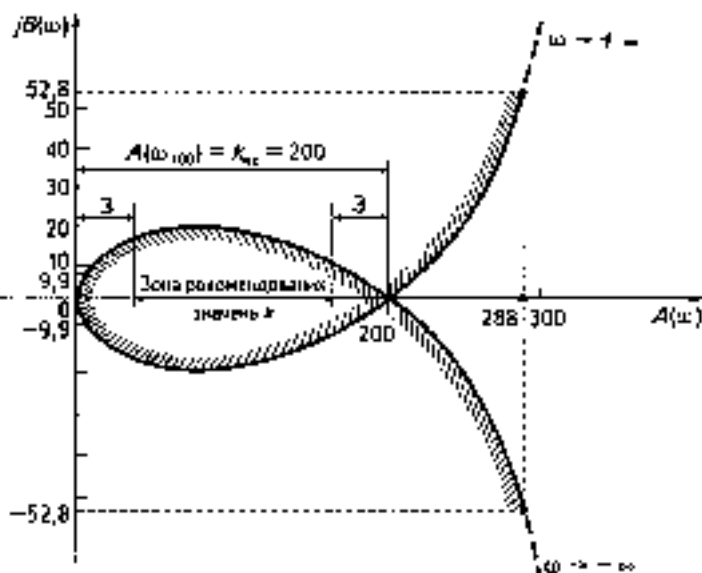


Рис. 4.11

Визначення за правилом штрихування зони стійкості знаходиться зліва від кривої D -розбиття. Виконавши розрахунки, дають змогу встановити критичні значення параметра: $k_{cr} = 240$. З урахуванням деякого запасу стійкості Z можна поділити зону рекомендованих значень коефіцієнта підсилення розімкнутої системи.

Значення k вибирають з точок, які лежать на дійсній осі $A(\omega)$, тому що усі інші точки відповідають комплексним величинам, а коефіцієнт k є реальною (дійсною) фізичною величиною.

Побудова межі стійкості в площині двох параметрів (D -розбиття за двома параметрами). У цьому видашку розв'язується задача аналізу впливу на стійкість системи деяких двох параметрів T_1 і T_2 . Вважатимемо, що ці параметри входять у характеристичне рівняння лінійно (відсутній добуток $T_1 T_2$). Особливістю методу розбиття за двома параметрами є те, що простір двох параметрів — це дійсна площина T_1, T_2 .

Вважатимемо, що характеристичне рівняння за необхідності допущення впливу параметрів T_1 і T_2 у загальному випадку матиме вигляд

$$D(p, T_1, T_2) = 0. \quad (4.27)$$

Підставляючи $p = j\omega$ і виділяючи дійсну й уявну частини, дістанемо

$$D(j\omega, T_1, T_2) = A(\omega) + jB(\omega) = 0.$$

У цьому виразі $A(\omega)$ і $B(\omega)$ залежать не тільки від ω , а й від параметрів T_1 і T_2 . Для лінійних залежностей маємо

$$\begin{aligned} A(\omega) &= T_1 P_1(\omega) + T_2 Q_1(\omega) + R_1(\omega), \\ B(\omega) &= T_1 P_2(\omega) + T_2 Q_2(\omega) + R_2(\omega). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Для деякого значення $\omega = \omega_0$ із рівняння (4.28) можна знайти значення T_{10} і T_{20} , за яких $A(\omega) = 0$ і $B(\omega) = 0$.

При цьому $j\omega_0$ буде коренем рівняння $D(p) = 0$.

У цьому разі деяка точка $M(T_{10}, T_{20})$ у площині $T_1 - T_2$ лежить на межі, яка поділяє площину $T_1 - T_2$ на зону стійкості та нестійкості за параметрами T_1, T_2 . Як відомо, зони стійкості відбиваються «лівої» корені в площині коренів характеристичного рівняння $D(p) = 0$, а зони нестійкості — «праві».

Розв'яжемо систему рівнянь (4.28) відносно T_1 і T_2 . Застосуємо тоді певний детермінант системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1(\omega) Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) Q_2(\omega) \end{vmatrix} = P_1(\omega) Q_2(\omega) - P_2(\omega) Q_1(\omega)$$

і часткові детермінанти Δ_x і Δ_y :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -R_1(\omega) Q_1(\omega) \\ -R_2(\omega) Q_2(\omega) \end{vmatrix} = R_2(\omega) Q_1(\omega) - R_1(\omega) Q_2(\omega);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & R_1(\omega) \\ P_2(\omega) & R_2(\omega) \end{vmatrix} = P_2(\omega) R_1(\omega) - P_1(\omega) R_2(\omega).$$

звідки $T_x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $T_y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$. Величини $P_1(\omega)$, $Q_2(\omega)$, $R_2(\omega)$ входять до уявної складової $B(\omega)$ і є непарними функціями ω . Детермінанти Δ , Δ_x , Δ_y також непарні функції ω , тоді як величини T_x і T_y будуть парними функціями ω .

Заданої значення ω в межах від $-\infty$ до $+\infty$ будемо в площині $T_x - T_y$ малювати криву, яка є межею *D*-розбиття в площині параметрів $T_x - T_y$ (рис. 4.12, а). При побудові кривої *D*-розбиття і дослідженні стійкості за даним методом можливі три основні випадки.

1. Для частоти ω_k всі три детермінанти Δ , Δ_x , Δ_y не дорівнюють нулю. При цьому вирази T_x і T_y в площині параметрів $T_x - T_y$ є прямими, що перетинаються (рис. 4.12, б).

2. Якщо при $\omega = \omega_k$: $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y \neq 0$, то вирази $T_x = f\left(\frac{\Delta_y}{\Delta}\right)$ і

$T_y = f\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}\right)$ не мають спільних розв'язків і відповідно спільних точок перетину в площині $T_x - T_y$. В цьому разі вони є паралельними прямими (рис. 4.12, в).

3. При $\omega = \omega_k$ всі три детермінанти Δ , Δ_x , Δ_y дорівнюють нулю, що відповідає невизначеності функцій T_x і T_y . При цьому одне із рівнянь системи (4.28) випадає з іншого, відрізняючись від нього на деякий сталій співмножник. Прямі в площині $T_x - T_y$ зливаються одна з одною (рис. 4.12, г) і при $\omega = \omega_k$ є деякою особливою прямою, рівняння якої

$$T_x P_1(\omega_k) + T_y Q_1(\omega_k) - R_1(\omega_k) = 0.$$

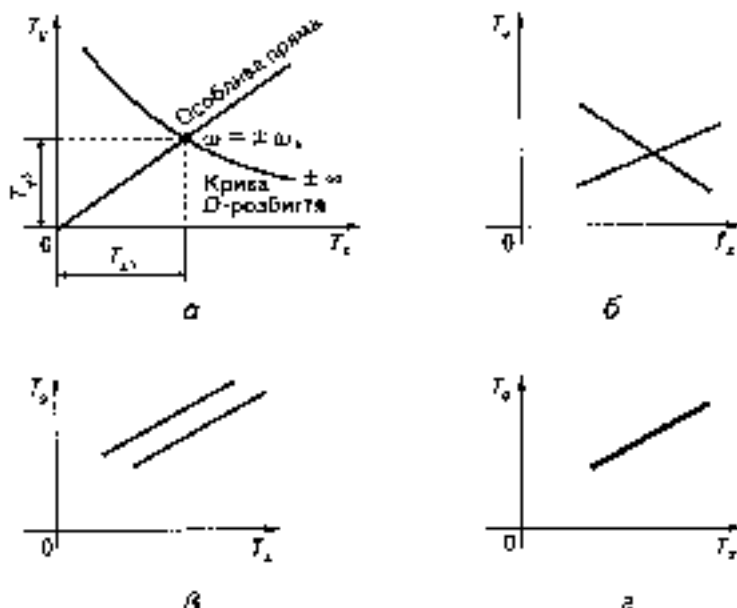


Рис. 4.12

Такі прямі даються при $\omega = 0$ і $\omega = \infty$. При цьому хоча б один із параметрів T_c і T_v має виходити до складу коефіцієнта a_n при найбільшому степені похідної або до складу вільного члена рівняння a_0 . Особливу пряму можна дістати при $\omega = 0$, прирівнюючи нулю коефіцієнт a_n , або при $\omega = \infty$, прирівнюючи нулю коефіцієнт a_0 .

Якщо коефіцієнти a_n і a_0 не залежать від T_c і T_v , то особливих прямих не буде. Особливих прямих може бути декілька, і всі їх треба знайти.

Отже, для знаходження особливих прямих потрібно

- прирівняти нулю коефіцієнти a_n і a_0 характеристичного рівняння, якщо вони залежать від параметрів T_c і T_v ;
- визначити значення ω , за яких однією з дорівнює нулю одна з детермінант Δ і Δ_n , або Δ і Δ_v , і знайдені значення ω підставити в рівняння (4.2б).

Якщо після даної підстановки дістанемо вираз, що дорівнює нулю, то цей виразок можна не розглядати, бо особлива пряма проходить у нескінченності.

Для виділення зон стійкості наведемо без доведення такі правила штрихування.

1. Якщо переміщуватись по кривій D -розбиття від точок $\omega = -\infty$ до точок $\omega = +\infty$ при $\Delta > 0$, то штрихунку слід робити зліва від кривої, а при $\Delta < 0$ — справа. (Знак Δ змінюється при переході через особливу пряму в нескінченності, а також через нуль).

2. Крива D -розбиття при зміні ω від $-\infty$ до $+\infty$ штрихується двічі: один раз при зміні ω від $-\infty$ до 0 , а другий — від 0 до $+\infty$. Оскільки в обох випадках крива штрихується зліва по ходу зміни ω , то вона має певний напрям штрихування з одного боку — одну при прямому ході, а іншу — при оберненому, бо при переході ω через нуль дельта змінює свій знак.

3. Штрихування особливих прямих здійснюється за такими правилами:

якщо особлива пряма і крива D -розбиття зближуються асимптотично, то штрихування особливої прямої одностороннє і спрямоване до заштрихованого боку кривої D -розбиття (рис. 4.13, а);

якщо особлива пряма має спільну точку з кривою D -розбиття, але не перетинає її, то штрихування особливої прямої одностороннє і спрямоване до заштрихованого боку кривої D -розбиття; в точках перетину з кривою D -розбиття штрихування особливої прямої не змінюється, бо не змінюється знак виразника Δ у цих точках (рис. 4.13, б);

якщо особлива пряма відноситься до випадку $\Delta(\omega_0) = \Delta_0(\omega_0) = \Delta_0'(\omega_0) = 0$ в точці перетину її з кривою D -розбиття виразник Δ змінює знак, то штрихування особливої прямої подвійне і спрямоване до заштрихованого боку кривої D -розбиття (рис. 4.13, в). якщо особлива пряма перетинає криву D -розбиття, але знак виразника Δ в точці перетину не змінюється, то особлива пряма не штрихується і на розподіл коренів не впливає (рис. 4.13, г).

Кожна з особливих прямих штрихується незалежно від наявності точок її перетину з іншими особливими прямими.

За напрямом штрихування кривої D -розбиття і особливих прямих встановлюється область можливої стійкості системи. Для перевірки цього вибирають довільні значення $T_1^*, T_2^*, T_3^*, T_4^*$ та підставляють їх у характеристичне рівняння замкнутої системи. Далі одним із відомих методів аналізують стійкість системи (визначають знаки коренів). Якщо один із коренів буде додатним, то САР є нестійкою і при-

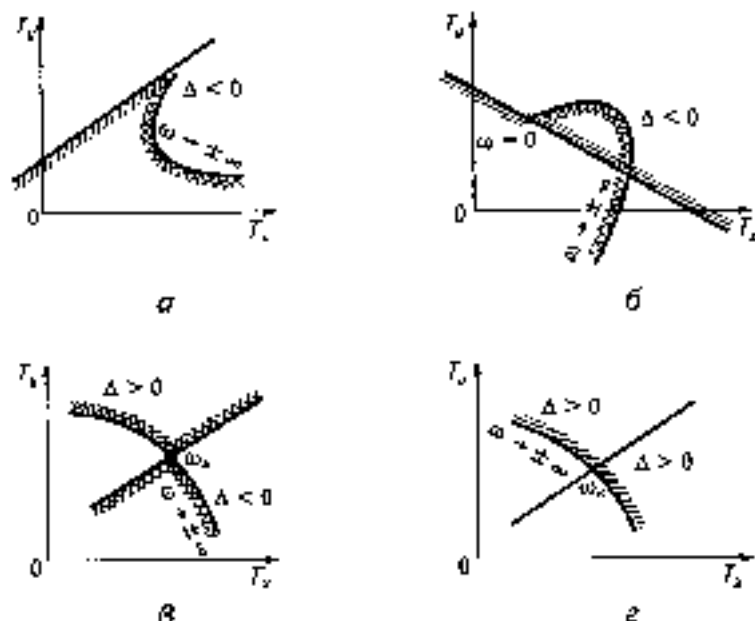


Рис. 4.13

вести її до стану стійкості зміною параметрів T_1 і T_2 неможливо. Якщо всі корені від'ємні, то дана зона дієсно є зоною стійкості.

Розглянемо чисельний приклад аналізу стійкості системи заданим методом.

□ Приклад 4.5. Нехай характеристичне рівняння замкнутої системи автоматичного керування має вигляд

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + \delta)T_1 p + 1 = 0 \quad (4.29)$$

Треба дослідити стійкість САР методом D -розбиття в площині параметрів T_2 і δ , якщо числові значення параметрів такі: $T_1 = 1,5$ с, $T_1 = 8,0$ с.

Розв'язання. Підставляючи чисельні значення параметрів, після перетворень дістанемо

$$12T_2 p^2 + p(12T_2 + 8\delta p + 1) = 0.$$

Після підстановки $p = j\omega$ маємо

$$D(\lambda, \mu, T_2, \delta) = A(\mu) + jB(\omega).$$

де

$$A(\mu) = -\omega^2(8T_2 + 12\delta) + 1 = P_1(\omega)T_2 + Q_1(\omega)\delta + R_1(\omega) = 0;$$

$$B(\omega) = -12T_2\omega^2 + 8\omega\delta = P_2(\omega)T_2 + Q_2(\omega)\delta + R_2(\omega) = 0;$$

$$P_1(\omega) = -8\omega^2, Q_1(\omega) = -12\omega^2, R_1(\omega) = 1;$$

$$P_2(\omega) = -12\omega^2, Q_2(\omega) = 8\omega, R_2(\omega) = 0.$$

Складаємо вирази детермінанти:

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8\omega^2 & -12\omega^2 \\ -12\omega^2 & 8\omega \end{vmatrix} = (4\omega^3 - 144\omega^3) = -16\omega^3(4 + 9\omega^2).$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -R_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ -R_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -12\omega^2 \\ 0 & 8\omega \end{vmatrix} = -8\omega;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & -R_1(\omega) \\ P_2(\omega) & -R_2(\omega) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8\omega^2 & -1 \\ -12\omega^2 & 0 \end{vmatrix} = -12\omega^3.$$

Знаємо вирази T_2 і δ :

$$T_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8\omega}{-16\omega^3(4 + 9\omega^2)}, \delta = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3}{4(4 + 9\omega^2)}.$$

Згідно з, необхідно надати значення T_2 і δ (див. табл. 4.4).

Таблиця 4.4

ω	T_2	δ	ω	T_2	δ
0	∞	0,19	-0,6	4,19	0,1
$\pm \infty$	0	0	-0,4	6,57	0,14
± 1	0,04	0,05	-0,3	1,16	0,16

За даними табл. 4.4 на рис. 4.14 побудовано криву D робіт. Оскільки у виразі T_2 і δ частота входить у квадраті, то крива матиме один і той самий вигляд при значеннях $\omega > 0$ та $\omega < 0$ згідно з правилами підтримки має бути дзеркальним дном.

Знаємо особливий пункт у таких умов

1. Вільний член характеристичного рівняння дорівнює нулю. Оскільки T_2 і δ не входять у вільний член характеристичного рівняння, то який вигляд можемо побудувати.

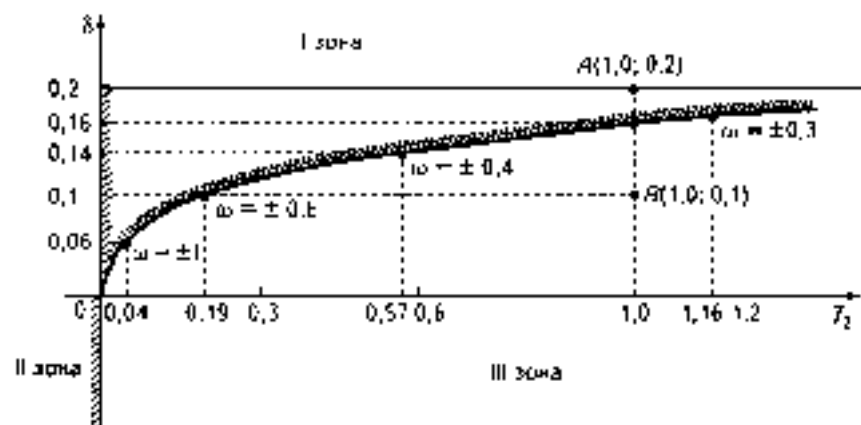


Рис. 4.14

2. Коефіцієнт при вищому члені характеристичного рівняння дорівнює нулю. Згідно з цим $1/T_2 = 0$. На площині $T_2 - \delta$ це можливо лише для вертикальної осі, яка в даному разі і буде особливою прямою.

3. Показники дорівнюють нулю $\delta_1, \delta_2, \delta_3$.

З виразів для визначників $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ випливає, що це можливо при $\omega = 0$. Підставляючи $\omega = 0$ в характеристичне рівняння, вистаємо $1 = 0$, тому даний випадок, як і перший, до уваги не береться.

Отже, у даному разі маємо особливу пряму, яка є вертикальною віссю.

Використовуючи правило штриховки особливих прямих і беручи до уваги зміну знака Δ при переході через $\omega = \infty$, зробимо штриховку вертикальної осі, яка в її лівій частині буде спрямована в бік I квадранта площини $T_2 - \delta$. При цьому співзвуч з кривою D -розбиття може бути висілена зона I. На рис. 4.14 показано також дві інші зони — II і III.

Оскільки в даному випадку характеристичне рівняння третього порядку, то для стійкості системи, тобто для встановлення областей стійкості в площині параметрів $T_2 - \delta$, треба мати три від'ємних корені в цій зоні.

Переверимо кожну із зон на наявність від'ємних коренів (або комплексних коренів із від'ємною дійсною частиною).

Зонаю, яка може претендувати на стійкість і в бік якої направлена штриховка кривої D -розбиття і особливої прямої, є зона I. Для пере-

при виконанні умов стійкості візьмемо точку A в даній точці, яка має координати $T_2 = 1, \delta = 0,2$.

Підставивши ці значення параметрів у характеристичне рівняння, дістанемо

$$12 \cdot 1 p^3 + (8 \cdot 1 + 12 \cdot 0,2) p^2 + 8 \cdot 0,2 p + 1 = 0$$

або

$$12 p^3 + 10,4 p^2 + 1,6 p + 1 = 0.$$

Використаємо для аналізу критерій Гурвица. Залишимо необхідну і достатню умову в загальному вигляді:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_1^2 a_0 > 0,$$

або

$$\Delta_2 = 10,4 \cdot 1,6 - 12 \cdot 1 = 16,64 - 12 = 4,64 > 0$$

при

$$a_3 = 12; a_1 = 10,4; a_2 = 1,6; a_0 = 1.$$

Звідси можна визначити, що при δ , які лежать вище прямої $\delta = 0,19$, система буде стійкою за будь-яких значень T_2 .

У зоні III значення δ мають відповідати точкам, які лежать нижче кривої D -розбиття. Розглянемо точку B з координатами $T_2 = 1, \delta = 0,1$. У цьому разі $\Delta_2 = 9,2 \cdot 0,8 - 12 \cdot 1 = -4,64 < 0$, що свідчить про нестійкість зони III.

У зоні II параметри T_2 і δ мають протилежний знак, що суперечить фізичному значенню цих величин. Виходячи з чисто математичного розуміння питання, можна зробити висновок, що при $T_2 < 0$, $\delta_2 < 0$ коефіцієнти характеристичного рівняння матимуть різні знаки ($a_3 < 0$, $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, $a_0 = 1 > 0$), що суперечить першій умові стійкості за Гурвіцем. Тому зона II до уваги не братиметься.

4.7

Критерій стійкості Найквіста

У 1932 р. американський вчений Найквіст розробив критерій стійкості для дослідження електронних вислалювців зі зворотним зв'язком. Пізніше цей критерій було поширено й на інші системи зі зворотними зв'язками.

Особливістю критерію Найквіста є те, що він дає змогу:

- оцінювати динамічні властивості замкнутих систем за частотними характеристиками відповідних розімкнутих систем;
- досліджувати динамічні властивості замкнутої системи за відсутності рівнянь динаміки системи або її окремих елементів.

У цьому разі достатньо мати експериментальні частотні характеристики системи або відповідних ланок, які можуть бути визначені на реальних елементах системи або на їхніх моделях.

За відсутності математичного описання ланок (або її системи в цілому) цей критерій є нестатинним для дослідження динамічних процесів у системах регулювання. Водночас він досить складений за розглянуті раніше.

Розглянемо суть критерію Найквіста.

Нехай є деяка розімкнута система із n ланок. Її передаточна функція

$$W(p) = \frac{x_{\text{вих}}}{x_{\text{вх}}} = \frac{Q(p)}{P(p)} = \frac{Q_1(p)Q_2(p) \dots Q_n(p)}{P_1(p)P_2(p) \dots P_n(p)} = \frac{b_0 p^l + b_1 p^{l-1} + \dots + b_n}{d_0 p^k + d_1 p^{k-1} + \dots + d_n}, \quad (4.30)$$

де $P_1(p), \dots, P_n(p)$, $Q_1(p), \dots, Q_n(p)$ — відповідно оператори лівих і правих частин рівнянь динаміки ланок, $x_{\text{вих}}$ — вихідна величина останньої (n -ї) ланки; $x_{\text{вх}}$ — вхідна величина першої ланки; $b_0, \dots, b_n$, $d_0, \dots, d_n$ — коефіцієнти операторів, які визначаються параметрами ланок.

Якщо замкнути розімкнуту систему за допомогою основного від'ємного зворотного зв'язку, то

$$x_{\text{вих}} = -x_{\text{вх}}.$$

При цьому

$$W(p) = \frac{x_{\text{вих}}}{x_{\text{вх}}} = -1, \quad (4.31)$$

звідки

$$W(p) + 1 = 0.$$

Даний вираз є характеристичним рівнянням замкнутої системи, записаним через передаточну функцію розімкнутої системи $W(p)$. Це можна довести такими перетвореннями:

$$W(p) + 1 = \frac{Q(p)}{P(p)} - 1 = \frac{Q(p) + P(p)}{P(p)} = 0$$

збл

$$Q(p) + P(p) = 0$$

Використавши вираз (4.30), запишемо

$$\frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{d_n p^n + d_{n-1} p^{n-1} + \dots + d_1 p + d_0} + 1 = \frac{Q(p)}{P(p)} + 1 = 0,$$

звідки

$$\frac{b_n p^n + \dots + b_1 p + b_0 + d_n p^n + \dots + d_1 p + d_0}{d_n p^n + d_{n-1} p^{n-1} + \dots + d_1 p + d_0} = \frac{Q(p) + P(p)}{P(p)} = 0.$$

Записуючи чисельник у загальноприйнятій формі, маємо

$$\frac{Q(p) + P(p)}{P(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{d_n p^n + d_{n-1} p^{n-1} + \dots + d_1 p + d_0} = W(p) + 1 = 0. \quad (4.32)$$

При цьому треба пам'ятати, що $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = P(p) + Q(p) = 0$ — характеристичне рівняння замкнутої системи, а $d_n p^n + d_{n-1} p^{n-1} + \dots + d_1 p + d_0 = P(p) = 0$ — характеристичне рівняння розімкнутої системи.

Розглянемо два окремі випадки — стійкої і нестійкої розімкнутої систем — і сформулюємо умови, які мають задовольняти відповідні замкнуті системи.

Випадок стійкої розімкнутої системи. Нехай замкнута система звільняється від впливів, тому $p = j\omega$, і, виходячи з (4.32), запишемо

$$\begin{aligned} 1 + W(j\omega) &= \frac{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0}{d_n (j\omega)^n + d_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + d_1 j\omega + d_0} = \\ &= \frac{F(j\omega)}{R(j\omega)} = N(j\omega), \end{aligned} \quad (4.33)$$

де $W(j\omega)$ — амплітудно-фазова частотна характеристика розімкнутої системи; $F(j\omega)$, $R(j\omega)$, $N(j\omega)$ — частотні характеристики. Множеники чисельника і знаменника можна подати у вигляді n співмножників $(j\omega - p_i)$ або $(j\omega - p'_i)$, де p_i , p'_i — корені характеристичного рівняння відповідно замкнутої системи для чисельника і розімкнутої — для знаменника. Отже, можна записати

$$1 + W(j\omega) = \frac{a_n(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)}{a_m(j\omega - p'_1)(j\omega - p'_2) \dots (j\omega - p'_m)} = \frac{F(j\omega)}{R(j\omega)}. \quad (4.34)$$

Для стійкої розімкнутої системи всі корені $p'_1, p'_2, \dots, p'_m$ є дійсними, тобто розташовуються в лівій напівплощині коренів (рис. 4.15). При цьому кожен із співмножників вигляду $(j\omega - p'_i)$ у разі змінюванні ω до $+\infty$

повернеться на кут $\pi/2$, а загальний кут повороту вектора $R(j\omega)$ дорівнюватиме $\theta_R = \frac{\pi}{2}n$.

Для стійкості замкнутої системи всі корені $p_1, p_2, \dots, p_n$ характеристичного рівняння замкнутої системи також мають розташовуватися в лівій напівплощині. Вектор $F(j\omega)$ при зміні ω в діапазоні $0 < \omega < +\infty$ як добуток n

співмножників вигляду $(j\omega - p_i)$ повернеться на кут $\theta_F = \frac{\pi}{2}n$.

Для результуючого кута θ_Σ повороту вектора $N(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ маємо

$$\theta_\Sigma = \theta_F - \theta_R = 0.$$

Для графічної інтерпретації цього висновку розглянемо рис. 4.16, де $W(j\omega)$ як вказувалося раніше, є амплітудно-фазовою частотною характеристикою розімкнутої системи.

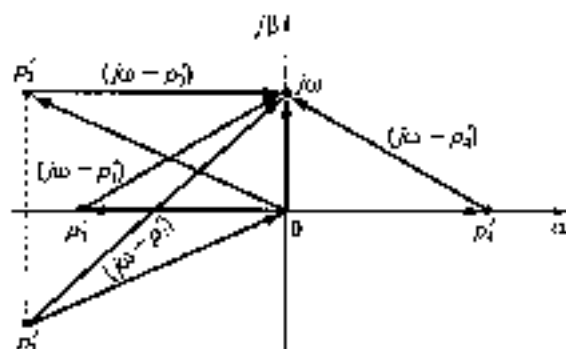


Рис. 4.15

системи, і дає змогу сформулювати умови стійкості замкнутої системи за умови стійкості розімкнутої:

Якщо розімкнута система автоматичного керування є стійкою, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб АФХ розімкнутої системи не охоплювала точку з координатами $(-1, j0)$ при зміні частоти від 0 до $+\infty$.

Випадок нестійкої розімкнутої системи. Серед коренів характеристичного рівняння розімкнутої системи мають бути корені (або один корінь, наприклад, p'_0), які лежать у правій півплощині коренів (див. рис. 4.15). Нехай таких коренів буде m .

При цьому кожний вектор-співмножник вигляду $(j\omega - p'_k)$ при зміні ω від 0 до $+\infty$ повернеться за годинниковою стрілкою на кут $\pi/2$, а загальний кут повороту всіх m векторів-співмножників буде $\frac{\pi}{2}m$.

Отже, із загальної кількості n векторів-співмножників, які відносяться до розімкнутої системи і визначають кут обертання вектора $R(j\omega)$ ліворуч від вертикальної осі знімаються $n - m$, а праворуч — m векторів-співмножників.

Обчислимо результуючий кут обертання вектора $R(j\omega)$:

$$\varphi_r = \frac{\pi}{2}(n - m) - \frac{\pi}{2}m = \frac{\pi}{2}n - \pi m, \quad (4.35)$$

кут обертання вектора $F(j\omega)$

$$\varphi_f = \frac{\pi}{2}n$$

і результуючий кут обертання вектора $CN = N(j\omega) - W(j\omega + 1)$:

$$\varphi_z = \varphi_f - \varphi_r = \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}n + \pi m = \pi m \quad (4.36)$$

Умова стійкості замкнутої системи при цьому може бути сформульована таким чином:

Якщо розімкнута система автоматичного керування є нестійкою, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб АФХ розімкнутої системи при зміні частоти від 0 до $+\infty$ охоплювала точку з координатами $(-1, j0)$ проти годинникової стрілки і поверталася на кут $2\pi m$ (m — кількість прaviх коренів у характеристичному рівнянні розімкнутої системи).

Виходячи із обох розглянутих випадків поведінки розімкнутої системи, сформулюємо загальну умову стійкості замкнутої системи:

для стійкості замкнутої лінійної системи автоматичного керування необхідно і достатньо, щоб при русі точки M за амплітудно-фазовою характеристикою розімкнутої системи у разі зміни ω від 0 до $+\infty$ вектор OM , початок якого лежить в точці S з координатами $(-1, 0)$, повернувся на кут

$$\varphi_{\text{н.к.}} = 180^\circ - \alpha + 2\pi n, \quad (4.37)$$

де π, n — відповідно степені характеристичних рівнянь замкнутої і розімкнутої систем; n — кількість прямих коренів у характеристичному рівнянні розімкнутої системи.

На практиці, як правило, $n = m$, і тому при $m = 0$ умова стійкості замкнутої системи матиме вигляд

$$\varphi_{\text{н.к.}} = 0. \quad (4.38)$$

Характеристики, які відповідають стійким розімкнутим системам, показано на рис. 4.17, а, б, в. Визначивши дійсний кут $\varphi_{\text{н.к.}}$ на певній відстані точок характеристики у разі зміни ω від 0 до $+\infty$ і порівнюючи його значення з умовою стійкості замкнутої системи $\varphi_{\text{н.к.}} = 0$, встановимо, що для характеристик розімкнутої системи (а, б) замкнута система буде стійкою, а для характеристик в — нестійкою.

Якщо амплітудно-фазова частотна характеристика розімкнутої системи проходить через саму точку S з координатами $(-1, 0)$, то замкнута система знаходитиметься на межі стійкості.

При використанні критерію Найквіста необхідно мати на увазі, що АФХ розімкнутих систем можуть бути значно складнішими, ніж ті, що розглянуті раніше.

АФХ 1 і 2, наведені на рис. 4.16, при зміні частоти від $\omega = 0$ до $+\infty$ становлять замкнутий контур (рис. 4.18), показаний суцільною лінією при $\omega > 0$ і штриховою при $\omega < 0$. Такий вигляд мають характеристики для статичних систем, у характеристичних рівняннях яких є тільки члени, що визначають дійсні значення АФХ при $\omega = 0$ (точку на дійсній осі при $\omega = 0$).

В астатичних розімкнутих системах з інтегровальними ланками з передаточною функцією вигляду $W_c = k \frac{1}{p}$ АФХ не є замкнутим контуром, оскільки характеристичне рівняння розімкнутої системи має нульові корені.

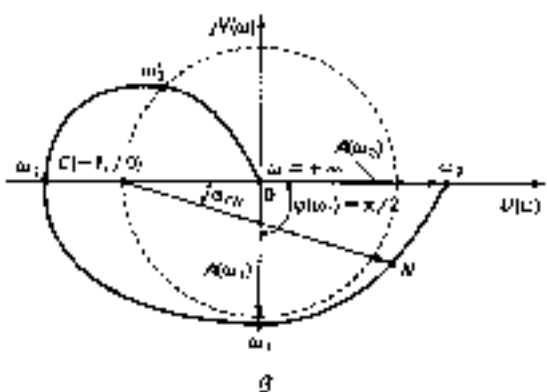
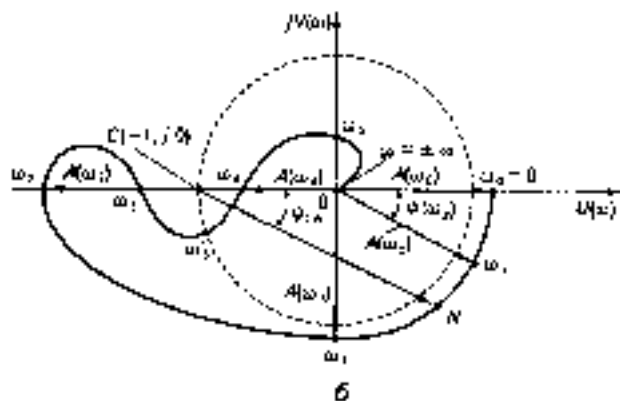
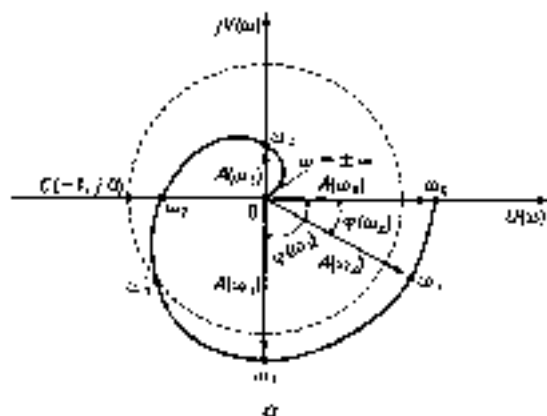


Рис. 4.17

Нехай, наприклад, система складається із двох аперіодичних ланок першого порядку зі сталими часу T_1 , T_2 і однієї інтегровальної ланки. Характеристичне рівняння розімкнутої системи в загальному випадку $P(p) = 0$, де $P(p) = P_1(p)P_2(p)P_3(p)$ є добутком поліномів лівих частин рівнянь ланок. Оскільки $P_1(p) = p$, характеристичне рівняння розімкнутої системи запишеться так:

$$\begin{aligned} P(p) &= (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p = T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p = \\ &= p(T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1) = 0 \end{aligned}$$

Отже, перший корінь є нульовим, тобто $p_1 = 0$. При двох інтегровальних ланках матимемо два нульові корені, бо

$$P(p) = p^2(T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1) = 0.$$

Передавальна функція розімкнутої астатичної системи при одній інтегровальній ланці має вигляд

$$W(p) = \frac{Q(p)}{pP'(p)},$$

при двох —

$$W(p) = \frac{Q(p)}{p^2 P'(p)},$$

при k —

$$W(p) = \frac{Q(p)}{p^k P'(p)}.$$

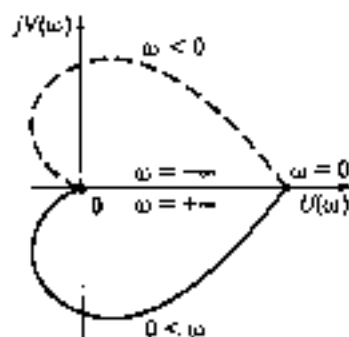


Рис. 4.18

Аналогічно амплітудно-фазова характеристика розімкнутих систем при одній інтегровальній ланці записується так:

$$W(j\omega) = \frac{Q(j\omega)}{j\omega P'(j\omega)} = -\frac{Q(j\omega)j}{\omega P'(j\omega)},$$

при двох —

$$W(j\omega) = \frac{Q(j\omega)}{(j\omega)^2 P'(j\omega)} = -\frac{Q(j\omega)}{\omega^2 P'(j\omega)}$$

Побудовані АФХ астатичної системи при $k = 1$ у разі зміни ω від 0 до $+\infty$ і від 0 до $-\infty$ показані відповідно суцільною і штриховою лініями на рис. 4.19, а. При $\omega = 0$ характеристика має розрив, що

утруднило оцінку стійкості замкнутої системи. Вектор $\Delta\omega$ у разі змін частоти від $-\infty$ до $+\infty$ при переході через 0 стрибкоподібно змінює фазовий кут від $-\pi/2$ до $+\pi/2$, але в якому напрямку змінюється фазовий кут при переході через початок координат, визначити неможливо. Щоб усунути цю невизначеність для асистемного системи довільного порядку (з різним k), користуються такими правилами.

- 1. будують тільки АФХ розімкнутої системи у разі зміни частоти в межах $0 < \omega < +\infty$;
- 2. побудовану характеристику доповнюють другою віддієвідного кута обертання нескінченно великого радіуса-сектора R характеристики, який дорівнює $\pi/2k$.
- 3. використовують критерій стійкості Найквіста у відповідному формулюванні.

Дві АФХ розімкнутих систем показано на рис. 4.19. б (криві 1 і 2). Характеристику 1 точка $C(-1, j0)$ охоплюється за годинниковою

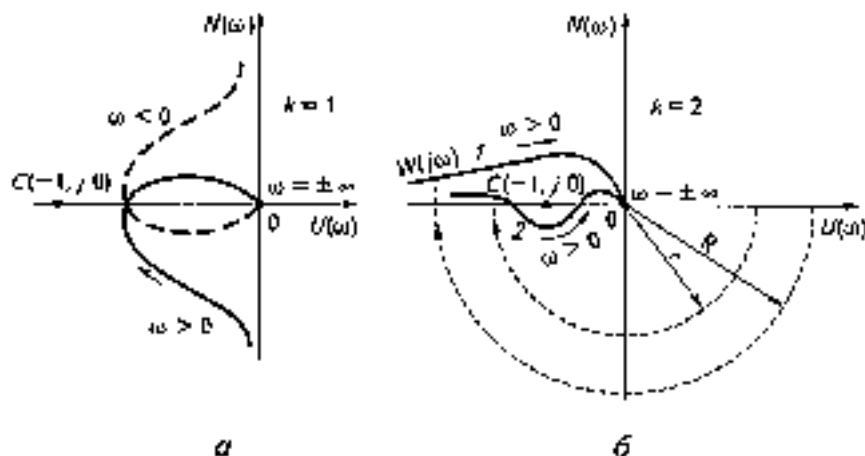


Рис. 4.19

стрілкою, а характеристикою 2 ця точка не охоплюється. Тому замкнута система, яка має характеристику 1 в розімкнутому стані, буде нестійкою, а характеристика 2 — стійкою.

Запас стійкості. Як зазначалося, при проходженні характеристики замкнутої системи через точку $C(-1, j0)$ замкнута система знаходиться на межі стійкості. Тому запас стійкості цієї системи

при використанні критерію Найквіста визначається деякою зоною двикла точки $C(-1, j0)$, через яку не повинна проходити АФХ розімкнутої системи.

Розрізняють запас стійкості за модулем (амплітудною) і за фазою. Дійсний запас стійкості замкнутої системи за модулем визначається деяким значенням h , на яке модуль $A(\omega)$ характеристики $W(j\omega)$ розімкнутої системи менший від одиниці. Його можна визначити по відрізку на осі абсцис між точкою C і точкою перетину горизонтальної осі характеристикою $W(j\omega)$ розімкнутої системи (рис. 4.20).

Запас стійкості за фазою γ , визначається як різниця між кутом π і максимально допустимим кутом $\varphi(\omega_c)$ обертання вектора, при якому збігається запас стійкості за модулем. Він визначається за положенням вектора в точці перетину характеристики $W(j\omega)$ розімкнутої системи з колом одиничного радіуса ($R = 1$):

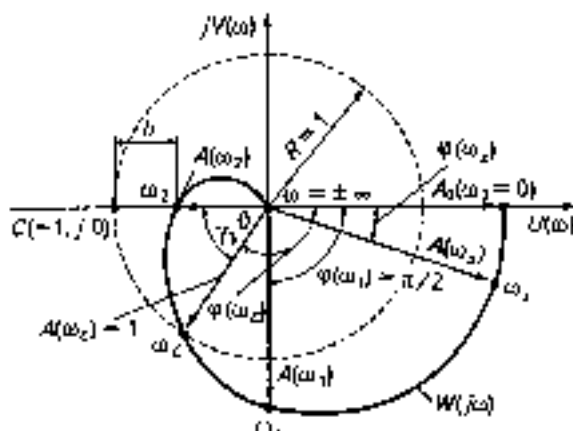


Рис. 4.20

$$\gamma_r = \pi - \varphi(\omega_c).$$

Запас стійкості може бути заданий у вигляді деякої зони навколо точки $C(-1, j0)$ (рис. 4.21, а, б).

При характеристиці 1 дійсний запас стійкості за фазою γ_r і за модулем $A_{\gamma_r}(\omega) = 1 - A(\omega_c)$ значно більший, ніж мінімально допустимий γ_r і h (рис. 4.21, б). При характеристиці 2 дійсний запас за фазою дорівнює заданому γ_r . При характеристиці 3 не забезпечується заданий запас стійкості за модулем. Складнішу характеристику, в якій заданий запас стійкості знаходиться як праворуч, так і ліворуч від точки $C(-1, j0)$, наведено на рис. 4.21, а. Таким характеристикам підпорядковують САК із внутрішніми зворотними зв'язками.

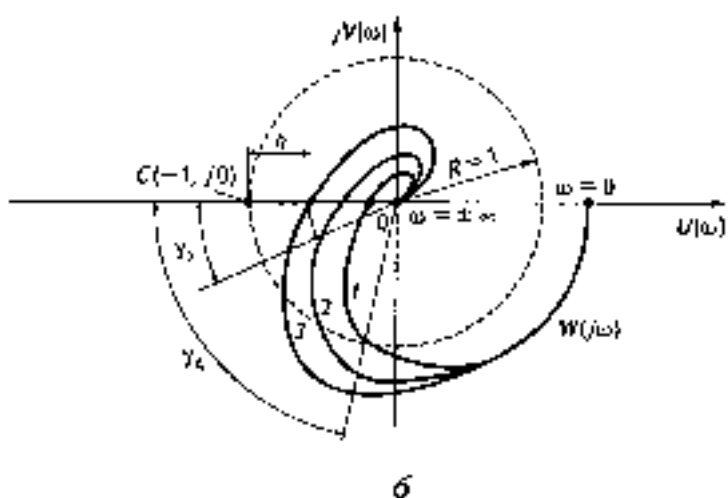
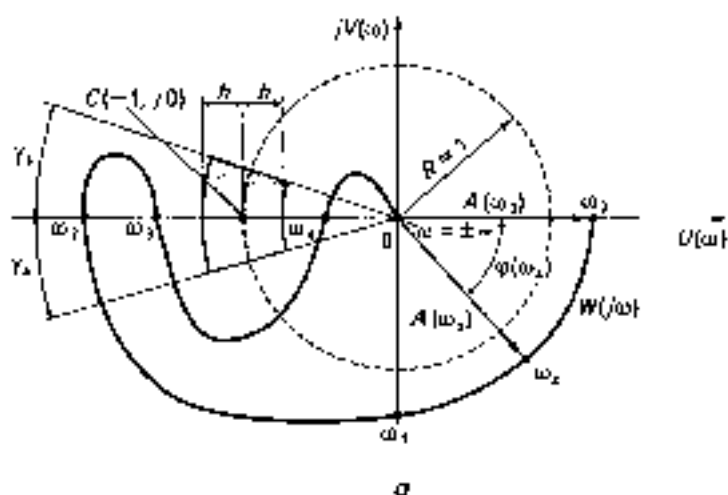


Рис. 4.21

4.8

Критерій Найквіста у логарифмічній формі

Відповідно до критерію Найквіста про стійкість замкнутої системи можна судити не тільки за АФХ розімкнутої системи, а й за взаємним розташуванням амплітудної і фазової частотних характеристик відповідної розімкнутої системи. Звичайно при цьому використовують логарифмічні характеристики — амплітудну $L(\omega)$ і фазову $\varphi(\omega)$, що пов'язані між собою простотою їх побудови. Стосовно логарифмічних характеристик критерій стійкості Найквіста формулюється так:

якщо система стійка в розімкнутому стані, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб логарифмічна амплітудна характеристика (ЛАХ) перетинала вісь абсцис раніше, ніж фазова характеристика в останній раз перебігає лінію $-\pi$, іншими словами, на частоті зрізу ω_0 , яка відповідає $L(\omega) = 0$, фаза за модулем має бути меншою за π ;

якщо система нестійка в розімкнутому стані і має k коренів у правій півплощині, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб при додаванні ЛАХ кількість перегинів фазової характеристики рівня $-\pi$ знизу доверху була на $k/2$ раз більшою за кількість перегинів у зворотному напрямі.

Перше формулювання пояснюється характеристиками, наведеними на рис. 4.22. На цьому рисунку зображені ЛАХ $L(\omega)$ чотирьох варіантів фазової характеристики $\varphi(\omega)$. Фазові характеристики 1 і 4 відповідають стійкій замкнутій системі, причому характеристика 4 відповідає АФХ на рис. 4.17, б. Якщо фазова характеристика має вигляд 2, то замкнута система перебуває на межі стійкості, а характеристика 3 відповідає нестійкій замкнутій системі.

Графіки характеристик, зображені на рис. 4.23, а, відповідають стійкій замкнутій системі при $k = 1$ (1/2 перетину), а на рис. 4.23, б — при $k = 2$ (один перетин).

Для використання критерію Найквіста в логарифмічній формі треба вміти будувати ЛАХ і ЛФХ (фазову) частотні характеристики.

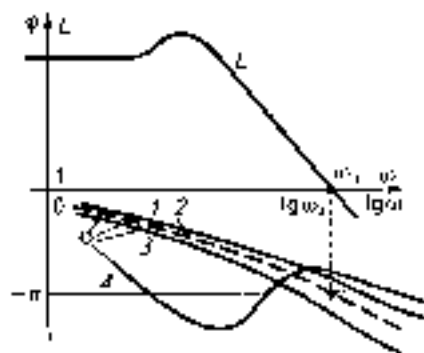


Рис. 4.22.

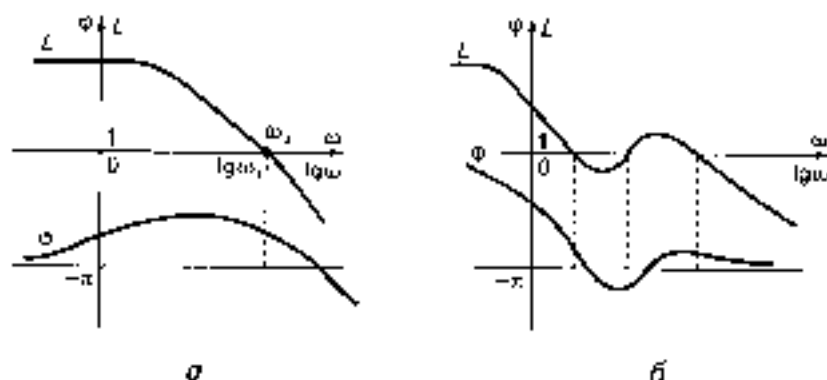


Рис. 4.23

При побудові ЛАХ розімкненої системи немає сенсу знаходити амплітудну характеристику $M(\omega)$ системи і будувати залежність $20 \lg M(\omega)$ від $\lg(\omega)$. Якщо система зведена до одноканальної, то вона складається з ланцюжка послідовно з'єднаних ланок, для яких співвідношеннями є такі співвідношення:

$$L(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega); \quad (4.39)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega); \quad (4.40)$$

де $L_i(\omega)$ і $\varphi_i(\omega)$ — відповідно ЛАХ і ЛФХ окремих ланок.

Отже, логарифмічні частотні характеристики розімкненої системи можна отримати підсумовуванням організм характеристик окремих ланок. Для побудови ЛАХ розімкненої системи її передаточну функцію слід позначити у вигляді добутку елементарних співмножників, поручок яких не перетинаються один з одним, наприклад у вигляді

$$W(p) = \frac{k(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)(T_4 p^2 + T_5 p + 1)}, \quad (4.41)$$

і скористатися таблицею логарифмічних частотних характеристик елементарних співмножників передаточних функцій (табл. 4.5).

ЛАХ розімкненої системи змичений будуть описувати без побудови ЛАХ окремих ланок. Для цього спочатку знаходять точку з координатами $M(\omega) = 20 \lg k$, $\varphi = -1$ ($\lg \omega = 0$) де k — коефіцієнт передачі ро-

різмікнутої системи. Потім через знайдену точку прокладати пряму з нахилом $20(m-l)$ дБ/дек, де m — кількість диференційовальних ланок; l — кількість інтегровальних ланок. Після цього на осі абсцис відкладають значення частот сполуки $\lg(1/T_i)$, де T_i — сталі часу елементарних співмножників. Для коливальної ланки це сталі часу при p^2 . Поряд із значенням $\lg(1/T_i)$ на осі абсцис зручно вказувати значення частот $\omega = 1/T_i$. Потім пряму, яка проходить через точку $L(\omega) = 20 \lg k$, $\omega = 1$, продовжують до найменшої частоти сполуки. В точці з цією частотою замикають нахил прямої лінії відповідно до типу елементарного співмножника, стага часу якого вказує, що частоту сполуки. Так само характеристика продовжується в бік зростання частоти, записуючи послідовні злами на кожній частоті сполуки. За необхідності побудовану ЛАХ уточнюють шляхом урахування поправок для коливальних ланок.

ЛФХ визначається як сума фазових характеристик елементарних співмножників. Наприклад, для передаточної функції (4.41) розмікнутої системи фазова характеристика будується за рівнянням

$$\phi(\omega) = -\pi/2 - \operatorname{arctg} T_1 \omega + \operatorname{arctg} T_2 \omega - \operatorname{arctg} T_3 \omega - \operatorname{arctg} \frac{T_4 \omega}{T_4^2 \omega^2}$$

Дослідження стійкості системи за критерієм Найквіста в логарифмічній формі виконується в такій послідовності.

1. Досліджувана система зводиться до одноконтурного вигляду.

2. Записується передаточна функція розмікнутої системи у вигляді добутку елементарних співмножників. Співмножники другого порядку вигляду $T^2 p^2 + T_2 p + 1$ або $\frac{1}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}$ будуть елементар-

ними, якщо виконується умова $T_2/2T_1 < 1$. Якщо ця умова не виконується, то співмножник другого порядку слід подати у вигляді добутку двох співмножників першого порядку:

$$T^2 p^2 + T_2 p + 1 = (T_4 p + 1)(T_5 p + 1),$$

$$\frac{1}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1} = \frac{1}{(T_4 p + 1)(T_5 p + 1)}$$

$$T_{4,5} = \frac{T_2 \pm \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}{2}$$

Для розкладання співмножників третього порядку $T_1^3 p^3 + T_2^3 p^2 + T_3^3 p + 1$ або $1/(T_1^3 p^3 + T_2^3 p^2 + T_3^3 p + 1)$ на елементарні треба будь-яким із відомих способів (наприклад, за формулами Кардана або способом наближеного розв'язку рівнянь високого порядку) визначити корені рівняння

$$T_1^3 p^3 + T_2^3 p^2 + T_3^3 p + 1 = 0$$

Якщо корені рівняння дійсні та різні ($\mu_1 = -\lambda_1$; $\mu_2 = -\lambda_2$; $\mu_3 = -\lambda_3$), то співмножник третього порядку податиться у вигляді трьох елементарних співмножників першого порядку:

$$T_1^3 p^3 + T_2^3 p^2 + T_3^3 p + 1 = \left(\frac{1}{\lambda_1} p + 1 \right) \left(\frac{1}{\lambda_2} p + 1 \right) \left(\frac{1}{\lambda_3} p + 1 \right);$$

$$\frac{1}{T_1^3 p^3 + T_2^3 p^2 + T_3^3 p + 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_1} p + 1 \right) \left(\frac{1}{\lambda_2} p + 1 \right) \left(\frac{1}{\lambda_3} p + 1 \right)}.$$

Якщо ж рівняння має один дійсний корінь $\mu_1 = -\lambda_1$ і два комплексних $\mu_2 = -\alpha + j\beta$; $\mu_3 = -\alpha - j\beta$, то співмножник третього порядку податиться у вигляді добутку двох співмножників — першого і другого порядку:

$$T_1^3 p^3 + T_2^3 p^2 + T_3^3 p + 1 = \left(\frac{1}{\lambda_1} p + 1 \right) \left(\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} p^2 + \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} p + 1 \right);$$

$$\frac{1}{T_1^3 p^3 + T_2^3 p^2 + T_3^3 p + 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_1} p + 1 \right) \left(\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} p^2 + \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} p + 1 \right)}.$$

Аналогічно можна розкласти на елементарні також співмножники більш високих порядків. У цьому разі задача ускладнюється, оскільки виникає необхідність знаходити корені рівнянь більш високих порядків. Такі співмножники можна отримати у разі приведення складних багатоконтурних систем з перехресними зворотними зв'язками до одноконтурних. Тому для дослідження таких систем критерій Найквіста в логарифмічній формі, як правило, не застосовують.

3. Перевіряється стійкість розімкнутої системи на основі рекомендацій, наведених при викладенні методики дослідження стійкості критерієм Найквіста у звичайній формі. Якщо розімкнута система нестійка, то визначається кількість коренів у правій напівплощині. Оскільки попередньо передаточною функцією розімкнутої системи подано у вигляді добутку елементарних співмножників, то при до складенні стійкості розімкнутої системи ускладнень не виникає.

4. Будується ЛАХ розімкнутої системи за раніше викладеними правилами згідно з табл. 4.5.

5. Занесутся рівняння фазової характеристики у вигляді суми фазових характеристик елементарних співмножників, обчислюються значення $\varphi(\omega)$ за різних частот ω , будується фазова характеристика.

При розрахунках фазових характеристик для співмножників другого порядку досить часто припускаються помилки при визначенні кутів, які перевищують за абсолютною величиною 90° . Щоб уникнути можливих помилок, необхідно мати на увазі, що для коливальної ланки з передаточною функцією $1/(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)$ фазова характеристика розраховується за формулою

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2}.$$

У разі збільшення частоти від 0 до $1/T_1$ значення $\varphi(0)$ змінюється від 0 до -90° . При частоті $\omega > 1/T_1$ вираз $T_2 \omega / (1 - T_1^2 \omega^2)$ стає від'ємним і

$$\varphi = +\operatorname{arctg} \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2}.$$

У такому разі значення кутів слід вибирати не в першій чверті (від 0 до $+90^\circ$), а в третій (від -90° до -180°). Наприклад, якщо

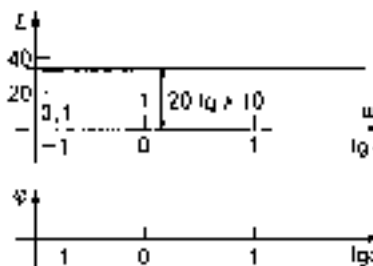
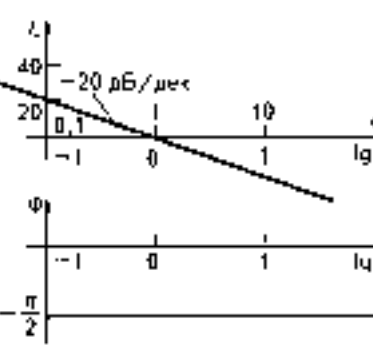
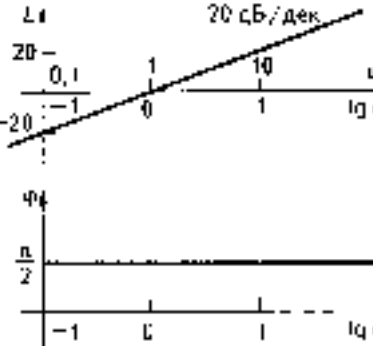
$$\frac{T_2 \omega}{T_1^2 \omega^2 - 1} = 0,364,$$

тому відповідає кут у першій чверті $\alpha = 20^\circ$, то $\varphi(\omega)$ слід визначати за формулою

$$\varphi(\omega) = -180^\circ + \alpha = -160^\circ.$$

Для співмножника $T_1^2 p^2 + T_2 p + 1$ фазова характеристика

$$\varphi(\omega) = +\operatorname{arctg} \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2}$$

Символическое обозначение	ЛАН и ЛФХ	Результаты фазовой характеристики
k		$\varphi(\omega) = 0$
$\frac{1}{p}$		$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$
p		$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$

Символическое	График ЛАЧХ	Полученная характеристика
$T_p - 1$		$\varphi(\omega) = \arctg \sqrt{\omega}$
$\frac{1}{T_p - 1}$		$\varphi(\omega) = -\arctg \sqrt{\omega}$
$T_1^2 p^2 - T_2 p + 1$ или $\frac{T_2}{2T_1} < 1$		$\varphi(\omega) = \arctg \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2}$
$\frac{1}{T_1^2 p^2 - T_2 p + 1}$ или $\frac{T_2}{2T_1} < 1$		$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2}$

При $0 \leq \omega \leq 1/T_1$ значення кутів треба вибирати в першій чверті в інтервалі від 0 до $+90^\circ$, а при $\omega > 1/T_1$, коли

$$\phi(\omega) = -\arctg \frac{T_{2m}}{T_1^2 \omega^2 - 1}.$$

— у другій чверті в межах від $+90^\circ$ до $+180^\circ$. Нехай $T_{2m}/(T_1^2 \omega^2 - 1) = -0,364$, тоді $\phi(\omega) = +180^\circ - 20^\circ = +160^\circ$.

Якщо ЛАХ і ЛФХ побудовано правильно, то границьне значення фазової характеристики при $\omega \rightarrow \infty$ має відповідати границьному нахилу амплітудної. Отже, якщо границьний нахил амплітудної характеристики $(n-m)20$ дБ/дек, то границьне значення фазової характеристики $(n-m) \frac{\pi}{2}$, де n, m — порядки поліномів відповідно знаменника і чисельника передаточної функції розімкнутої системи.

Наприклад, якщо границьний нахил ЛАХ дорівнює -60 дБ/дек, то границьне значення фазової характеристики має становити -270° .

6. За відомим розташуванням ЛАХ і ЛФХ розімкнутої системи робиться висновок про стійкість замкнутої системи.

□ **Приклад 4.6** Передаточна функція розімкнутої системи має вигляд

$$\begin{aligned} W(p) &= W_1(p)W_2(p)W_3(p) = \\ &= \frac{40(0,02p+1)(0,1p+1)(0,5p+1)}{(0,04p^2+0,2p+0,2)(5p+1)(0,05p+1)}. \end{aligned}$$

Дослідити стійкість системи за допомогою критерію Найквіста в логарифмічній формі.

Розв'язання. Визначимо, чи є поліном другого порядку у знаменнику передаточної функції елементарним. Кореніми поліному $0,04p^2+0,2p+1$ є $p_{1,2} = -2,5 \pm j4,33$. Вони комплексні, тому співмножник $1/(0,04p^2+0,2p+1)$ є елементарним і вираз передаточної функції розімкнутої системи залишається без змін. ЛАХ розімкнутої системи будемо у таких послідовностях.

1. Черта: тільки з координатами $\phi(\omega) = 20 \lg 40 = 12$ дБ, $\lg \omega = 0$ ($\omega = 1$) проводимо горизонтальну лінію (напря 0), тому що розімкнута система не містить інтегрувальних і диференціальних ланок (передаточна функція розімкнутої системи не містить співмножників $p \pm 1/p$).

2. Розраховуємо коефіцієнти частот сполучки:

$$\lg \omega_1 = \lg \frac{1}{0,02} = 1,7, \quad \lg \omega_2 = \lg \frac{1}{0,1} = 1,$$

$$\lg \omega_2 = \lg \frac{1}{0,5} = 0,3; \quad \lg \omega_3 = \lg \frac{1}{\sqrt{0,04}} = 0,7;$$

$$\lg \omega_4 = \lg \frac{1}{2,5} = -0,4; \quad \lg \omega_5 = \lg \frac{1}{0,05} = 1,3$$

і відкладаємо їх на осі абсис.

3. Проводимо добування в 4.1 пряму до найвищої частоти сполучення $\omega_2 = 1/2,5$. Число часу 2,5 належить елементарному співмножнику $1/(2,5p - 1)$, тому в цій ділянці нахил ЛАХ змінюється на -20 дБ/дек і стає рівним $0 + (-20) = -20$ дБ/дек. Нівів з нахилом -20 дБ/дек продовжується паралельно прямій, що проходить точку $L(\omega) = 20$ дБ на розриві між кілками першої декади. На частоті $\omega_3 = 1/0,5$ відбувається другий злам характеристики. Її нахил стає рівним $-20 + 20 = 0$ дБ/дек, бо стала часу 0,5 належить співмножнику $(0,5p - 1)$. Наступний злам відбувається на частоті $\omega_4 = 1/0,2$, яка належить співмножнику $1/(0,04p^2 + 0,2p - 1) = 1/(0,04p^2 + 0,2p + 3)$, тому нахил характеристики змінюється на -40 дБ/дек і стає рівним $0 + (-40) = -40$ дБ/дек.

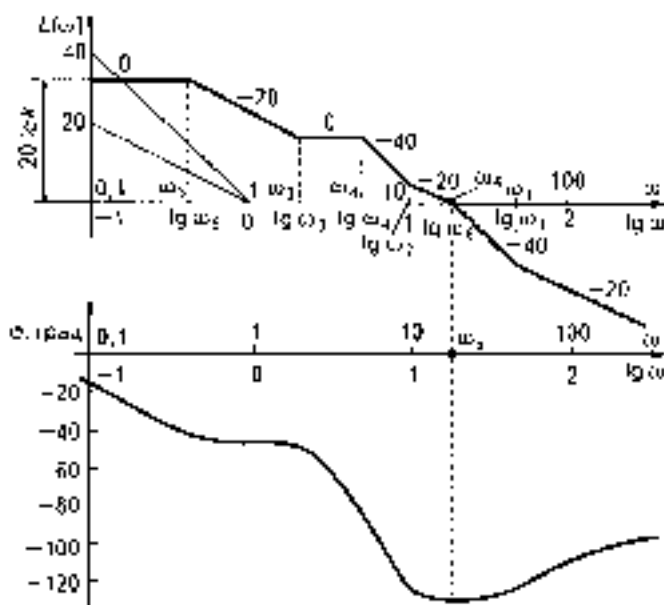


Рис. 4.24

Черговий злам відбувається на частоті $\omega_2 = 1/0.1$, яка відповідається співмножником $(0.1p + 1)$, тому нахил характеристики змінюється на $+20$ дБ/дек і становить -20 дБ/дек. На частоті $\omega_3 = 1/0.05$ також відбувається злам і нахил характеристики стає знову -40 дБ/дек. На частоті $\omega_4 = 1/0.02$ відбувається останній злам і нахил характеристики стає знову $-40 + 20 = -20$ дБ/дек.

Побудовану характеристику $B(\omega)$ зображено на рис. 4.24.

4. Фазова характеристика розраховується за формулою

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6 = \\ &= \arctg 110.2\omega + \arctg 0.1\omega + \arctg 0.5\omega - \arctg \frac{0.2\omega}{1 - 0.5K\omega^2} - \\ &\quad - \arctg 2.5\omega - \arctg 0.05\omega\end{aligned}$$

Результати розрахунків наведено в табл. 4.6, а характеристику $\varphi(\omega)$ — на рис. 4.24.

Таблиця 4.6

Параметри	Числові значення									
ω, c^{-1}	0.1	0.4	1	2	5	10	20	50	100	200
φ_1	0	1	2	3	6	17	77	45	64	76
φ_2	1	2	6	12	27	45	64	79	85	87
φ_3	3	11	27	45	69	79	85	88	89	90
φ_4	-7	-9	-12	-26	-96	-147	-165	-176	-177	-179
φ_5	14	-45	-67	-78	-85	-86	-89	-90	-90	-90
φ_6	0	-2	-3	-6	-12	-28	-41	-67	-78	-84
$\varphi = \sum \varphi_i$	-17	-42	-47	-50	-85	-125	-128	-126	-107	-100

Із побудованих характеристик визначаємо фазу на частоті зрізу: $\varphi(\omega_c) = -120^\circ$. Розглянута система стійка, бо вона лише собою поділяється з'єднанням стійких ланок. Тому на підставі формулювання критерію для систем, стійких у розкритому стані, робимо висновок, що замкнута система стійка.

4.9

Дослідження стійкості систем із запізненням

У ланках із запізненням вихідна величина з'являється через деякий проміжок часу τ після появи величини на вході ланки.

Передавальна функція і АФХ ланки із запізненням мають вигляд

$$W(p) = e^{-p\tau} \text{ і } W(j\omega) = e^{-j\omega\tau}.$$

У системі автоматичного керування ланка із запізненням можуть входити в основне (пряме) коло послідовно з іншими ланками регулятора або входити в коло зворотного зв'язку (рис. 4.25, а, б), де $W(p)$ — передавальна функція розімкнутої системи без урахування ланки із запізненням, а $W_1(p)$ — передавальна функція ланки із запізненням.

Передавальна функція розімкнутої системи з урахуванням запізнення (рис. 4.25, а)

$$W^*(p) = W_1(p)W(p) = W(p)e^{-p\tau}.$$

Якщо в системі є кілька ланок із запізненням (наприклад, τ_1 і τ_2), то

$$W^*(p) = W(p)e^{-p(\tau_1 + \tau_2)}.$$

Отже, кілька ланок із різними запізненнями можна замінити еквівалентною ланкою із запізненням $\tau = \tau_1 + \tau_2$.

Передавальна функція замкнутої системи до заданням $u(t)$ у цьому випадку матиме вигляд

$$W^*(p) = \frac{W(p)e^{-p\tau}}{1 + W(p)e^{-p\tau}}. \quad (4.42)$$

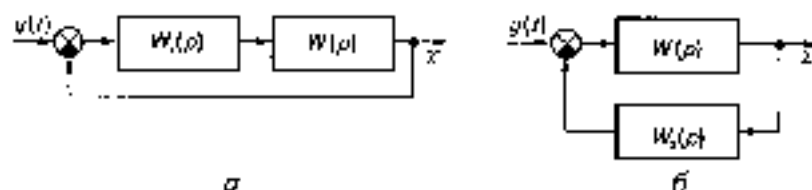


Рис. 4.25

Якщо ланка із запізненням входить до кола зворотного зв'язку (рис. 4.25, б), то передаточна функція має заданням

$$W^*(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)e^{-\tau p}}. \quad (4.43)$$

Згідно із виразами (4.42), (4.43), незалежно від місця знаходження ланки із запізненням, характеристичне рівняння замкнутої системи

$$1 + W(p)e^{-\tau p} = 0. \quad (4.44)$$

Це рівняння є трансцендентним і має нескінченну кількість коренів, які для стійкої системи мають розміщуватися у лівій півплощині коренів. Знаходження коренів у цьому випадку — трудомістке завдання, тому для аналізу стійкості таких систем найприйнятливим є використання частотного критерію Найквіста.

Для зручності такої структурної схеми лінійної САК із запізненням приведемо до вигляду двох послідовно з'єднаних ланок: однієї без запізнення з передаточною функцією $W_1(p)$ і іншої — із запізненням $W_2(p) = e^{-\tau p}$.

Якщо в передаточній функції розімкнутої системи

$$W'(p) = W_1(p)e^{-\tau p}$$

покласти, що $\tau \rightarrow 0$, то можна дістати передаточну функцію так званої граничної системи $W'_2(p)$:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} W'(p) = W'_2(p),$$

де $W'_2(p) = W_1(p)e^{-\tau p} = W_1(p)$.

Отже, ця гранично розімкнута системою розуміють систему, в якій запізнення зменшується до нуля і ланка з запізненням перетворюється на ланку безінерційну ланку з коефіцієнтом передачі, що дорівнює одиниці.

Згідно з викладеним вище, АФХ розімкнутої системи із запізненням має вигляд

$$W^*(j\omega) = W(j\omega)e^{-j\omega\tau}, \quad (4.45)$$

а АФХ граничної розімкнутої системи —

$$W'_{\text{г.г.}}(j\omega) = W'(j\omega) = W_1(j\omega). \quad (4.46)$$

Замінимо АФХ розімкнутої системи з запізненням у показниковій формі.

$$W^*(j\omega) = A_1 e^{j\omega\tau} e^{-j\omega T} = A_1 e^{j(\omega\tau - \omega T)}, \quad (4.17)$$

де A_1 — вектор розімкнутої системи.

Із знайденого виразу $W^*(j\omega)$ випливає, що для побудови АФХ розімкнутої системи із запізненням слід побудувати характеристику граничної системи, яка в даному разі матиме вигляд $W_1(j\omega) = A_1 e^{j\omega\tau}$, після чого повернути радіус-вектор граничної системи на один і той самий кут $\omega\tau$ за годинниковою стрілкою.

Деяка АФХ розімкнутої граничної системи $W_1(j\omega) = A_1 e^{j\omega\tau}$ показана на рис. 4.26.

Якщо розімкнута система стійка, то $W_1(j\omega)$ не охоплює точку $C(-1, j0)$, тому відповідна замкнута система також буде стійкою.

Нехай кут між горизонтальною віссю і вектором $A_1(\omega_1)$ є φ_1 і відповідає деякій частоті ω_1 . Величина $\omega_1\tau$ по куту, який характеризує запізнення для даної частоти, є $\omega_1\tau$. Оскільки запізнення на кут $\omega_1\tau$ відповідає від'ємній величині цього кута, який відкладається за годинниковою стрілкою відносно початкового положення вектора $A_1(\omega_1)$, то неважко побудувати точку характеристики $W^*(j\omega_1)$ з урахуванням запізнення для частоти ω_1 . Аналогічно можна побудувати точку для

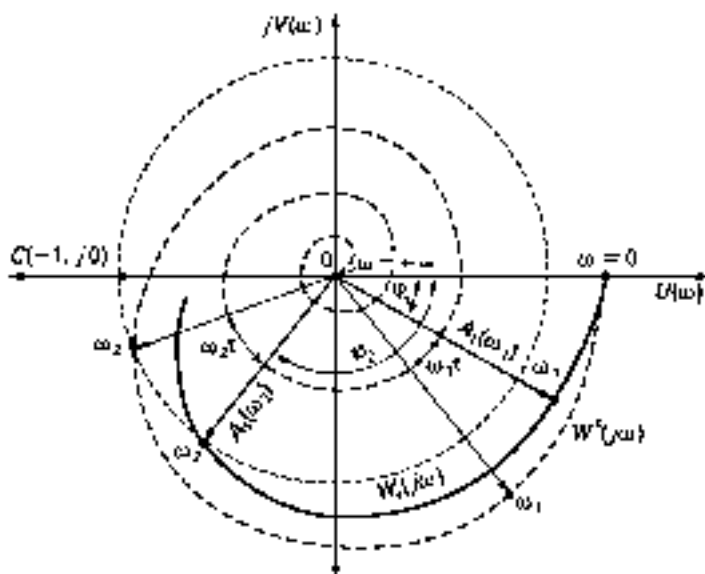


Рис. 4.26

частоти ω_2 , при якій вектор граничної характеристики $A(\omega_2)$ дорівнює одиниці, а також й інші точки характеристики $W'(j\omega)$ розімкнutoї системи.

З наведеного графіка бачимо, що зростання запізнення зменшує запас стійкості системи. Зі збільшенням частоти кут запізнення починає швидко зростати, бо модуль граничної характеристики при цьому зменшується. Це призводить до закручування характеристики $W'(j\omega)$ навколо початку координат. Проте при деяких складних характеристиках $W(j\omega)$ можливі випадки, коли запізнення позитивно впливає на роботу системи. Змінюючи величину τ , можна знайти його критичне значення, при якому характеристика $W'(j\omega)$ проходить через точку $(-1, j0)$. Відповідну частоту при цьому називають *критичною*.

4.10

Структурно-нестійкі системи і коректувальні ланки

В усіх розглянутих раніше випадках стійкість (або нестійкість) системи залежала від значення параметрів ланок структурної схеми існуючої системи. Системи автоматичного керування, в яких стійкість залежить лише від значення параметрів ланок, називають *структурно-стійкими*. Але в такі САК, у яких досягти стійкості за рахунок зміни параметрів ланок принципово неможливо. Стійкість цих систем може бути досягнута лише у разі зміни структурної схеми.

Системи автоматичного керування, в яких стійкість не може бути досягнута за рахунок лише зміни параметрів, називають *структурно-нестійкими*.

Для пояснення викладеного розглянемо окремі приклади.

Нехай в САК є дві інтегрувальні ланки і одна апериодична ланка першого порядку. Дістанемо характеристичне рівняння замкнутої системи і дослідимо стійкість системи.

Запишемо передавальні функції ланок системи

$$W_1(p) = k_1 \frac{1}{p}; \quad W_2(p) = k_2 \frac{1}{p}; \quad W_3(p) = \frac{k_3}{T_3 p + 1}$$

і характеристичне рівняння замкнутої системи в загальному вигляді

$$W(p) + 1 = 0,$$

де $W(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)$ — передаточна функція розімкнутої системи.

Після підстановки відповідних значень дістанемо

$$k_1 \frac{1}{p} k_2 \frac{1}{p} \frac{k_3}{T_1 p + 1} + 1 = 0;$$

$$(T_1 p + 1)p^2 + k_1 k_2 k_3 = 0,$$

$$T_1 p^3 + p^2 + k_3 = 0,$$

де $k_3 = k_1 k_2 k_3$ — коефіцієнт підсилення розімкнутої системи.

Характеристичне рівняння третього порядку в загальному вигляді

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0,$$

тому для цього випадку значення коефіцієнтів

$$a_0 = T_1; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = k_3.$$

У даному разі не виконується перша умова Гурвіца про те, що всі коефіцієнти характеристичного рівняння замкнутої системи мають бути більшими за нуль, тому система буде нестійкою.

При цьому, як би ми не змінювали значення параметрів a_0, a_1, a_2 , дістанемо $a_3 > 0$ неможливо. Тому дана система є структурно-нестійкою.

На основі розглянутого прикладу можна зробити деякі узагальнення.

1. Зовнішньою ознакою структурно нестійкої системи є відсутність (рівність нулю) в лінійному характеристичному рівнянні замкнутої системи деяких членів (коефіцієнтів).

2. Системи, які мають дві та більше інтегрувальних ланок за умови, що інші ланки аперіодичні або безінерційні, є структурно-нестійкими.

3. Для досягнення стійкості необхідна зміна структурної схеми структурно-нестійкої системи.

Для зміни структурної схеми, як правило, використовуються коректуючі ланки. Вони бувають двох типів — паралельні та послідовні.

Паралельні коректувальні ланки. Як паралельні коректувальні ланки використовуються місцеві жорсткі від'ємні зворотні зв'язки.

Охопимо ланку із інтегрувальною ланкою розглянутої системи жорстким від'ємним зворотним зв'язком (рис. 4.27) і складемо рівняння (передаточну функцію) даної ланки з урахуванням введеного зворотного зв'язку.

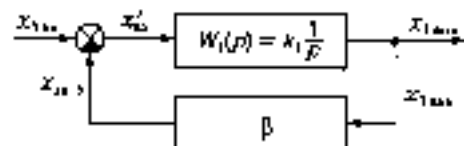


Рис. 4.27

Рівняння ланки до введення зворотного зв'язку

$$x_{1,вих} = k \frac{1}{p} x_{1,вх}$$

Знайдемо фактичне значення вихідної величини при введенні паралельної коректувальної ланки з коефіцієнтом зворотного зв'язку $\beta = \lambda_{1,зв}/x_{1,вих}$:

$$x'_{1,вх} = x_{1,вх} - x_{1,зв} = x_{1,вх} - \beta x_{1,вих}$$

Рівняння ланки з урахуванням зворотного зв'язку

$$x_{1,вих} = k_1 \frac{1}{p} x'_{1,вх} = k_1 \frac{1}{p} (x_{1,вх} - \beta x_{1,вих})$$

або

$$\lambda_{1,вих} (p - \beta k) = k_1 x_{1,вх}$$

Позначивши $k_1 \beta = T_1$, $k_1 \beta = k_1$, після ділення всіх членів на βk дістанемо рівняння інтегрувальної ланки, охопленої від'ємним зворотним зв'язком:

$$(T_1 p - 1) x_{1,вих} = k_1 x_{1,вх}$$

З цього виразу видно, що інтегрувальна ланка, охоплена від'ємним зворотним зв'язком, еквівалентна стійкій аперіодичній ланці першого порядку.

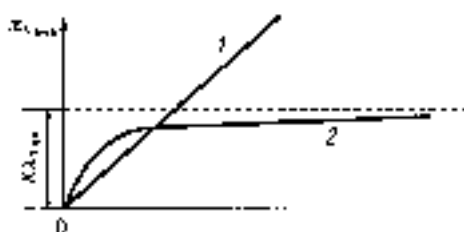


Рис. 4.28

Зміну вигляду часової характеристики в цьому разі ілюструє рис. 4.28, де 1 — часова характеристика ланки до введення коректувальної ланки; 2 — після охоплення інтегрувальної ланки від'ємним зворотним зв'язком.

Розглянемо, як зміниться передаточна функція інтегральної ланки $W_1(p) = k_1 \frac{1}{p}$ з урахуванням підключення на її вхід послідовної коректувальної ланки ПК.

Рівняння ланки $W_1(p)$ у даному разі матиме вигляд

$$x_{2,m+1} = k_2 \frac{1}{p} (x_{1,m+1} + \alpha p x_{1,m}) = k_2 \frac{1}{p} (1 + \alpha p) x_{1,m+1}.$$

Тут $x_{1,m+1} = x_{2,m}$, тому передаточну функцію ланки $W_1(p)$ після введення коректувальної ланки можна записати так:

$$W'_1(p) = \frac{x_{2,m+1}}{x_{1,m+1}} = k_2 \frac{1}{p} (1 + \alpha p) = W_1(p)(1 + \alpha p).$$

Характеристичне рівняння замкнутої САР з урахуванням ланки ПК

$$W_1(p)W_2(p)W_3(p) + 1 = 0$$

чи

$$k_1 \frac{1}{p} k_2 \frac{1}{p} (1 + \alpha p) \frac{k_3}{T_3 p + 1} + 1 = 0,$$

або

$$k_1 k_2 k_3 (1 + \alpha p) + (T_3 p + 1) p^2 = 0,$$

$$T_3 p^3 + p^2 + k_1 k_2 k_3 \alpha p + k_1 k_2 k_3 = 0.$$

Отже, дана система ланки введення послідовної коректувальної ланки перетворилася на структурно стійку систему.

Передаточна функція розімкнутої системи до введення послідовної коректувальної ланки мала вигляд

$$W(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p).$$

Після введення послідовної коректувальної ланки передаточна функція розімкнутої системи

$$\begin{aligned} W'(p) &= W_1(p)W'_2(p)W_3(p) = \\ &= W_1(p)W_2(p)(1 + \alpha p)W_3(p) = W(p)(1 + \alpha p), \end{aligned} \quad (4.48)$$

де $W'(p)$ — передаточна функція ланки 2 з урахуванням коректування.

Відповідний вираз АФХ запишеться так.

$$W^*(j\omega) = W(j\omega)(1 + j\alpha\omega) = W(j\omega) + jW(j\omega)\alpha\omega.$$

Тоді $W^*(j\omega)$ (вектор АФХ скорегованої системи) можна представити як суму двох векторів відповідної розімкнутої системи до коректування $W(j\omega)$ і вектора $jW(j\omega)\alpha\omega$, повернутого на кут $\pi/2$ проти годинникової стрілки (α — параметр послідовної коректувальної ланки). При цьому слід пам'ятати, що множення вектора на j у комплексній площині відповідає повороту його на кут $\pi/2$ проти годинникової стрілки.

Вихідна АФХ розімкнутої системи $W(j\omega)$ яка охоплює точку $C(-1, j0)$, показана на рис. 4.30. Якщо розімкнута система є стійкою, то з урахуванням критерію Найквіста можна стверджувати, що замкнута система в цьому випадку буде нестійкою.

Розглянемо поведінку цієї ж системи після введення послідовної коректувальної ланки. На рисунку показано дві точки характеристички скорегованої розімкнутої системи $W^*(j\omega)$, що відповідають частотам ω_1 і ω_2 , знідлені на основі побудови векторів $W^*(\omega_1)$ та $W^*(\omega_2)$.

Встановивши певну величину α , дістанемо характеристику $W^*(j\omega)$ (показану на рисунку штрихом), яка не охоплюватиме точку $C(-1, j0)$ відповідатиме стійкій замкнутій системі.

За допомогою коректувальних ланок можна не тільки перетворити структурно-вестійку систему на структурно-стійку, а й зробити її стійкою, а також змінювати величину запасу стійкості та інші динамічні характеристики САР.

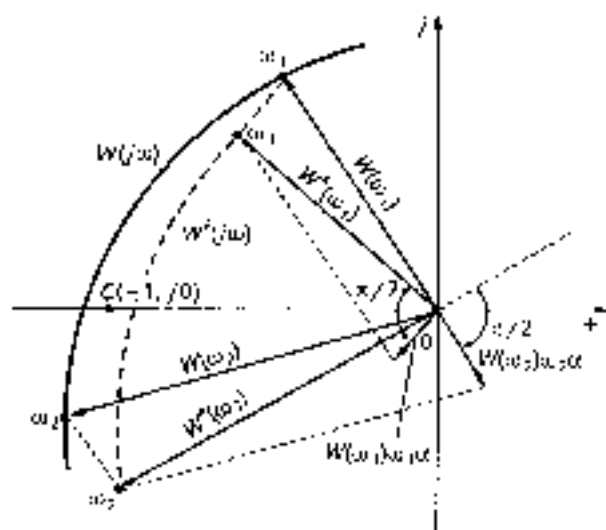


Рис. 4.30

Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте поняття стійкості САК «в цілому», «в великому» і «в малому».
2. Викладіть суть теореми Ляпунова і методу аналізу стійкості за рунками першого наближення.
3. Наведіть формули для доведення впливу вигляду коренів на стійкість САК.
4. Визначте поняття запасу та меж стійкості.
5. Сформулюйте критерій стійкості Рауса—Гурвіца.
6. Що таке параметри Вушнеградського і який вплив на стійкість системи?
7. Викладіть методику побудови ієє дографу Михайлова.
8. Як визначити запас стійкості за допомогою критерію Михайлова?
9. Сформулюйте особливості методу D -розбиття і викладіть методику аналізу стійкості за його допомогою.
10. Сформулюйте загальну умову стійкості за методом Найквіста.
11. За якої умови буде стійкою замкнута система, якщо розімкнута система нестійка?
12. За якими ознаками можна визначити структурно-нестійку систему?
13. Що таке коректувальні ланки, їх основні види?
14. Нарисуйте схему введення послідовних і паралельних коректувальних ланок у систему.
15. Нарисуйте часову характеристику інтегруючої ланки, окіпленої паралельною коректувальною ланкою.
16. За яких коренів характеристичного рівняння замкнута САК буде на межі стійкості?
17. У чому полягає сенс критерію Ляпунова—Шіллара?
18. Сформулюйте умови знаходження САК на межі стійкості, які випливають із наслідку критерію Михайлова.
19. Як переваги мають логарифмічні частотні характеристики?

5.1

Загальні відомості про якість САК

Розв'язання завдання автоматичного керування об'єктом залежить не тільки від стійкості САК, а й від інших показників, які в загальному випадку часто об'єднують єдиним поняттям — *якість системи керування*, що характерно лише для стійких систем. Якість системи оцінюється багатьма показниками, серед яких основними є: характер (вигляд) перехідного процесу, тривалість перехідного процесу, перерегулювання, точність (похибка) системи в установившому режимі.

За характером перехідні процеси пов'язують на монотонні, коливаючі й аперіодичні з перерегулюванням.

Монотонними називають перехідні процеси, при яких відхилення регульованої величини x від установившого значення x_u плавно зменщується, без зміни знака похідної $\frac{dx}{dt}$ (рис. 5.1, а, криві 1 і 2). Окремим випадком монотонного процесу є аперіодичний.

Коліваельними називають перехідні процеси, при яких у системі існують гармонічні коливання з деяким періодом T і амплітудою, що поступово зменшується (рис. 5.1, б).

Аперіодичними процесами з перерегулюванням називають перехідні процеси, за яких керувана величина набуває установившого значення після одного, двох або більше коливань з різними періодами (неперіодичні процеси) за наявності перерегулювання (рис. 5.1, а, криві 1 і 2).

Під *перерегулюванням* розуміють максимальне відхилення керуваної величини в бік, протилежний початковому відхиленню від установившого значення.

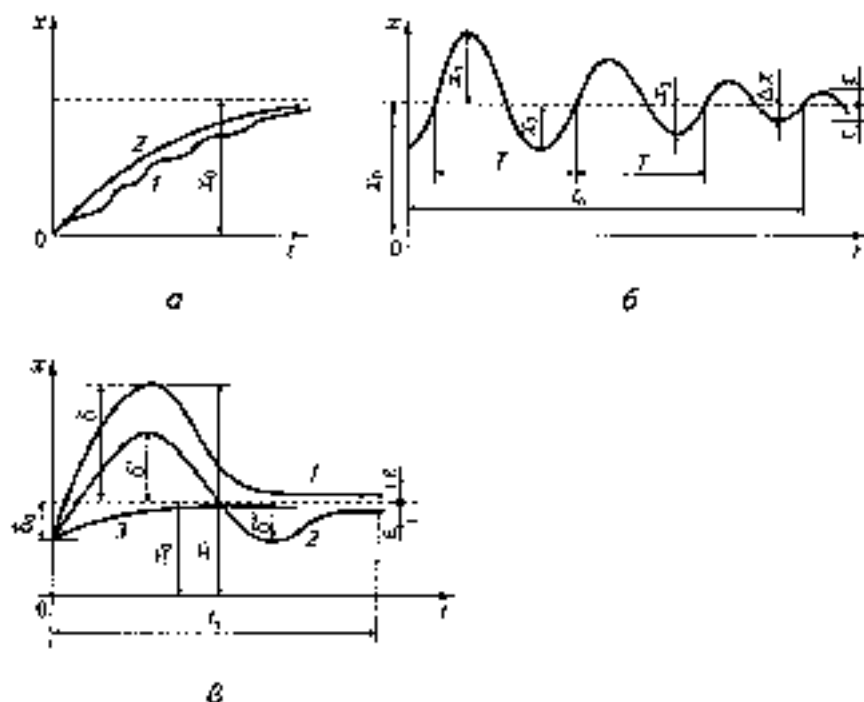


Рис. 5.1

За початкового відхилення δ_0 величина перерегулювання визначається як $\frac{\lambda_{\text{пер}} - \lambda_{\text{уст}}}{\lambda_{\text{уст}}} = \frac{\delta}{\lambda}$ (рис. 5.1, а, крива 1) і δ/λ_0 (крива 2). При

тому слід мати на увазі, що кривий 2 відповідають для екстремуми відхилень $\delta' > \delta''$ від заданого значення. Якщо в процесі регулювання значення регульованої величини знаходиться лише в одній зоні (зверху або знизу) від усталеного значення, то перерегулювання відсутнє (крива 3) і перехідний процес такого вигляду вважають монотонним.

Тривалість (підійомна) практично визначається часом t_{δ} , за який відхилення Δ від заданого значення (рис. 5.1, б) стане меншим за деяку достатню малу величину ϵ (теоретично тривалість перехідного процесу $t_{\delta} = \infty$). Визначена ϵ вибирається вимогами до точності конкретної системи (процесу) і може дорівнювати від частки промента до 2...5 % і більше для «грубих» систем.

Відхилення (похибка) Δx вже виникає після закінчення перехідного процесу, налізують *статистично помилковий (похибковий)*, а відхилення деякого значення регульованої величини у відповідний момент часу перехідного процесу від не початку $\Delta x(t)$ — *динамічний похибковий $\Delta x(t)$* .

Співвідношення перехідного процесу φ є показником, що характеризує коливальні процеси. Її визначають за формулою

$$\varphi(\%) = 100 \left[1 - \frac{x_2}{x_1} \right].$$

Чим більше значення φ , тим швидше затухає перехідний процес.

Іноді для оцінки коливальних процесів використовують показник якості, який називають *логарифмічним декрементом* затухання. Він визначається як натуральний логарифм відношення амплітуд одного знака двох послідовних періодів (рис. 5.1, б).

$$d = \ln \frac{x_1}{x_2}.$$

Чим більшою є величина d , тим швидше затухає перехідний процес.

Оскільки межею стійкості в площині коренів є уявна вісь, на якій лежать нульові й суто уявні корені, то чим ближче до уявної осі знаходяться корені, тим менший запас стійкості має система. Для оцінки величини запasu стійкості використовують показник — *співвідношення стійкості*, який визначається відстанню найближчого до уявної осі дійсного кореня або абсолютним значенням дійсної складової комплексного кореня.

Співвідношення стійкості — показник, який визначається частотою власних коливань системи, що залежить від конструктивних особливостей об'єкта і системи керування в цілому. Як зазначалося раніше, наявність комплексних коренів у характеристичному рівнянні замкнутої системи зумовлює наявність складової коливання характеру в розв'язку рівняння впливу

$$e^{st} D(x) (p_1 + p_2),$$

де α , β — відповідно дійсна і уявна складові пари комплексних коренів $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$.

Період коливань $T = \frac{2\pi}{\beta}$, число коливань за секунду $\nu = \beta/2\pi$.

Відношення уявної частини комплексного кореня до його дійсної частини є показником *коливальності переходного процесу*. Чим більша величина ρ , тим більше коливань в одиницю часу матиме дана система.

Ширина смуги пропускання — це показник якості САК у разі використання частотних характеристик, який визначається інтервалом частот, за яких амплітуда синусоїдального вхідного сигналу розімкнutoї системи становить менше 30 %.

На логарифмічних амплітудно-частотних характеристиках смуга пропускання частот визначається часом $\omega_{\text{гп}}$, для яких амплітуда близька до 3 дБ. Ширина смуги пропускання частот характеризує динамічність системи і її фільтруючі властивості.

Якість системи автоматичного керування насамперед визначається технологічними особливостями об'єкта. Так, у різних підйомних машинах, прокатних станах та в інших установках значної потужності, які мають великі моменти інерції, необхідною умовою є забезпечення переходного процесу, близького до аperiodичного з неперерегулюванням не більш як 2...3 %. Виконання цієї вимоги призводить до збільшення приваговості переходного процесу $\tau_{\text{пр}}$.

Водночас у малоінерційних системах (обчислювальних, слідкуючих), де пріоритетним є вимога швидкодії системи (при певній точності), бажано мати швидкозатухаючий коливальний процес.

5.2

Дослідження якості на основі рівняння незбурених коливань

Дослідження якості САК може виконуватися на основі розв'язання рівнянь замкнутої системи, а також за допомогою наближених методів оцінки якості.

Найзастосовнішим методом є дослідження якості на основі розв'язання рівняння замкнутої системи. Як приклад розглянемо рівняння системи стабілізації

$$[P(p) + Q(p)]x = P(p)St(p)F(p),$$

яке після відповідних перетворень можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x &= \\ &= b_n \frac{d^n F}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} F}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dF}{dt} + b_0 F. \end{aligned}$$

Дане рівняння є диференціальним лінійним неоднорідним рівнянням n -го порядку. Згідно з принципом суперпозиції його розв'язок можна подати як алгебричну суму загального $x_{\text{заг}}$ і часткового $x_{\text{ч}}$ розв'язків:

$$x = x_{\text{заг}} + x_{\text{ч}}.$$

Загальний розв'язок можна отримати на основі рівняння вільного руху

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0,$$

звідки

$$x_{\text{заг}} = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t},$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ — сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов, $p_1, \dots, p_n$ — корені характеристичного рівняння

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0.$$

Вираз $x_{\text{заг}}$ залежно від коренів $p_1, \dots, p_n$ було досліджено раніше при вивченні стійкості систем.

Частковий розв'язок $x_{\text{ч}}$ знаходять при умові $t \rightarrow \infty$, коли вільне рівняння набуває вигляду

$$a_n x_{\text{ч}} = b_n F,$$

звідки

$$x_{\text{ч}} = \frac{b_n}{a_n} F.$$

Побудована, як приклад, характеристика $x = f(t)$ (рис. 5.2) є кривою процесу регулювання в замкнутій системі, яка визначається з рівності

$$x = x_{\text{заг}} + x_{\text{ч}} = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t} + \frac{b_n}{a_n} F.$$

З викладеного вище можна зробити висновок, що триалість перехідного процесу $x_{\text{пер}}$ та інші показники якості визначаються загальним розв'язком вихідного рівняння $x_{\text{вир}}$ і залежать тільки від коренів характеристичного рівняння. Частковий розв'язок впливає лише на загальне значення регульованої величини і на величину помилок (похибок) системи. Тому при дослідженні якості САК на основі рівняння замкнутої системи часто обмежуються тільки аналізом величини $x_{\text{вир}}$ — впливають поведінку системи залежно від вигляду коренів характеристичного рівняння.

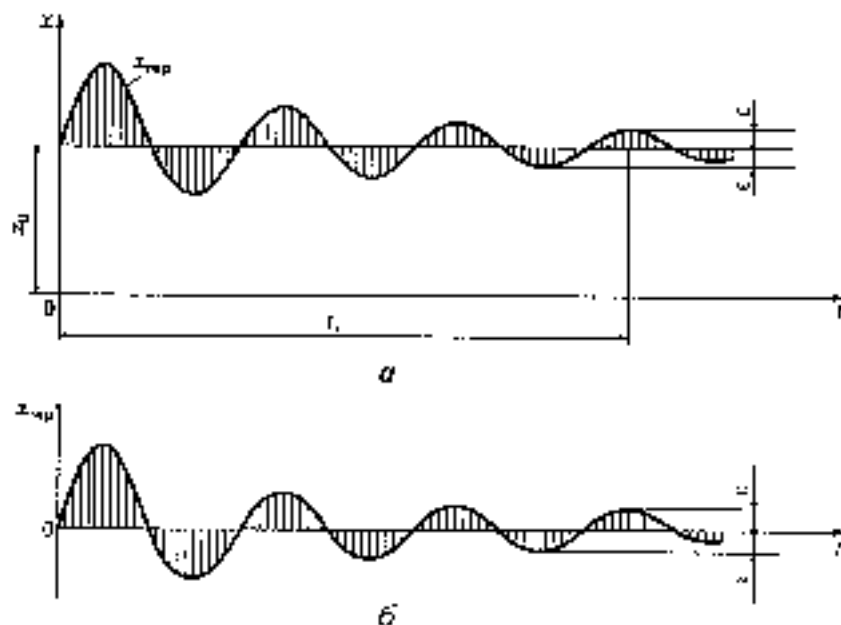


Рис. 5.2

Аналіз якості САК на основі розв'язання рівняння незбурених коливань. Як приклад розглянемо систему другого порядку, рівняння незбурених коливань якої

$$a_1 \frac{d^2 x_{\text{вир}}}{dt^2} + a_1 \frac{dx_{\text{вир}}}{dt} + a_2 x_{\text{вир}} = 0. \quad (5.1)$$

В операторній формі цю задачу записується так

$$(\sigma_1 p^2 + a_1 p + a_2) x_{\text{нер}} = 0$$

Розв'язок цього рівняння

$$x_{\text{нер}} = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}, \quad (5.2)$$

де $p_1 < 0$, $p_2 < 0$ — корені характеристичного рівняння

$$\sigma_1 p^2 + a_1 p + a_2 = 0 \quad (5.3)$$

C_1 , C_2 — сталі інтегрування, які визначаються початковими умовами.

Нехай початкові умови (при $t = 0$) задані:

$$x_{\text{нер}}(0) = x_0; \quad x'_{\text{нер}}(0) = x'_{0\text{нер}}.$$

Знайдемо їх значення з рівняння (5.2):

$$\begin{cases} x_{\text{нер}}(0) = C_1 + C_2; \\ x'_{\text{нер}}(0) = p_1 C_1 + p_2 C_2. \end{cases} \quad (5.4)$$

Із системи рівнянь (5.4)

$$C_1 = x_{\text{нер}}(0) - C_2.$$

Підставляючи дане значення у вираз $x'_{\text{нер}}(0)$, дістаємо

$$x'_{\text{нер}}(0) = (x_{\text{нер}}(0) - C_2) p_1 + p_2 C_2,$$

звідки

$$x'_{\text{нер}}(0) - x_{\text{нер}}(0) p_1 = C_2 (p_2 - p_1),$$

або

$$C_2 = \frac{x'_{\text{нер}}(0) - x_{\text{нер}}(0) p_1}{p_2 - p_1} = \frac{x_{\text{нер}}(0) p_1 - x'_{\text{нер}}(0)}{p_1 - p_2};$$

$$C_1 = \frac{x_{\text{нер}}(0) (p_2 - p_1) - x'_{\text{нер}}(0) + x_{\text{нер}}(0) p_1}{p_2 - p_1} = \frac{x'_{\text{нер}}(0) - x_{\text{нер}}(0) p_2}{p_1 - p_2}.$$

Підставляючи знайдені значення C_1 і C_2 в рівняння не збурених коливань, отримаємо

$$x_{\text{нер}} = \frac{x'_{\text{нер}}(0) - x_{\text{нер}}(0) p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{x_{\text{нер}}(0) p_1 - x'_{\text{нер}}(0)}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} \quad (5.5)$$

Аналіз цього виразу дає змогу зробити принциповий висновок про те, що *якість лійнійних САР залежить не тільки від вигляду коренів характеристичного рівняння, а й від початкових умов*. (При цьому треба пам'ятати, що стійкість лійнійних САР залежить лише від коренів характеристичного рівняння, які своєю чергою залежать від значень параметрів ланок системи.)

Першу складову $x_{\text{пер}}$ з рівняння (5.5) позначимо через A , а другу — B . Проаналізуємо вирази A і B при різних коренях p_1, p_2 і різних початкових умовах, побудувавши відповідно характеристики $A(t), B(t)$. При цьому слід мати на увазі, що корені характеристичного рівняння матимуть вигляд

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}, \quad p_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0},$$

звідки випливає, що за умови $a_1^2 > 4a_0 a_2$ корені p_1, p_2 дійсні й різні, а за $a_1^2 < 4a_0 a_2$ — корені комплексні.

Розглянемо окремі можливі випадки у разі дійсних від'ємних коренів $p_1 < 0; p_2 < 0$.

Нехай початкові умови будуть довільними: $x_{\text{пер}}(0) > 0; x'_{\text{пер}}(0) > 0$. Оскільки $|p_2| > |p_1|$, то чисельник і знаменник у виразі A більше нуля, а у виразі B чисельник менше нуля, а знаменник — більше нуля. Початкові значення $A(0); B(0) > 0$.

Відповідні залежності $A(t), B(t)$ показано на рис. 5.3, а, а результуюча величина $x_{\text{пер}} = A(t) + B(t)$ — на рис. 5.3, б. Із побудованого графіка видно, що $x_{\text{пер,пер}} = (a + b) > x(0)$. Отже, у цьому випадку в системі виникає перерегулювання.

Знайдемо екстремум функції $x_{\text{пер}}(t)$ з умови

$$\frac{dx_{\text{пер}}}{dt} = \frac{x'_{\text{пер}}(0) - x_{\text{пер}}(0)p_2}{p_1 - p_2} p_1 e^{p_1 t} + \frac{x_{\text{пер}}(0)p_1 - x'_{\text{пер}}(0)}{p_1 - p_2} p_2 e^{p_2 t} = 0,$$

звідки

$$[x'_{\text{пер}}(0) - x_{\text{пер}}(0)p_2] p_1 e^{p_1 t} + [x_{\text{пер}}(0)p_1 - x'_{\text{пер}}(0)] p_2 e^{p_2 t} = 0.$$

Розділивши обидві частини рівняння на $|x_{\text{пер}}(0)p_1 - x'_{\text{пер}}(0)| p_2 e^{p_2 t}$, отримаємо

$$\frac{[x'_{\text{пер}}(0) - x_{\text{пер}}(0)p_2] p_1}{[x_{\text{пер}}(0)p_1 - x'_{\text{пер}}(0)] p_2} e^{(p_1 - p_2)t} - 1 = 0$$

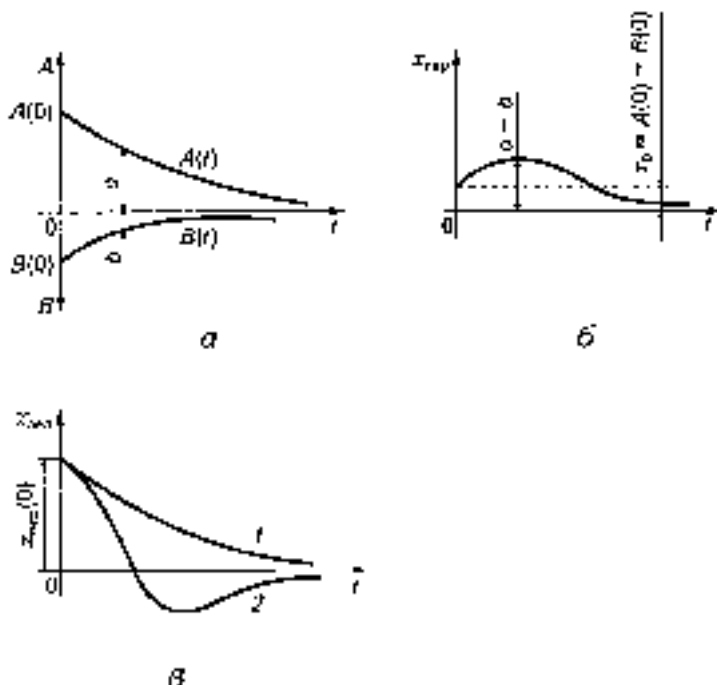


Рис. 5.3

або

$$e^{-p_1 t_{кр} - p_2 t_{кр}} = \frac{[x_{кр}(0)p_1 - x'_{кр}(0)]p_2}{[x_{кр}(0)p_2 - x'_{кр}(0)]p_1}.$$

Зашифрувавши це рівняння, дістанемо значення часу $t_{кр}$, яке відповідає екстремуму функції $x_{кр}(t)$:

$$t_{кр} = \ln \frac{p_2 [x_{кр}(0)p_1 - x'_{кр}(0)]}{p_1 [x_{кр}(0)p_2 - x'_{кр}(0)]} \frac{1}{p_1 - p_2}.$$

Підставивши відповідні числові значення $t_{кр}$ у вихідний вираз $x_{кр}(t)$, знайдемо його екстремальне значення $x_{кр,кр}(t_{кр})$.

Нехай $x_{кр}(0) > 0$, а $x'_{кр}(0) = 0$. З аналізу величин $A(t)$ і $B(t)$ випливає, що в цьому разі $A(t) > 0$; $B(t) < 0$. Оскільки $|p_2| > |p_1|$, то згадані

ня складової $x'_{\text{пер}}(0)$ більше впливає на величину $B(t)$, ніж на $A(t)$. Тому перехідний процес може не мати перерегулювання (рис. 5.3, а, крива 1).

Нехай $x_{\text{пер}}(0) > 0$ і $x'_{\text{пер}}(0) < 0$. Похідна від початкових умов із від'ємним знаком різною мірою впливає на вирази $A(t)$ і $B(t)$. У цьому разі можливе перерегулювання та зміщення перехідного процесу в лону від'ємних значень $x_{\text{пер}}(t)$ (рис. 5.3, а, крива 2).

Розглянемо випадок комплексних коренів з від'ємними дійсними частинами $p_1 = -\alpha + j\beta$ і $p_2 = -\alpha - j\beta$. При цьому

$$e^{p_1 t} = e^{-\alpha t} e^{j\beta t} = e^{-\alpha t} (\cos \beta t + j \sin \beta t);$$

$$e^{p_2 t} = e^{-\alpha t} (\cos \beta t - j \sin \beta t).$$

Підставивши знайдені значення у вираз $x_{\text{пер}}(t)$, дістанемо

$$\begin{aligned} x_{\text{пер}}(t) = e^{-\alpha t} & \left\{ \frac{x'_{\text{пер}}(0) - x_{\text{пер}}(0)(-\alpha - j\beta)}{2j\beta} (\cos \beta t + j \sin \beta t) + \right. \\ & + \frac{x_{\text{пер}}(0)(-\alpha - j\beta) - x'_{\text{пер}}(0)}{2j\beta} (\cos \beta t - j \sin \beta t) \Bigg\} = \\ = e^{-\alpha t} & \left\{ \left[\frac{x'_{\text{пер}}(0) + \alpha x_{\text{пер}}(0)}{\beta} \sin \beta t + x_{\text{пер}}(0) \cos \beta t \right] \right\} \end{aligned}$$

або

$$x_{\text{пер}}(t) = x(0)e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0), \quad (5.6)$$

Перехідний процес є коливанням із затухаючою амплітудою, залежною від початкових умов: початкова фаза $\varphi_0 = \arctg \frac{\beta}{x'_{\text{пер}}(0) + \alpha x_{\text{пер}}(0)}$, амплітуда $A(0) = x(0)e^{-\alpha t}$.

Проведений аналіз і знайдені вирази $x_{\text{пер}}(t)$ показують, що за виглядом коренів і початковими умовами можна відповісти на всі основні питання про якість САР. Відоміше викладається методика навіть для простого випадку — системи регулювання другого порядку — потребує аналізу досить складних виразів. Ці труднощі значно зростають за високих степенів рівняння, особливо у разі дослідження якості в умовах зміни параметрів ланок системи (зміна лише одного параметра системи призводить до змін всіх її коренів характеристичного рівняння). У зв'язку з цим у ТАК волею поширення набули

різні наближені методи, які дають змогу мати відповіді на окремі питання про якість без розв'язання рівняння системи.

5.3

Наближені методи оцінки якості

Існують три основні види наближених методів оцінки якості: кореневі, інтегральні й частотні.

Кореневі методи оцінки якості. Крім розглянутого раніше методу аналізу якості за кривою незбурених коливань, який можна віднести до даного виду методів, до корневих належать такі методи оцінки якості за розміщенням коренів на комплексній площині: за допомогою діаграм змін параметрів; за полюсами і нулями передаточної функції; методів корневих годографів, стандартних діаграм, процесів і коефіцієнтів.

Розглянемо, як приклади, окремі найхарактерніші методи.

Оцінка якості за розміщенням коренів на комплексній площині. Одним із методів цієї групи є метод оцінки якості за найменшим коренем — коренем, найближчим до вертикальної осі комплексної площини коренів.

Якщо найменший дійсний корінь системи $p_1 = -\alpha_1$ (рис. 5.4), то аперіодичний ступінь стійкості системи дорівнює h_1 .

Якщо найближче до вертикальної осі розмістяться пара комплексних коренів

$$p_{2,3} = -\alpha \pm j\beta,$$

то ступінь стійкості називають коливативним і позначають $h = \alpha$. Коливати-

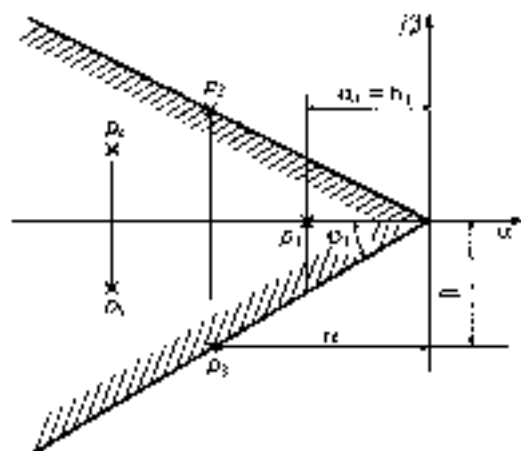


Рис 5.4

ність системи в цьому разі $\mu = \operatorname{tg} \varphi = \frac{|\operatorname{Im} p|}{\alpha}$. Як значалося раніше, за наявності комплексних коренів у розв'язку рівняння незбурених коливань системи з'являється складової вигляду

$$C_2 e^{-\alpha t} \sin (\beta t + \gamma)$$

Період коливань у цьому разі $T = 2\pi/\beta$. Амплітуда синусових координат $C_2 e^{-\alpha t}$ має з'являтися фізично відносно початку координат на куту γ .

Зда час, що відповідає одному періоду коливань T , навіз значення амплітуди обчислюється за формулою

$$C_2 e^{-\alpha(t+T)} = C_2 e^{-\alpha t} e^{-\alpha T}.$$

Звідси випливає, що чим більша величина кількості μ , тим доніше загасатиме перехідний процес. При цьому ступінь стійкості ($\mu = \alpha$) зменшуватиметься.

Так, за періодичної стійкості складався перехідного процесу, яка підпорядковується найменшому дійсному кореню p_1 , довший $C_1 e^{-\alpha t}$. Тривалість затухання перехідного процесу до величини, що становить 5 % від початкового значення $x_0 = C$, яке умовно виражаємо таким, що ознаменується закінченням перехідного процесу в даній системі, можна вибрати з виразу

$$0.05 x_0 = x_0 e^{-\alpha t_0},$$

звідки $\ln 0.05 = -\alpha t_0$, або $t_0 = \frac{\ln 0.05}{-\alpha} = 3/\mu$.

Отже, тривалість перехідного процесу обернено пропорційна ступеню стійкості. Звідси можна зробити висновок, що тривалість перехідного процесу прямо пропорційна ступеню затухання коливань того перехідного процесу. Для якого $\mu = \beta/\alpha$.

Якщо ставляться обмеження щодо тривалості (t_0) або коливальності (μ), то це приведе до необхідності розміщення всіх інших коренів у певній зоні, обмеженій величиною h і кутом $\varphi_0 = \alpha \operatorname{tg} \mu$. При цьому всі інші складові (рис. 5.5, а) кривої перехідного процесу $x_2(t) = C_2 e^{-\alpha t}$ (або $x_2(t) = C_{1,2} e^{-\alpha t} e^{\pm j\beta t}$), що визначаються коренями, які лежать у межах даної зони, затухатимуть швидше. Показати на рисунку криві перехідних процесів відповідують від'ємним дійсним кореням

$$|h| < |p_1| < |p_2| < |p_3|.$$

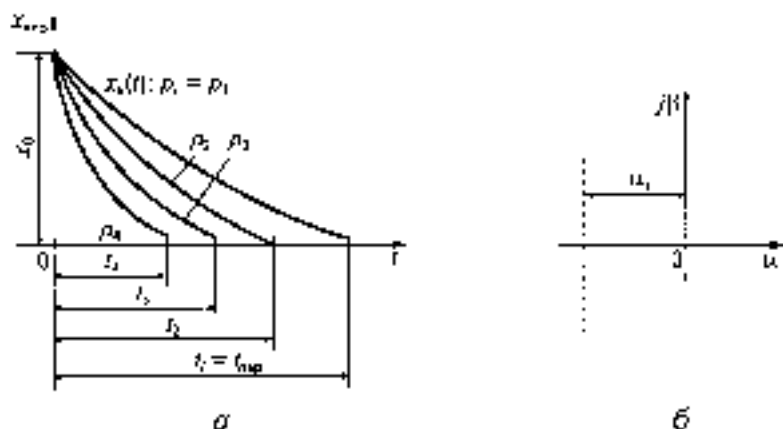


Рис. 5.5

Отже, чим менший корінь, тим довше затухає перехідний процес. Тому в деяких випадках можна задовольнитись дослідженнями за мінімальним коренем p_1 , якому відповідає найдовший процес, що визначає тривалість перехідного процесу в усій системі ($t_1 = t_{max}$).

У зв'язку з викладеним виникає задача знаходження мінімального кореня. Для її розв'язання у 1941 р. І. М. Вознесенський запропонував такий метод.

1. Знаходять мінімальне значення кореня за умови, що за час t_0 величина відхилення регульованої величини x від її початкового значення x_0 дорівнюватиме $m\%$.

Цю вимогу можна виконати, якщо найменша дійсна частина кореня характеристичного рівняння замкнутої системи не буде меншою за деяку величину α .

Оскільки всі інші складові перехідного процесу вигляду $C_k e^{\lambda_k t}$ затухатимуть швидше, то рівняння системи зводиться до рівняння першого порядку

$$\dot{x} = x_0 e^{\alpha t}.$$

Згідно з поставленою умовою $x = x_0 \cdot 0,01 m$, тому можна записати

$$x_0 \cdot 0,01 m = x_0 e^{\alpha t},$$

звідси дістанемо формулу мінімального кореня

$$\alpha_1 = \frac{\ln 0,01 \pi}{\tau}. \quad (5.7)$$

2. Перевіримо «мінімальність» знайденого за формулою (5.7) кореня α_1 в умовах даної системи.

Для цього вертикальну вісь у комплексній площині коренів перемістимо вліво на відстань α_1 (рис. 5.5, б). У новій системі координат (після переміщення вертикальної осі) характеристичне рівняння замкнутої системи матиме вигляд

$$a_n(p - \alpha_1)^n + a_{n-1}(p - \alpha_1)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(p - \alpha_1) + a_n = 0.$$

(У дане рівняння підставляють абсолютне значення величини мінімального кореня α_1 .) Після розкриття дужок і зведення подібних членів дістанемо нове характеристичне рівняння того самого порядку, але з іншими значеннями коефіцієнтів

$$a'_n p^n + a'_{n-1} p^{n-1} + \dots + a'_{n-1} p + a'_n = 0. \quad (5.8)$$

3. Якщо нова система з характеристичним рівнянням (5.8) буде нестійкою, то це означає, що визначений за заданими умовами якості системи мінімальний корінь в дійсності не є мінімальним. Тому в даній системі неможливо виконати поставлену умову ($\sigma_{\min}$ до 5%). В цьому разі можливі такі варіанти нестійких дій або наголосити з тим, що поставлену умову виконати неможливо, або змінити її відносно τ , і π і знайти відповідне нове значення мінімального кореня α_1 , і перевірити його мінімальність. На основі даного методу можна також визначити значення настроювальних параметрів системи для знаходження потрібних показників якості.

□ **Приклад 5.1.** Дослідити якість замкнутої системи, характеристичне рівняння якої

$$p^4 + 2p^3 + 11p^2 - 15p + 5(1 + \xi) = 0.$$

за методом мінімального кореня знайти коефіцієнт відсілення розімкнутої системи k , при якому відхилення регульованої величини від заданого значення за час $\tau = 3,5$ с не перевищує 0,5 % ($m = 5$ %).

Розв'язання. Для виконання поставленої умови знайдемо необхідне абсолютне значення мінімального кореня

$$\alpha_1 = \frac{\ln 0,01 \pi}{\tau} = \frac{\ln 0,05}{1,5} = \frac{\ln 5 - 2 \ln 10}{3,5} = \frac{1,6 - 4,6}{3,5} = -0,85$$

Ново характеристичне рівняння після переміщення вертикальної осі дліва на величину $|\alpha| = 0,85$ матиме вигляд

$$(p - 0,85)^4 + 2(p - 0,85)^3 + 11(p - 0,85)^2 + 15(p - 0,85) + 5(1 + k) = 0$$

або після перетворень

$$p^4 + 1,56p^3 + 10,2p^2 + 1,84p - 0,26 + 5k = 0.$$

Наявність від'ємних коефіцієнтів згідно з критерієм Гурвіца означає нестійкість системи, що своєю чергою зумовлює неможливість виконання поставлених умов за будь-якого значення k .

Дослідимо дану систему за інших умов стосовно якості САК. Нехай допустима тривалість перехідного процесу $t = 20$ с при $m = 5\%$.

Обчислимо значення мінімального кореня

$$\alpha_1 = \frac{\ln 0,05}{20} = -\frac{3,0}{20} = -0,15.$$

Характеристичне рівняння відповідної системи, яка враховує перенос вертикальної осі вліво на відстань $h = 0,15$, матиме вигляд

$$(p - 0,15)^4 + 2(p - 0,15)^3 + 11(p - 0,15)^2 + 15(p - 0,15) + 5(1 + k) = 0$$

Після перетворень воно запишеться так:

$$p^4 + 1,4p^3 + 10,24p^2 + 11,8p + 3 + 5k = 0.$$

Для перевірки стійкості системи використовуємо критерій Гурвіца. При $n = 4$ необхідна і достатня умова (крім додатного знака коефіцієнтів, що враховується в даному разі $\Delta_1 > 0$).

Знайдемо головний визначник системи

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1,4 & 11,8 & 0 & 0 \\ 1 & 10,24 & 3 + 5k & 0 \\ 0 & 1,4 & 11,8 & 0 \\ 0 & 1,0 & 10,24 & 3 + 5k \end{vmatrix}.$$

згідки умови стійкості

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1,4 & 11,8 & 0 \\ 1,0 & 10,24 & 3 + 5k \\ 0 & 1,4 & 11,8 \end{vmatrix} = 1,4 \cdot 10,24 \cdot 11,8 - 1,4^2(3 + 5k) > 0$$

або $24,2 - 9,7k > 0$, або $k < 2,5$.

Цей результат означає, що при $k < 2,5$ за час $t = 20$ с можна очекати відхилення регульованої величини в САК, яке дорівнює 5 % від початкового значення.

Аналіз можна за допомогою діаграм зон параметрів. Характерним прикладом дієї групи методів може бути розширена діаграма Вайнштейнського (рис. 5.6), яка базується на основі розглянутої раніше діаграми (див. рис. 4.51).

На розширеній діаграмі виділяються чотири зони: I; II; III; IV, які відповідають різним виглядам коренів і їхньому розміщенню відносно вертикальної осі в комплексній площині коренів.

Зона IV, як відомо, задовольняє умову $XU < 1$. Її межею є рівнобічна гіпербола CD , рівняння якої $XU = 1$, де X, U — параметри Вайнштейнського. Цій зоні, яка є зоною постійного стану системи, відповідає наявність коренів з додатним дійсним частинною (або дійсних додатних) в характеристичному рівнянні замкнутої системи.

Зони I, II, III у площині $X-U$ є зонами стійкого стану системи, але їм відповідають різні види й розміщення коренів і, як результат, різний вигляд перехідних процесів.

Особливості розміщення коренів і вигляд перехідного процесу, що відповідає кожній зоні, показано на рис. 5.7. Розміщення в комплексній площині коренів наведено на рис. 5.7, а, б, в, а характеристики відповідних перехідних процесів — на рис. 5.7, а₁, б₁, в₁.

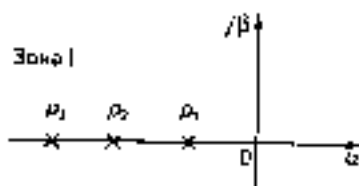
Можливі варіанти розміщення коренів, що відповідають нестійкій зоні IV, показано на рис. 5.7, г, б, в, г.

Зона I, межа якої KMB (див. рис. 5.6), є зоною аперіодичних процесів. Їй відповідають від'ємні дійсні корені характеристичного рівняння системи третього порядку p_1, p_2, p_3 (рис. 5.7, а, а₁). Умова знаходження коренів у даній зоні

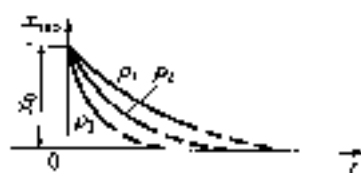
$$4(X^3 + U^3) - 18XU - X^2U^2 + 27 < 0,$$

де $X = \frac{C_1}{\sqrt[3]{C_2}}$; $U = \frac{C_2}{\sqrt[3]{C_1}}$; C_1, C_2 — коефіцієнти перетвореного характе-

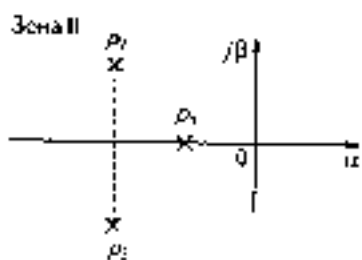
ристичного рівняння $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$. Після ділення всіх його коефіцієнтів на a_0 воно матиме вигляд



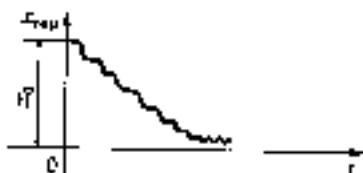
a



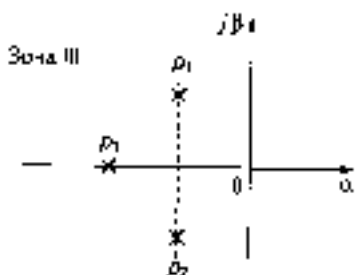
a₁



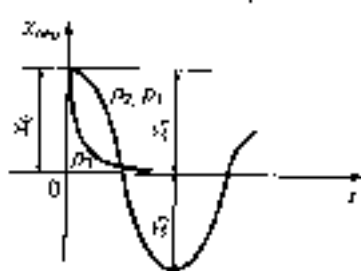
б



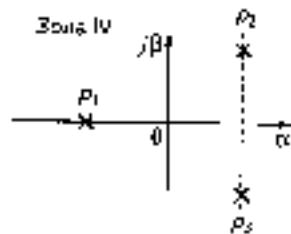
б₁



в



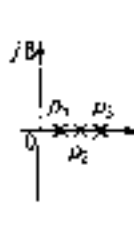
в₁



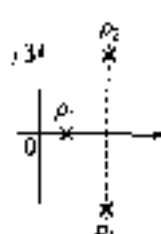
г



д



е



е

Рис. 5.7

$$p^3 + C_1 p^2 + C_2 p + C_3 = 0.$$

Зона II, межа якої KMA , відкриває зону количастих процесів (рис. 5.7, б, б₁). Близьким до вертикальної осі є дійсний корінь p_1 .

Рівняння межі зони має вигляд

$$7X^2 - 9XY + 27 = 0.$$

Розміщення коренів і вигляд перехідного процесу в зоні III, межа якої DMB , показано на рис. 5.7, в, в₁. Оскільки дійсний корінь p , розділюється далі від вертикальної осі, характер перехідного процесу коливательний.

Умова знаходження коренів у зоні III

$$4(X^3 + Y^3) - 18XY - X^2Y^2 + 27 > 0.$$

Ступінь затухання перехідного процесу

$$\psi(\%) = 100 \left(1 - \frac{\pi_1}{\lambda_1} \right).$$

Розширена діаграма Виноградовського в зоні III може бути доповнена кривими однакового ступеня затухання перехідного процесу (1...3); при цьому $\psi_1 > \psi_2 > \psi_3$.

Для задовільної якості перехідного процесу вважають, що ψ має бути не менше 80 %. Це становить умови $\tau_1/\lambda_1 \leq 0,2$.

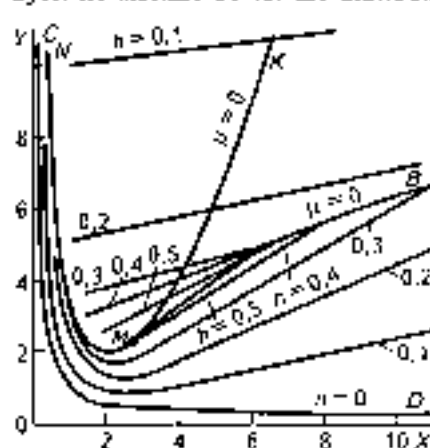


Рис. 5.8

Для переходу від параметрів Виноградовського до параметрів відповідних ланок системи потрібні досить громіздкі розрахунки, для спрощення яких було побудовано спеціальні номограми.

Дяки дослідники діаграму Виноградовського доповнили кривими однакового ступеня стійкості h (рис. 5.8) і однакового ступеня коливательності μ (рис. 5.9): $\mu = 0$ відповідає межі «апериодичної» області, а $\mu = \infty$ межі стійкості.

Як видно із діаграм, найбільший ступінь стійкості забезпечується в робочій точці M , для якої

$h = 1$ Проте за кратності кореня швидкодія системи може бути значно меншою, ніж при трохи менших ступенях стійкості.

З погляду швидкодії системи рекомендовано ступінь стійкості обмежувати зверху і знизу лініями $h = 0,5$.

У технічній літературі існують також нормовані діаграми для систем вищих порядків.

Якщо система вищого порядку з достатньою точністю зводиться до системи з $n = 3$, то можна одержати наближені результати на основі діаграм Вайнстралського.

Метод оцінки якості за налаштуванням і графіком передаточної функції.

Даний метод також належить до кореневих.

Розглянемо передаточну функцію замкнутої системи за збуренням

$$W^f(p) = \frac{\Delta x}{\Delta f} = \frac{W_z^f(p)}{1 + W(p)},$$

де Δx , Δf — відповідно відхилення регульованої величини і збурення; $W_z^f(p)$ — передаточна функція об'єкта за збуренням; $W(p)$ — передаточна функція розімкнутої системи.

Звідси дістаємо

$$\Delta x = \frac{W(p)}{1 + W(p)} \Delta f.$$

Враховуючи, що відхилення $\Delta x = x - x_0$, виписує перехідну складову загального розв'язку, дістаємо

$$x_{пер}(t) = \frac{W_z^f(p)}{1 + W(p)} \Delta f$$

Як відомо, характеристичне рівняння замкнутої системи має вигляд $1 + W(p) = 0$, тому знаменник передаточної функції можна подати як n співмножників.

$$a_n(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n),$$

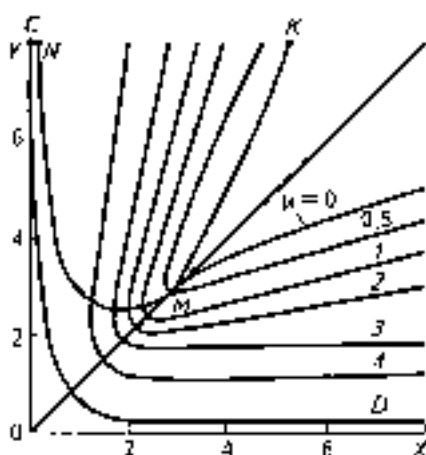


Рис. 5.9

де $p_1, \dots, p_n$ — корені характеристичного рівняння замкнутої системи, які називають *коренями передаточної функції*.

Чисельник передаточної функції аналогічно можна подати у вигляді m спільножителів ($m < n$) виразу $kN(p)$, де k — коефіцієнт передачі об'єкта за збуренням, а $N(p)$ — многочлен вигляду

$$N(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_0 = b_n (p - p'_1)(p - p'_2) \dots (p - p'_m),$$

де p'_1, p'_2, p'_3 — корені чисельника передаточної функції, які називають *нулями передаточної функції*.

Тоді згідно з викладеним

$$x_{\text{вх}}(t) = \frac{k b_0 (p - p'_1)(p - p'_2) \dots (p - p'_m) \Delta f}{a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} \Delta f.$$

Звідси випливає, що амплітуда перехідного процесу залежить від розміщення полюсів і нулів передаточної функції. Так, в ідеальному випадку при $p = p'_1, p_1 = p'_2, \dots, p_n = p'_m$ (у разі $n = m$)

$$x_{\text{вх}}(t) = \frac{k b_0}{a_0} \Delta f.$$

При $\Delta f = \text{const}$ система еквівалентна безінерційній (підсилювальній) ланці.

На основі викладеного можна стверджувати, що для швидшого згасання перехідного процесу потрібні, щоб полюси і нулі передаточної функції розміщувалися ближче один до одного.

Методи кореневих годографів. Кореневим годографом називають характеристики в комплексній площині коренів характеристичного рівняння замкнутої системи, які дістають, поступово змінюючи деякі параметри від 0 до $+\infty$.

За допомогою кореневих годографів можна визначити взаємну залежність параметрів і коренів системи, тобто встановити, як впливає зміна параметра на величину і вигляд кореня, а отже, і на відношні показники якості.

Існують різні методи побудови кореневих годографів. Крім кореневих годографів, у ТАК використовуються також такі інші обернені методи, суть яких полягає в порівнянні коефіцієнтів дійсного рівняння системи з коефіцієнтами деякого стандартного рівняння. В результаті такого порівняння зі розходженням значень коефіцієнтів рівнянь визначають якість реальної системи.

У загальному випадку рівняння лінійної замкнутої системи n -го порядку

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0)x = (b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0)f.$$

Дане рівняння замінюється деяким стандартним рівнянням на основі введення оператора $D = p/\omega_0$ ($\omega_0 = 1/T$, T — стала часу об'єкта) і ділення всіх коефіцієнтів рівняння на a_n ; змінні x і f будуть функціями безрозмірного часу $\tau = \omega_0 t$ (t — реальний час).

Стандартне рівняння матиме вигляд

$$(D^n + A_{n-1} D^{n-1} + \dots + A_1 D + 1)x = (B_n D^n + B_{n-1} D^{n-1} + \dots + B_0)f,$$

де

$$A_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n \omega_0}; \dots; A_1 = \frac{a_1}{a_n \omega_0^{n-1}};$$

$$B_n = \frac{b_n}{a_n \omega_0^{n-n}}; \dots; B_0 = \frac{b_0}{a_n \omega_0^n}; \quad \omega_0 = \frac{a_1}{b_0}.$$

Оскільки стандартна форма рівняння безрозмірна, то системи з однаковими показниками мають, з винятком тривалості процесу, можна досліджувати за одним і тим самим рівнянням.

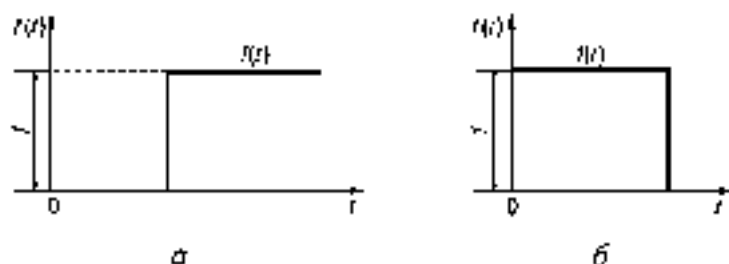
Методи стандартних діаграм, процесів і коефіцієнтів. Типові збурення. Характерним прикладом методу нормованих діаграм для систем третього порядку є розширена діаграма Винниградського, розглянута раніше.

Стандартні процеси одержують у системі у разі дії деяких типових (стандартних) збурень. Рівняння системи при цьому записують у стандартній формі. Типові збурення використовувать у теоретичних і експериментальних дослідженнях як деякі еталонні збурення, за якими визначається реакція системи з робочих шкелівних висновки про її якість.

Існують такі основні типові збурення

✓ **Одиничний крок навантаження (одиночне збурення)** — це різке збільшення прийнятого за одиницю навантаження, що діє протягом часу. Його умовне позначення $\{u\}$ (рис. 5.10, а). Різкий спад одиничного навантаження відповідає графіку на рис. 5.10, б.

✓ **Одиничний імпульс** — типові збурення вигляду короткотривалої дії одиничного навантаження, яке визначається як $\{i(x)\}$ (рис. 5.11, а).

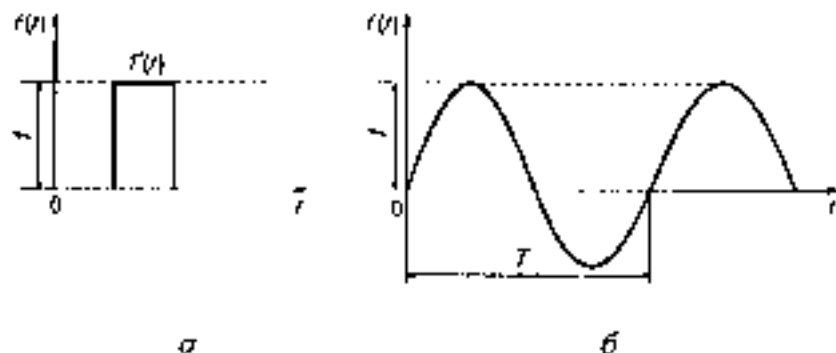
**Рис. 5.10**

✓ *Гармонічні коливання* є синусоїдальними коливаннями з амплітудою, прийнятою за одиницю (період коливань T – стала величина) (рис. 5.11, а). Такі типи збурення використовуються також при знаходженні частотних характеристик ланок.

Прикладом використання методів стандартних процесів може бути формула оптимального процесу, яку вівстав В. В. Солодовніков:

$$x_{opt}(t) = \frac{1}{2}at^2 I(t) - a\left(t - \frac{\tau_{opt}}{2}\right)^2 I\left[t - \frac{\tau_{opt}}{2}\right] - \\ + \frac{1}{2}a(t - \tau_{opt})^2 I[t - \tau_{opt}],$$

де $a = d^2 x/dt^2$ – прискорення; τ_{opt} – безрозмірний час оптимального процесу.

**Рис. 5.11**

Усталене значення регульованої величини $x_{\text{уст}}(\infty) = \frac{\sigma x_{\text{уст}}^2}{a}$. Для оптимального процесу можна вважати, що відхилення після його завершення дорівнюватиме нулю, тому

$$x_{\text{уст}}(\infty) = u(0),$$

де $u(t)$ — керуюча дія; $u(0)$ — початкове значення керуючої дії.

Звідси

$$\tau_{\text{уст}} = 2 \sqrt{\frac{|u(0)|}{a}}.$$

У даному випадку дослідження проводилися за умови дії на систему деякого стандартного, одиничного збурення (одиничного кроку навантаження).

Метод стандартних коефіцієнтів дає змогу вибрати параметри проєктованої системи таким чином, щоб дістати перехідний процес, що відповідає стандартній системі.

Процес у реальній системі буде тим ближче до процесу в стандартній системі, чим ближче реальні коефіцієнти до відповідних коефіцієнтів стандартної системи. Для практичного використання даного методу потрібні таблиці, розраховані для типових передаточних функцій, з перетворення передаточних функцій реальної системи до вигляду, найбільшому (в ідеальному випадку — такому, що повністю збігається) до вигляду типової передаточної функції.

Так, при передаточній стандартній функції замкнутої системи вигляду

$$\Phi(D) = \frac{B_1 D + 1}{D^n + A_{n-1} D^{n-1} + \dots + A_1 D + 1}$$

найкращими за величиною перерегулювання ($\sigma \leq 10\%$) є коефіцієнти, які було знайдено з умови розподілу коренів за арифметичною прогресією (табл. 5.1).

Для передаточних функцій вигляду

$$\Phi(D) = \frac{B_2 D^2 + B_1 D + B_0}{D^n + A_{n-1} D^{n-1} + \dots + A_1 D + 1};$$

$$\Phi(D) = \frac{1}{D^n + A_{n-1} D^{n-1} + \dots + A_1 D + 1}$$

аналогічні таблиці наведено також у підручниках з теорії автоматичного керування.

Таблиця 5.1

Перший коефіцієнт прогресії коренів	Рівняння прямих	Характеристичне рівняння замкнутої системи $D^n + A_{n-1}D^{n-1} + \dots + A_1D + A_0 = 0$	Примітки
0,5	2	$D^2 + 2,5D + 1 = 0$	$\sigma \leq 10\%$, процес у безрозмірному часі
0,187	1,517	$D^3 + 5,1D^2 + 6,3D + 1 = 0$	-
0,098	1,138	$D^3 + 7,2D^2 + 16D + 1 = 0$	-
0,063	0,867	$D^3 + 9D^2 + 29D + 38D^2 + 18D + 1 = 0$	-
0,039	0,717	$D^3 + 11D^2 + 43D^2 + 83D^2 + 73D^2 + 25D + 1 = 0$	-

Для об'єктивності оцінки розглянутих методів слід зазначити, що деякі з них не тільки наближені, а й потребують досить трудомістких розрахунків.

Інтегральні методи оцінки якості. Інтегральними називають методи, при яких показники якості оцінюються як інтеграл, що є функцією перехідного процесу відхилення регульованої величини від заданого значення (похибки) або незбуреної складової $x_{\text{нр}}(t)$ в розв'язку рівняння процесу регулювання:

$$x(t) = x_{\text{нр}}(t) + x_{\text{д}}.$$

За допомогою інтегральних критеріїв оцінюють нахилених регульованої величини і швидкодію системи.

Для оцінки перехідних процесів без перерегулювання (рис. 5.12, а) використовують інтегральний критерій вигляду

$$I = \int_0^{\infty} x_{\text{нр}}(t) dt, \quad (5.9)$$

Він визначає площу, обмежену кривою $x_{\text{нр}}(t)$ за час перехідного процесу. Чим менша ця площа $I = \int_0^{\infty} x_{\text{нр}}(t) dt$, тим більша швидкодія

системі із однакових початкових умов $x_{\text{нер}}(0)$. Тому параметри системи в даному випадку слід вибрати з умови

$$S = \min: \frac{dS}{dA} = 0,$$

де A — настроювальний параметр системи.

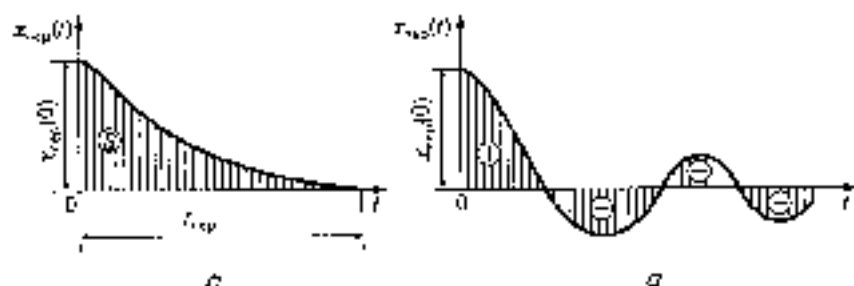


Рис. 5.12

Для розрахунку інтеграла (5.9) В. С. Кулебакін запропонував таку методику.

З рівняння незбурених коливань системи

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

знайдемо величину

$$x = x_{\text{нер}} = \frac{1}{a_n} \left(a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} \right),$$

яку підставляють у формулу (5.9):

$$\begin{aligned} I = S &= -\frac{1}{a_n} \int_0^t a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} dt = \\ &= -\frac{1}{a_n} \left[a_n \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} x \right] \end{aligned}$$

Оскільки значення похідних і самого $x = x_{\text{нер}}$ після закінчення перехідного процесу при $t \rightarrow \infty$ дорівнюють нулю, можна дістати

$$S = \frac{1}{a_n} \left[a_n \frac{d^{n-1}x(0)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}x(0) \right].$$

Позначивши $\frac{d^{n-1}x(0)}{dt^{n-1}} = x^{(n-1)}(0)$ і так далі, дістанемо

$$S = \frac{1}{a_n} [a_n x^{(n-1)}(0) + \dots + a_{n-1}x(0)]. \quad (5.10)$$

Із останньої формули випливає, що інтегральний критерій залежить від параметрів ланок системи, початкових умов і $(n-1)$ похідних від початкових умов.

Для перехідних процесів із перерегулюванням згаданий критерій не можна використовувати, бо мінімум інтеграла (площі) згідно з (5.10) відповідає гармонічним коливанням. Тому для оцінки якості количастих процесів користуються квадратичним інтегралом, який враховує абсолютні значення «додатних» і «від'ємних» площин:

$$I_2 = S_2 = \int_0^{\infty} [x_{\text{пер}}(t)]^2 dt. \quad (5.11)$$

Існують різні методи обчислення квадратичного інтеграла. Розглянемо формулу, запропоновану А. А. Красовським:

$$I_2 = \int_0^{\infty} x_{\text{пер}}^2(t) dt = \frac{1}{2a_n^2 \Delta} \times \\ \times (B_n \Delta_n + B_{n-1} \Delta_{n-1} + \dots + B_1 \Delta_1 + B_0 \Delta_0) = \frac{b_n b_{n-1}}{a_n^2}, \quad (5.12)$$

де Δ — визначник n -го порядку, складений з коефіцієнтів $a_n, \dots, a_1$ лівої частини рівняння процесу регулювання — характеристичного рівняння замкнутої системи (або знаменника першої осної функції),

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_n & -a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{n-4} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Визначники $\Delta_{n-1}, \Delta_{n-2}, \dots, \Delta_1$ або в загальному випадку визначник Δ_k можна дістати з основного визначника Δ заміною стовпця $m - k + 1$ стовпцем

$$\begin{pmatrix} a_{1, k+1} \\ a_{2, k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Наприклад, для знаходження визначника Δ_{n-1} у визначнику Δ слід замінити перший стовпець ($m - n + 1 = 1$), після чого дістанемо

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{n-1, 1} & -a_{n-1, 2} & a_{n-1, 3} & \dots & 0 \\ a_{n, 1} & a_{n, 2} & -a_{n, 3} & \dots & 0 \\ 0 & -a_{n+1, 2} & a_{n+1, 3} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{n+2, 3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Коефіцієнти $B_0, B_1, \dots, B_n$ визначають за формулами:

$$\begin{aligned} B_0 &= b_n^2; \quad B_1 = b_{n-1}^2 - 2b_n b_{n-2}; \\ B_2 &= b_{n-2}^2 - 2b_n b_{n-3} + \dots + 2(-1)^1 b_{n-1} b_{n-3}; \quad B_n = b_1^2, \end{aligned}$$

де $b_0, \dots, b_n$ — коефіцієнти правої частини рівняння замкнутої системи (або чисельника відповідної передаточної функції).

На основі розглянутих формул побудовано таблиці розрахунку квадратичного інтеграла як функції коефіцієнтів $b_0, \dots, b_n$ і $a_0, \dots, a_n$ при різних значеннях n (до $n = 10$). Для значення $n = 1, 5$ такі дані наведено в табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Значення n	Значення квадратичного інтеграла
1	$b_0^2(2a_0)$
2	$b_1^2 a_0 + \frac{b_0^2 a_1}{2a_0 a_1 a_2}$

Значення n	Значення квадратичного інтеграла
3	$\frac{b_0^2 \rho a_2 + (b_1^2 - 2b_2 b_0) a_1 \rho a_1 + b_2^2 a_1 a_1}{2a_1 \rho (a_1 a_2 + a_1 \rho)}$
4	$\frac{b_0^2 (-a_1^2 a_1 + a_1 \rho a_1) + (b_1^2 - 2b_2 b_0) a_1 \rho a_1 + (b_2^2 - 2b_3 b_1)}{2a_1 \rho (a_1^2 a_1^2 + a_1^2 a_1 + a_1 \rho a_1)}$
5	$\frac{1}{2a_1} [b_1^2 a_1 + (b_1^2 - 2b_2 b_0) m_1 + (b_2^2 - 2b_3 b_1 - 2b_4 b_0) m_2 + (b_3^2 - 2b_4 b_2) m_3 + b_4^2 m_4]$

де $m_1 = \frac{1}{a_1} (a_2 m_1 - a_1 m_2)$; $m_2 = -a_1 a_2 - a_1 a_1$; $m_3 = -a_2 a_1 + a_2 a_1$;
 $m_4 = \frac{1}{a_1} (a_1 m_2 - a_1 m_3)$; $m_5 = \frac{1}{a_1} (a_1 m_2 - a_1 m_3)$; $\Delta_2 = a_1 (a_2 m_4 - a_2 m_5 +$
 $+ a_1 m_2)$

Крім розглянутих, відомі й інші види інтегральних оцінок (критерії).

- **Приклад 5.2.** Визначити коефіцієнт підсилення системи, який забезпечить мінімум квадратичної інтегральної оцінки при однічному відомому сигналі, якщо передаточна функція замкнутої системи відома і має вигляд

$$\Phi(s) = \frac{\rho^2 T_1 T_2 + \rho(T_1 + T_2) + 1}{\rho^2 T_1 T_2 + \rho(T_1 + T_2) + \rho + k}$$

де $T_1 = 0.01$ с; $T_2 = 0.03$ с.

Розв'язання. В даному разі $n = 3$. Знайдемо значення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2, a_3 і b_1, b_2, b_3 :

$$b_1 = a_1 = T_1 T_2 = 0.01 \cdot 0.03 = 3 \cdot 10^{-4};$$

$$b_2 = a_2 = T_1 + T_2 = 0.01 + 0.03 = 4 \cdot 10^{-2};$$

$$b_3 = a_3 = 1, \quad a_4 = k.$$

З табл. 5.2 для $n = 3$ маємо

$$I_3 = \frac{b_0^2 a_1 + (b_1^2 - 2b_2 b_0) a_1 \rho + b_2^2 a_1}{2a_1 \rho (a_1 a_2 + a_1 \rho)}$$

$$= \frac{a_1 a_1 - k a_1 a_1^2 - a_1^2 k}{-k^2 2 a_1^2 + k 2 a_1 a_1} = \frac{a_1 - k(a_1^2 + a_1)}{k(a_1 - k^2 a_1)}.$$

Визначимо частинну похідну $\partial J_1 / \partial k$ і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{\partial J_1}{\partial k} = \frac{1}{2} \frac{-k(a_1^2 - a_1)(a_1 - k a_1) - [k(a_1^2 - a_1) + a_1](a_1 - 2 a_1 k)}{k^2(a_1 - k a_1)^2} = 0$$

$$\text{або } k^2 a_1(a_1^2 - a_1) + 2 a_1 k - a_1^2 = 0.$$

Підставивши числові значення коефіцієнтів, отримаємо квадратне рівняння

$$k^2 - 65,5k - 41 \cdot 10^2 = 0.$$

звідки знайдемо оптимальне значення коефіцієнта підсилення розмікнutoї системи: $k_{\text{опт}} \approx 37$.

Частотні методи оцінки якості САР. Частотні методи дослідження, які дістань найбільше поширення на практиці, базуються на математичній залежності характеристики перехідного процесу $x(t)$ від дійсної (суцільної) частотної характеристики замкнутої системи за збуренням $u'(i\omega)$ (або за заданим сигналом). В основі доведення цієї залежності лежить відоме положення, що будь-яку періодичну обмежену дійсну функцію, яка має скінченну кількість розривів і екстремумів, можна розкласти в нескінченний ряд синусоїдальних функцій — ряд Фур'є.

При доведенні функціональної залежності

$$x(t) = f[U'(i\omega)]$$

виходять з того, що в системі діє збурення у вигляді одиничного кидка збурення $1(t)$, яке розкладається в ряд Фур'є.

В результаті цього доведення і досить складних перетворень знайдено відому залежність

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U'(i\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega. \quad (5.13)$$

Дійсну частотну характеристику замкнутої системи за збуренням $U'(i\omega)$ знаходять з виразу відповідної передаточної функції замкнутої системи

$$W'(p) = \frac{W_1'(p)}{1 + W_1'(p)},$$

де $W'_1(p)$ — передаточна функція об'єкта за збуренням; $W(p)$ — передаточна функція розімкнутої системи.

Після підстановки $p = j\omega$ у вираз $W'(p)$ дістанемо амплітудно-фазову частотну характеристику замкнутої системи за збуренням

$$W'(j\omega) = jV'(j\omega) + U'(j\omega),$$

де $V'(j\omega)$, $U'(j\omega)$ — відповідно уявна і дійсна частотні характеристики замкнутої системи за збуренням. Останню з них і використовують у формулі (5.13).

Практично розгляд характеристики $U'(j\omega)$ обмежується зоною суттєвих частот ω_c .

Під зоною суттєвих частот розуміють зону зміни частоти ω від 0 до ω_c , в якій виконується умова

$$\left| \frac{U'(j\omega)}{U'(j\omega_c)} \right| > 10$$

(при $\omega > \omega_c$ ця умова не порушується).

В зоні суттєвих частот виконується наближення характеристики $U'(j\omega)$, яку замінюють рівнозначними фігурами $H(\omega)$ — трапеціями і трикутниками.

При замін $U'(j\omega)$ в зоні суттєвих частот мають виконуватись такі правила.

1. Прямолінійні частини фігур $H(\omega)$ мають, за можливості, точно збігатись з кривою $U'(j\omega)$.

2. Всі n фігур (трапеції і трикутники) повинні мати одну й ту ж висоту вертикальної осі.

3. Алгебраїчна сума площ усіх n фігур, якими замінюють характеристику $U'(j\omega)$, має дорівнювати площі, обмеженої характеристикою $U'(j\omega)$.

4. Кількість фігур n має бути, за можливості, меншою.

Після заміни $U'(j\omega)$ рівнозначними фігурами

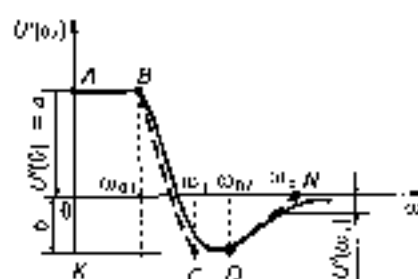
$$U'(j\omega) = \sum_{i=1}^n H_i(j\omega),$$

обмежуючись розглядом інтеграла в зоні суттєвих частот, запишемо

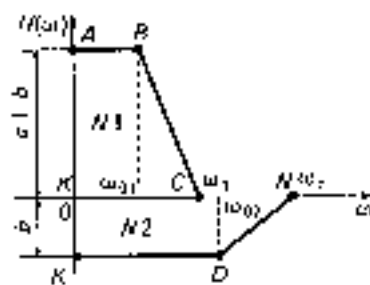
$$x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_0^{\omega_c} \frac{H_i(j\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega. \quad (5.14)$$

Із формули (5.14) випливає, що ординату перехідного процесу $x(t)$ можна лісати як величину, пропорційну сумі площ (інтегралів) еквівалентних фігур.

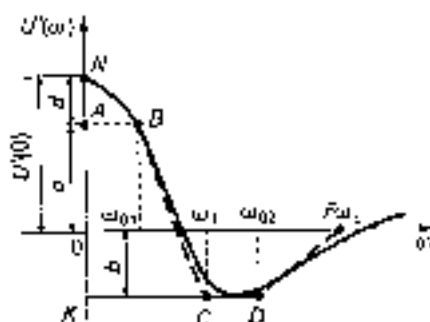
Деякі види характеристик $U'(\omega)$ і фігури, які їх замінюють, показано на рис. 5.13, а–г.



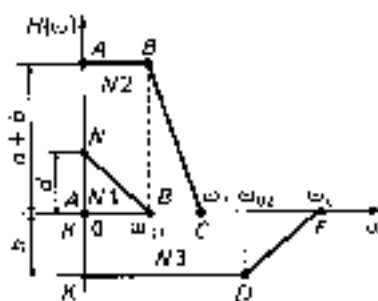
а



б



в



г

Рис. 5.13

Характеристику на рис. 5.13, а замінено трапеціями $N1$ і $N2$ (рис. 5.13, б). Загальна алгебрична сума площ обох фігур $\Sigma S = S_{N1} - S_{N2}$ дорівнює площі, обмеженої характеристикою $U'(\omega)$ і горизонтальною віссю.

Характеристика $U'(\omega)$, показана на рис. 5.13, в, апроксимується трьома фігурами: трикутником $N1$ і двома трапеціями $N2$ і $N3$ (рис. 5.13, г).

Загальну площу всіх трьох фігур обчислимо за формулою

$$\Sigma S = S_{N1} + S_{N2} - S_{N3}.$$

Площа ΣS дорівнює площі, обмеженій характеристикою $U^f(\omega)$, тому що частини додатної площі трапеції $N2$ компенсують відповідною частиною від'ємної площі трапеції $N3$.

Метод одиничних трапецій і трикутників. Для зручності обчислення інтегралів різних фігур, якими можна замінити характеристики $U^f(\omega)$ різних реальних систем в ТАК, було введено поняття одиничних (типових) трапецій і трикутників, а також побудовано спеціальну таблицю, які дістали назву таблиць *h-функцій* (табл. 5.3 і 5.4). У цих таблицях наведено результати розрахунків інтегралів вигляду $\int_0^{\omega_1} \frac{h(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega$, різних одиничних фігур (для одиничних фігур їх початкова висота h_0 і діапазон пропускання частот ω_1 дорівнюють одиниці.)

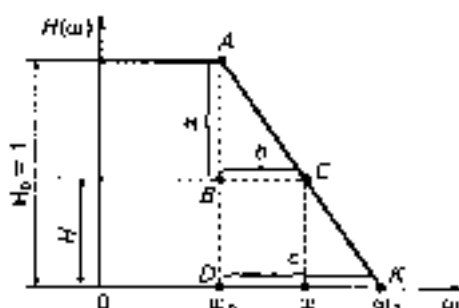


Рис 5.14

Розглянемо деяку трапецію (рис 5.14). Трапеція характеризується початковим значенням $H(\omega) = H_1$, коефіцієнтом нахилу її сторони $v = \omega_0/\omega_1$, а також інтервалом пропускання частоти ω_1 .

Розрахуємо перехідний процес для відношної трапеції при $H(0) = H_1 = 1$:

при $0 < \omega < \omega_0$ $H = H_1 = 1$,

при $\omega > \omega_1$ $H = 0$,

$$\text{при } \omega_0 < \omega < \omega_1 \quad H = 1 - \frac{\omega - \omega_0}{\omega_1 - \omega_0},$$

де ω — поточне значення частоти. (Останній вираз H дістали з урахуванням подібності трикутників ABC і ADK , на основі чого можна записати $x'/l = h/c = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_1 - \omega_0} = 1$

Позначимо перехідну функцію одиничної трапеції $h_1(t)$.

Підставляючи відповідні значення $H(\omega)$ в формулу (5.14) та інтегруючи у певних межах, дістаємо

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\left(1 - \frac{\omega \cdot \omega_1}{\omega_1 - \omega_0}\right) \sin \omega t}{\omega} d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega - \frac{2}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1 - \omega_0} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \end{aligned}$$

Величини $\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \text{Si } \omega t$ є інтегральним синусом. Величини Si інтегральних синусів, обчислені при відповідних значеннях ωt , наведено в таблицях. Маємо на увазі, що $\int \sin \omega t d\omega = -\frac{\cos \omega t}{t}$, занемаємо

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{2}{\pi} \text{Si } \omega_1 t + \frac{2}{\pi} \text{Si } \omega t - \frac{2}{\pi} \text{Si } \omega_0 t - \frac{2}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \\ &+ \frac{2}{\pi} \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_0} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{2}{\pi} \text{Si } \omega_1 t + \frac{2}{\pi t} \frac{1}{\omega_1 - \omega_0} [\cos \omega_1 t - \cos \omega_0 t] + \\ &+ \frac{2}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega_1 - \omega_0} \sin \omega_1 t - \frac{2\omega_0}{t(\omega_1 - \omega_0)} \text{Si } \omega_0 t, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{2}{\pi} \left[\text{Si } \omega_1 t + \frac{1}{t(\omega_1 - \omega_0)} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_0 t) - \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_0}{\omega_1 - \omega_0} (\text{Si } \omega_1 t - \text{Si } \omega_0 t) \right]. \end{aligned}$$

Для одиничної трапеції $H_n = 1$, $\omega_1 = 1$, $\omega_0 = \omega_0$, тому

$$h_1(t) = \frac{2}{\pi} \left[\text{Si } t - \frac{1 - \cos t - \cos \omega_0 t}{(1 - \omega_0)t} + \frac{\omega_0}{1 - \omega_0} [\text{Si } t + \text{Si } \omega_0 t] \right].$$

Цей вираз визначає характер залежності перехідної функції одиничної трапеції від двох величин:

$$h_1(t) = f(v, t),$$

x	y = 20000.0000000000									
	0.25	1.01	0.15	0.20	0.25	0.25	0.31	0.42	0.45	
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
0.5	0.002	0.019	0.004	0.002	0.000	0.007	0.015	0.015	0.011	
1.0	0.005	0.040	0.016	0.010	0.006	0.002	0.017	0.032	0.047	
1.5	0.008	0.069	0.046	0.039	0.030	0.011	0.045	0.117	0.166	
2.0	0.007	0.094	0.085	0.082	0.080	0.052	0.080	0.185	0.280	
2.5	0.007	0.110	0.111	0.112	0.115	0.062	0.090	0.217	0.285	
3.0	0.012	0.126	0.161	0.155	0.155	0.085	0.096	0.192	0.188	
3.5	0.012	0.142	0.164	0.162	0.160	0.080	0.091	0.164	0.165	
4.0	0.008	0.111	0.094	0.094	0.090	0.060	0.080	0.110	0.122	
4.5	0.021	0.160	0.094	0.099	0.090	0.064	0.084	0.104	0.129	
5.0	0.035	0.111	0.092	0.092	0.087	0.067	0.083	0.102	0.112	
5.5	0.036	0.136	0.093	0.093	0.083	0.070	0.084	0.102	0.096	
6.0	0.045	0.091	0.093	0.093	0.083	0.068	0.075	0.084	0.082	
6.5	0.044	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.082	0.082	
7.0	0.041	0.086	0.090	0.090	0.081	0.060	0.069	0.081	0.081	
7.5	0.044	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.080	
8.0	0.055	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
8.5	0.056	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
9.0	0.056	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
9.5	0.056	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
10.0	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
10.5	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
11.0	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
11.5	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
12.0	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
12.5	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
13.0	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
13.5	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
14.0	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
14.5	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
15.0	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
15.5	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
16.0	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
16.5	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
17.0	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
17.5	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
18.0	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
18.5	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
19.0	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
19.5	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	
20.0	0.050	0.090	0.093	0.093	0.082	0.060	0.069	0.080	0.082	

[illegible]

Таблиця 5.4

Значення для трикутника					
τ	δ	γ	λ	τ	δ
0.30	0.00000	0.80	0.95	1.1	0.600
0.31	0.00108	0.79	0.94	1.2	0.682
0.32	0.00217	0.78	0.93	1.3	0.759
0.33	0.00325	0.76	0.92	1.4	0.831
0.34	0.00433	0.75	0.91	1.5	0.894
0.35	0.00541	0.74	0.90	1.6	0.950
0.36	0.00649	0.73	0.89	1.7	1.000
0.37	0.00757	0.72	0.88	1.8	1.044
0.38	0.00865	0.71	0.87	1.9	1.083
0.39	0.00973	0.70	0.86	2.0	1.117
0.40	0.01081	0.69	0.85	2.1	1.147
0.41	0.01189	0.68	0.84	2.2	1.173
0.42	0.01297	0.67	0.83	2.3	1.196
0.43	0.01405	0.66	0.82	2.4	1.216
0.44	0.01513	0.65	0.81	2.5	1.233
0.45	0.01621	0.64	0.80	2.6	1.248
0.46	0.01729	0.63	0.79	2.7	1.261
0.47	0.01837	0.62	0.78	2.8	1.272
0.48	0.01945	0.61	0.77	2.9	1.282
0.49	0.02053	0.60	0.76	3.0	1.291
0.50	0.02161	0.59	0.75	3.1	1.299
0.51	0.02269	0.58	0.74	3.2	1.306
0.52	0.02377	0.57	0.73	3.3	1.313
0.53	0.02485	0.56	0.72	3.4	1.319
0.54	0.02593	0.55	0.71	3.5	1.325
0.55	0.02701	0.54	0.70	3.6	1.330
0.56	0.02809	0.53	0.69	3.7	1.335
0.57	0.02917	0.52	0.68	3.8	1.340
0.58	0.03025	0.51	0.67	3.9	1.345
0.59	0.03133	0.50	0.66	4.0	1.349
0.60	0.03241	0.49	0.65	4.1	1.353
0.61	0.03349	0.48	0.64	4.2	1.357
0.62	0.03457	0.47	0.63	4.3	1.361
0.63	0.03565	0.46	0.62	4.4	1.365
0.64	0.03673	0.45	0.61	4.5	1.368
0.65	0.03781	0.44	0.60	4.6	1.372
0.66	0.03889	0.43	0.59	4.7	1.375
0.67	0.03997	0.42	0.58	4.8	1.378
0.68	0.04105	0.41	0.57	4.9	1.382
0.69	0.04213	0.40	0.56	5.0	1.385
0.70	0.04321	0.39	0.55	5.1	1.388
0.71	0.04429	0.38	0.54	5.2	1.391
0.72	0.04537	0.37	0.53	5.3	1.394
0.73	0.04645	0.36	0.52	5.4	1.397
0.74	0.04753	0.35	0.51	5.5	1.399
0.75	0.04861	0.34	0.50	5.6	1.402
0.76	0.04969	0.33	0.49	5.7	1.405
0.77	0.05077	0.32	0.48	5.8	1.408
0.78	0.05185	0.31	0.47	5.9	1.411
0.79	0.05293	0.30	0.46	6.0	1.414
0.80	0.05401	0.29	0.45	6.1	1.417
0.81	0.05509	0.28	0.44	6.2	1.420
0.82	0.05617	0.27	0.43	6.3	1.423
0.83	0.05725	0.26	0.42	6.4	1.426
0.84	0.05833	0.25	0.41	6.5	1.429
0.85	0.05941	0.24	0.40	6.6	1.432
0.86	0.06049	0.23	0.39	6.7	1.435
0.87	0.06157	0.22	0.38	6.8	1.438
0.88	0.06265	0.21	0.37	6.9	1.441
0.89	0.06373	0.20	0.36	7.0	1.444
0.90	0.06481	0.19	0.35	7.1	1.447
0.91	0.06589	0.18	0.34	7.2	1.450
0.92	0.06697	0.17	0.33	7.3	1.453
0.93	0.06805	0.16	0.32	7.4	1.456
0.94	0.06913	0.15	0.31	7.5	1.459
0.95	0.07021	0.14	0.30	7.6	1.462
0.96	0.07129	0.13	0.29	7.7	1.465
0.97	0.07237	0.12	0.28	7.8	1.468
0.98	0.07345	0.11	0.27	7.9	1.471
0.99	0.07453	0.10	0.26	8.0	1.474
1.00	0.07561	0.09	0.25	8.1	1.477

Для трикутного (одиничного) трикутника при $H(0) = 1$ і $\omega_0 = 1$ значення перехідної функції $h_1(t)$ дістанемо з виразу для одиничної трикутної, поклавши $\omega_0 = 0$, $\nu = 0$. Тоді матимемо

$$h_1(t) = \frac{2}{\pi} \left(\text{Si } t + \frac{1 - \cos t}{t} \right)$$

Отже, перехідна функція для одиничного трикутника є функцією лише однієї величини — часу t :

$$h_1(t) = f(t)$$

Значення h -функції одиничних трапецій при різних ν і t наведено в табл. 5.3, а для одиничних трикутників при різних t — у табл. 5.4. У цих таблицях замість реального часу t взято так званий табличний час $\tau = \omega_0 t$.

При користуванні таблицями для одиничних фігур замиа обчислення ординат перехідного процесу, що відповідають деякому реаль-

ному моменту часу t_i і реальним фігурам, які апроксимують характеристику $U^1(\omega)$, слід дотримуватися такої методики.

1. Знаємо значення реального часу t_i , для якого знаходимо відповідні значення табличного часу:

$$\tau_i = m_i t_i,$$

де m_i — частота пропускання реальної фігури $H(\omega)$.

2. Для реальних трапецій визначаємо нахил сторони реальної трапеції $v_r = \frac{\omega_{2r}}{\omega_{1r}}$ і за таблицями h -функцій типових трапецій з нахилом $v_r = v_r$ знаходимо відповідні значення $h_i(t_i)$.

3. Знайдені з таблиць значення $h_i(t_i)$ множимо на H_r відповідної реальної фігури і, як результат, дістаємо скінченну ординату реальної переходного процесу, що відповідає даній фігурі. Подібним чином проводимо розрахунки і для інших фігур.

$$x_1(t_i) = h_i(t_i)H_r \quad (\text{для фігури } H_r),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n(t_i) = h_n(t_i)H_n \quad (\text{для фігури } H_n).$$

4. Результуючу ординату переходного процесу знаходимо як алгебричну суму ординат усіх фігур для даного моменту часу:

$$x_2(t_i) = h_1(t_i) + \dots + h_n(t_i).$$

5. Аналогічно знаходимо ординати переходного процесу і для інших моментів часу, після чого по точках будувемо характеристику $x(t)$.

Розглянемо конкретний приклад побудови характеристики переходного процесу.

□ **Приклад 5.3.** Побудуємо перехідну характеристику для системи з передаточною функцією за збуренням

$$W^1(p) = \frac{p+3}{p^2+4,5p^2+14,5p+20}.$$

Розв'язання. Амплітудно-фазова частотна характеристика за збуренням має вигляд

$$W^1(j\omega) = \frac{j\omega+3}{-j\omega^2-4,5\omega^2+14,5j\omega+20} = \dots = \frac{4,5\omega+3j[(20-4,5\omega^2)-j(14,5\omega-\omega^3)]}{(20-4,5\omega^2)^2+(14,5\omega-\omega^3)^2} = U^1(\omega) + jV^1(\omega).$$

а дійсна частота характеристики —

$$U^f(\omega) = \frac{60 + \omega^2 - \omega^4}{120 - 4,5\omega^2 j^2 - (14,5\omega^2 - \omega^4)j}$$

Знайдемо значення $U^f(\omega)$ при зміні частоти ω .

ω	0	1	2	3	4	5	7	9	10
$U^f(\omega)$	0,15	0,14	0,11	0,08	-0,07	-0,05	-0,01	-0,011	-0,01

За цими даними побудуємо характеристику $U^f(\omega)$ (рис. 5.15, а).
Суттєвою частотою вважаємо $\omega_1 = 9$, для якої

$$\begin{aligned} U^f(0) &= 0,15/0,013 = 11,5 > 10, \\ U^f(\omega_1) & \end{aligned}$$

Три еквівалентні фігури, якими апроксимується характеристика $U^f(\omega)$, показані на рис. 5.15, б. Параметри фігур:

$N1$ — трапеція $OACD$,

$$H_1 = 0,11 \pm 0,07 = 0,18; \quad \omega_{01} = 2,75;$$

$$\omega_{01} = 3,2; \quad \nu_1 = \frac{2,75}{3,2} = 0,85.$$

$N2$ — трапеція $OHFG$,

$$H_2 = -0,07; \quad \omega_{02} = 4,0$$

$$\omega_{02} = 9; \quad \nu = \frac{4,0}{9,0} = 0,4;$$

$N3$ — трикутник ABC ,

$$H_3 = 0,04; \quad \omega_{03} = 2,75$$

Побудуємо ординату перехідного процесу для реального моменту часу $t = 1$ с. Знайдемо табличний час для відповідних фігур:

$$\tau_{N1} = \omega_{01} t = 3,2 \cdot 1 = 3,2;$$

$$\tau_{N2} = \omega_{02} t = 9,0;$$

$$\tau_{N3} = \omega_{03} t = 2,75.$$

За даними таблиць δ -функцій за відповідними значеннями ν і τ (для трапецій) і величина τ (для трикутника) знайдемо значення δ -функцій для фігур $N1$, $N2$, $N3$.

$$\delta(\tau)_{N1} = 1,16; \quad \delta(\tau)_{N2} = 0,99; \quad \delta(\tau)_{N3} = 0,71$$

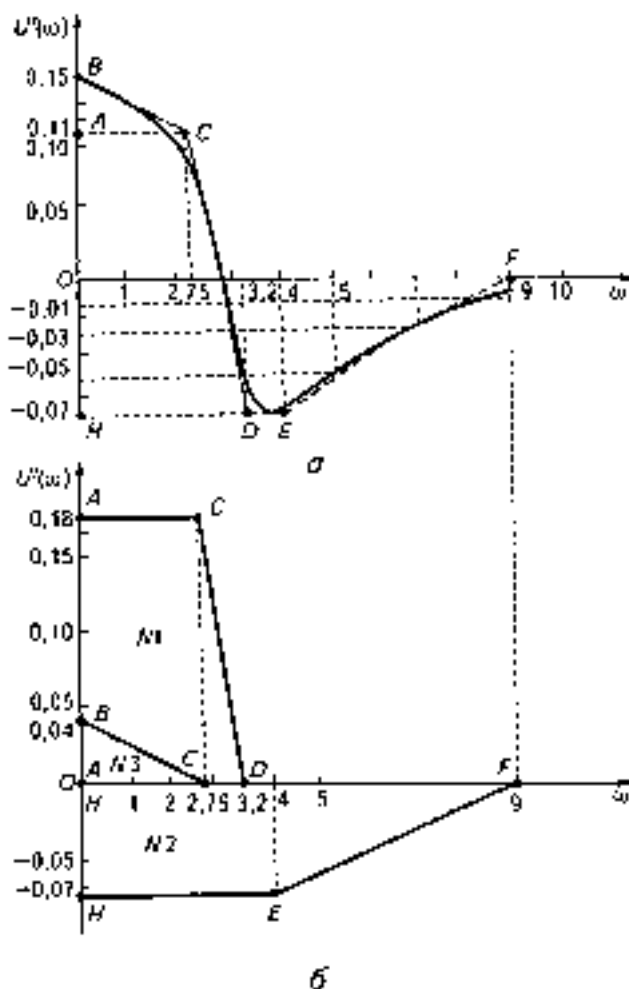


Рис. 5.15

Помноживши знайдені табличні значення $h(t)$ на ординати відповідних реальних фігур H , дістанемо один з двох $x_i(t)$ відповідних фігур

$$x_1(t) = h(t)_{N1} H_1 = 1,15 \cdot 0,18 = 0,21;$$

$$x_2(t) = h(t)_{N2} H_2 = -0,91 \cdot 0,07 = -0,07;$$

$$x_2(t) = h(t), \quad h_1 = 0,71 \quad 0,04 = 0,03.$$

Правочиним знак $x_2(t)$, для даної результуючої ординати перехідної характеристики при $t = 1$ с:

$$x_2(t) = x_1(t) + x_3(t) + x_4(t) = 0,21 - 0,07 + 0,03 = 0,17.$$

Аналогічно можна дістати й інші ординати перехідного процесу при різних значеннях реального часу t і побудувати відповідну характеристику.

Наведена методика має можливість побудувати перехідну характеристику за умови дії одиничного кидка навантаження $U(t)$ і дістати відповіді на основні питання якості про характер перехідного процесу, його тривалість, величину перерегулювання.

Проведені дослідження дають можливість робити деякі оцінки якості САК безпосередньо за виглядом дійсної частотної характеристики замкнутої системи за збуренням $U^f(\omega)$.

5.4

Чутливість САК

Під чутливістю САК розуміють її властивість реагувати на зміну параметрів, що думовляються зміною умов довкілля середовища, їх характеристик, старінням елементів системи тощо.

Зміна параметрів ланок веде до зміни коефіцієнтів характеристичного рівняння і, як наслідок, — величин знака і вигляду коренів і показників якості системи. Це може також призвести до втрати стійкості і роботоздатності системи.

Кількісна оцінка чутливості САК виконується за допомогою функції чутливості, яка є частинною похідною координати системи, або окремого показника якості по параметру системи, який змінюється (варіюється). Кількістю функції чутливості дорівнює кількості параметрів, які змінюються при роботі САК.

У загальному вигляді функцію чутливості можна записати у вигляді

$$U_{x_i} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial T_j} \right)_{x_i},$$

де x_i — координата системи; T_j — змінний параметр.

Індекс i відповідає визначенню функції чутливості при початковому (номінальному) значенні параметра системи.

Якщо $U_{xi} = 0$ (варіації параметрів виклики її значення дорівнюють номінальному значенню), то систему називають *вихідною*. Рух такої системи (характер перехідних процесів) має назву *основного руху*.

Якщо $U_{xi} \neq 0$, то систему називають *варіаційною*, а її рух — *варіаційним рухом*.

Різниця між варіаційним і основним рухом системи — це *додатковий рух*. При цьому варто на увазі різницю ординат відповідного руху в одні й ті самі моменти часу.

Цей рівняння вихідної нелінійної системи має вигляд

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, T_1, \dots, T_m),$$

де $x_1, \dots, x_n$ — координати; $T_1, \dots, T_m$ — параметри системи.

При варіаційній зміні параметрів нове рівняння системи можна записати у вигляді n рівнянь першого порядку

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = f_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n; T_1 + \Delta T_1, \dots, T_m + \Delta T_m)$$

(у даному випадку вважаємо, що зміна параметрів системи не веде до зміни порядку системи n).

Додатковий рух системи у загальному випадку маємо вигляд

$$\Delta x_i(t) = \tilde{x}_i(t) - x_i(t)$$

Якщо варіаційна координата $\tilde{x}_i$ і координата вихідної системи диференційовані по параметру T_i ($i = 1, \dots, m$), то, розкладаючи додатковий рух у ряд Тейлора за припущенням параметра при умові малих відхилень, дістаємо

$$\Delta x_i(t, \Delta T_1, \dots, \Delta T_m) = \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial x_i}{\partial T_j} \right]_0 \Delta T_j,$$

де $i = 1, \dots, m$.

Оскільки $\partial x_i / \partial T_i = U_{xi}$, то останній вираз можна записати у вигляді суми добутків функцій чутливості U_{xi} і прирощень параметрів:

$$\Delta x_i(t, \Delta T_1, \dots, \Delta T_m) = \sum_{j=1}^m U_{xi} \Delta T_j.$$

Маючи значення функцій чутливості за величиною варіацій параметрів, можна знайти перше наближення виразу додаткового руху.

Дослідження властивостей чутливості системи в цілому може виконуватися на основі рівнянь чутливості системи. Для знаходження

яких необхідно диференціювати всі n рівнянь першого порядку. При цьому лінійні рівняння чутливості системи в загальному випадку матимуть вигляд

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial T_j} \right) = \frac{dU_{ij}}{dt} = \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} U_{ik} + \frac{\partial f_k}{\partial T_j} \quad (k = 1, \dots, n; i = 1, \dots, m).$$

На основі розв'язання рівнянь чутливості можна дістати функції чутливості U_{ij} для відповідних параметрів T_j .

Контрольні запитання та завдання

1. Визначіть основні показники якості САК.
2. Які показники характеризують коливальні перехідні процеси?
3. Від яких факторів залежить якість САК?
4. Чим як визначаються статичні помилки в САК?
5. Яким чином впливає розміщення коренів на комплексній площині коренів на характер перехідних процесів?
6. Яким чином можна приблизно визначити тривалість перехідного процесу?
7. Який вплив має розміщення нулів і полюсів передаточної функції на якість САК?
8. Назвіть основні види типових збурень.
9. Чим відрізняються інтегральні критерії оцінки аперіодичних і коливальних процесів?
10. Який зв'язок існує між характером перехідного процесу та виглядом частотних характеристик системи?
11. Яким чином використовують одиничні трапеції і трикутники для оцінки якості?
12. Викладіть методiku заміни дійсної частотної характеристики замкнутої системи за збуренням еквівалентними фігурами.
13. Які особливості якості САК можна визначити за зовнішнім виглядом дійсної частотної характеристики замкнутої системи за збуренням?
14. Дайте визначення чутливості САК і напишіть рівняння чутливості системи.
15. Викладіть суть методу аналізу якості за найменшим коренем.
16. Як визначити основні зони розміщення різних видів коренів за допомогою розширеної діаграми Вільсона-Градського?
17. Роз'ясніть розміщення ланій різних ступенів затухання перехідного процесу.
18. Як розміщуються корені, що визначають різні види перехідного процесу, на комплексній площині?

6.1

Помилки в САР

Точність САР є одним із найважливіших показників якості систем, що має особливе значення для електромеханічних систем.

Залежно від виду технологічного процесу і особливостей об'єкта точність САР у багатьох випадках визначає якість продукції, експлуатаційну надійність, довговічність обладнання, безпеку обслуговування, техніко-економічні показники промислових установок (процесів).

Точність САР визначається величиною помилок (похибок). Залежно від режиму роботи системи існують два основних види помилок — статичні і динамічні.

Статична помилка системи Δx_s є відхилення усталеного значення регульованої величини $x^*(t)$, яке виникає після закінчення перехідного процесу $x(t)$, від заданого значення x_z , коли всі параметри системи і збурення є сталими величинами:

$$\Delta x_s = x_z - x^*(t). \quad (6.1)$$

Перехідна динамічна помилка — це відхилення $\Delta x(t)$ дійсного значення регульованої величини від заданого під час перехідного процесу:

$$\Delta x(t) = x_z - x(t). \quad (6.2)$$

Вона змінюється під час перехідного процесу. Статичні та перехідні динамічні помилки системи стабілізації показано на рис. 6.1, а, а слідкувальних (або програмних) систем — на рис. 6.1, б. Позначивши програму змін регульованої величини $y(t)$, отримаємо перехідну динамічну помилку програмної (слідкувальної) системи:

$$\Delta x(t) = y(t) - x(t). \quad (6.3)$$

Відхилення регульованої величини від заданого значення після закінчення перехідного процесу $\Delta x^*(t)$ в процесі слідкування протікають *усталеною величиною в режимі слідкування* (на рис. 6.1 Δx^* — початкове розузгодження). Заданістю замкнутих САР (стабілізації, слідкування, програмних) у загальному випадку можна забезпечити такі ж змиви регульованої величини $x(t)$, за якої відхилення від

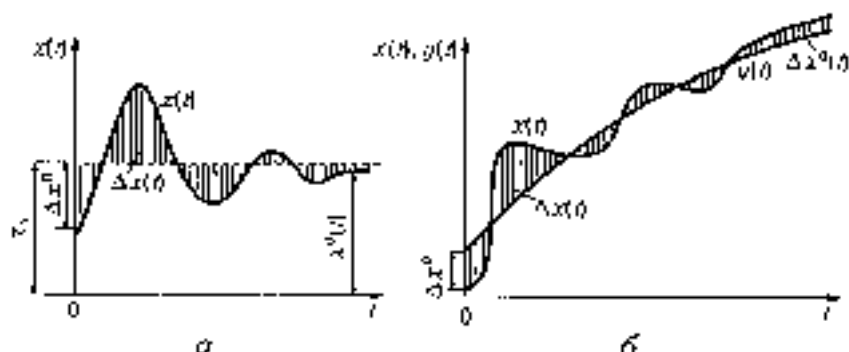


Рис. 6.1

доцільного значення не перевищує б допустимих відхилень за технологічними умовами. Звідси цього параметри і виш регулятора мають бути узгоджені з параметрами і динамічними характеристиками об'єкта.

Основними причинами виникнення помилок в САР є: виникнення САР (при появі помилкового розузгодження); її перенастроювання; зміна величини і виду збурення (збурень).

Відхилення в системі в разі виникнення або перекладоження випливають внаслідок інерційності об'єкта (системи). Наявність початкового розузгодження, як правило, призводить до появи перерегулювання в системі.

Крім вказаних вище основних причин, помилки в САР можуть виникати також як результат зміни параметрів (про це детальніше викладено в п. 5.4).

Статичну помилку лінійної САР, на об'єкт якої діють збурення $f, f_1, \dots, f_n$, з урахуванням принципу суперпозиції можна визначити як суму помилок

$$\Delta x_{\text{ст}} = \Delta x_{\text{ст}} + \Delta x_{\text{ст}} + \Delta f_1 + \dots + \Delta f_n, \quad (6.4)$$

де $\Delta x_{\text{ст}}$, $\Delta x_{\text{ст}}$ — статичні помилки вимірності і заданого елементів; $\Delta f_1, \dots, \Delta f_n$ — статичні помилки системи, спричинені відповідним збуренням.

Якщо $\Delta x_{\text{ст}} \neq 0$, то система є *статичною*, а при $\Delta x_{\text{ст}} = 0$ — *астатичною*.

Для слідкувальної (програмної) системи рівняння процесу регулювання, записане згідно з (3.82) у виключеннях,

$$[P(p) + Q(p)]\Delta y(t) = S(p)P_1(p)\Delta f(t) + Q_1(p)P_2(p)\Delta y(t). \quad (6.5)$$

Помилку програмної системи за збуренням $\Delta f(t)$ знаходять за умови $\Delta y(t) = 0$. За тієї самої умови знаходять помилку і в системах стабілізації.

Помилку за заданим сигналом $\Delta y(t)$ визначають за умови $\Delta f(t) = 0$.

Помилки слідкувальної системи, записані через передаточні функції за збуренням і заданим, матимуть вигляд

$$\Delta x(t) = W^*(p)\Delta f(t) + W^*(p)\Delta y(t) \quad (6.6)$$

або

$$\Delta x(t) = \frac{W^*(p)}{1 + W(p)}\Delta f(t) = \frac{W^*(p)}{1 + W(p)}\Delta y(t), \quad (6.7)$$

де $W^*(p)$, $W^*(p)$ — передаточні функції відповідно об'єкта за збуренням і системи за заданням; $W(p)$ — передаточна функція регулювальної системи.

Статичну помилку в цьому разі можна знайти при $t \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow 0$):

$$\Delta x(t) = \Delta x_{\text{ст}} = \left. \frac{W^*(p)}{1 + W(p)} \Delta f(t) \right|_{p=0} = \left. \frac{W^*(p)}{1 + W(p)} \right|_{p=0} \Delta y(t). \quad (6.8)$$

У слідкувальних (програмних) системах (рис. 6.2) ланкою до слідкують величини розумодження $e(t)$ на виході вузла порівняння, яку в цьому разі називають *помилкою слідкування* (або просто помилкою):

$$e(t) = y(t) - x(t). \quad (6.9)$$

Оскільки вузол порівняння ВП є безінерційною ланкою з коефіцієнтом передачі, що дорівнює одиниці, то передаточна функція слідкувальної системи за помилкою матиме вигляд

$$W^{-1}(p) = \frac{v(t)}{y(t)} = \frac{1}{1 - W(p)}. \quad (6.10)$$

Рівняння помилки в цьому разі запишеться так:

$$e(t) = W^{-1}(p)y(t) = \frac{1}{1 - W(p)} y(t). \quad (6.11)$$

6.2

Типові режими роботи і знаходження помилок САР

Як видно з наведених вище виразів для помилок, і статична $\Delta x_{\text{ст}}$, і динамічна $\Delta x(t)$ помилки залежать від відповідних передаточних функцій, зовнішніх збурень і задаючих сигналів.

Типові режими роботи САР. За характером зовнішніх збурень розрізняють такі типові режими роботи САР.

1. Статичний режим — режим, за якого всі зовнішні дії на систему з усіх координат системи не змінюються, тобто

$$f(t) = \text{const}; \quad y(t) = \text{const}. \quad (6.12)$$

2. Усталений динамічний режим — режим, за якого зовнішні дії на систему змінюються за деяким законом. Такі режими характерні для елітакісальних і програмних САР.

Залежно від характеру дії збурення існують відповідно такі ж змінні збурення:

1) для (збурення) змінюється зі сталого швидкістю:

$$df/dt = p f - v = \text{const} \quad \text{або} \quad dy/dt = p y - v = \text{const}, \quad (6.13)$$

в цьому випадку $f = v/p = \text{const}$; $y = v/p = \text{const}$,

2) дія на систему змінюється зі сталим прискоренням:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = p^2 y - a = \text{const}, \quad (6.14)$$

при цьому $y = a/p^2$.

3) задаючи для змінюється за гармонічним законом

$$y(t) = y_{\max} \sin \omega_2 t, \quad (6.15)$$

де $y_{\max}$ – амплітуда значення заданого сигналу, ω_2 – частота сигналу.

В усталеному динамічному режимі помилка слідкувальної (програмної) системи змінюватиметься з тією самою частотою, але зі зсувом за фазою φ .

$$\Delta x(t) = \Delta x_{\max}, \text{ з фазою } \varphi.$$

Знаходження помилок САР. Для знаходження помилок САР (особливо слідкувальних і програмних САР, які віють в умовах зміни зовнішніх збурень і сигналів заданої значення поширення діє такий метод *коefficientів помилок*. Цей метод базується на положенні, що функції зовнішніх збурень диференційовані й похідні збурень з часом зменшуються, а процес є затухаючим.

Нехай зображення відхилення регульованої величини від заданого (початкового) значення, яке є по суті помилкою системи стабілізації, має вигляд

$$\Delta x(p) = W^f(p) \Delta f(p) = \frac{W^f(p)}{1 + W(p)} \Delta f(p). \quad (6.16)$$

Розкладемо передаточну функцію в показниковий ряд Маклорена:

$$W^f(p) = C_0 + C_1 p + \frac{C_2}{2!} p^2 + \dots + \frac{C_n}{n!} p^n,$$

помилка при цьому запишеться у вигляді

$$\Delta x(p) = \left[C_0 + C_1 p + \frac{C_2}{2!} p^2 + \dots + \frac{C_n}{n!} p^n \right] \Delta f(p).$$

Переходячи до оригіналу помилки, отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta x(t) = & C_0 \Delta f(t) + C_1 \frac{d\Delta f(t)}{dt} + \\ & + \frac{C_2}{2!} \frac{d^2 \Delta f(t)}{dt^2} + \dots + \frac{C_n}{n!} \frac{d^n \Delta f(t)}{dt^n}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

З цієї залежності видно, що помилки системи має кілька складових, які, крім першої $C_0 \Delta f(t)$, існують лише при зміні збурення. Коефіцієнти $C_0, C_1, \dots, C_n$ називають *коефіцієнтами помилок*; C_0, C_1, C_2, C_3 — коефіцієнтами відповідно статичної і швидкісної помилок, помилок за прискоренням і ривком.

Для світкульовної (програмної) системи величина розузгодження матиме вигляд

$$\varepsilon(t) = C_0 \Delta v(t) + C_1 \frac{d\Delta v(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!} \frac{d^2 \Delta v(t)}{dt^2} + \dots + \frac{C_n}{n!} \frac{d^n \Delta v(t)}{dt^n}. \quad (6.58)$$

Коефіцієнти помилок можна обчислити за допомогою передаточної функції замкнутої системи діленням многочлена чисельника передаточної функції на многочлен знаменника.

Для системи стабілізації

$$W^f(p) = \frac{W_1^f(p)}{1 + W(p)} = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_0}.$$

Розглянемо методику визначення коефіцієнтів помилок на конкретному прикладі. Нехай на рис. 6.2 об'єкт $W_1(p)$ і регулятор $W_2(p)$ є апериодичними ланками першого порядку:

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}; \quad W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1}.$$

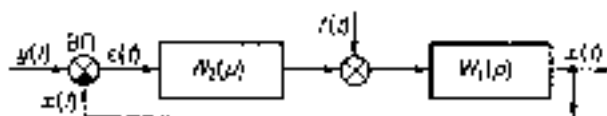


Рис. 6.2

Знайдемо передаточну функцію світкульовної системи за розузгодженням (помилкою):

$$W^f(p) = \frac{1}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k_1 k_2} = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1 + k_1 k_2}.$$

Розділимо многочлен чисельника на многочлен знаменника

$$\frac{(1 + (T_1 + T_2)k_1 + T_1 T_2 k_1 k_2) p^2}{1 + \frac{T_1 + T_2}{1 + k_1 k_2} p + \frac{T_1 T_2}{1 + k_1 k_2} p^2} \left| \begin{aligned} & (1 + k_1 k_2) (1 + (T_1 + T_2)k_1 + T_1 T_2 k_1 k_2) p^2 \\ & + \frac{1}{1 + k_1 k_2} + \left(\frac{1}{1 + k_1 k_2} \right) (T_1 + T_2) \left(1 - \frac{1}{1 + k_1 k_2} \right) p + \\ & + \frac{1}{1 + k_1 k_2} \left(\frac{1}{1 + k_1 k_2} \right) (T_1 T_2 - 1 + k_1 k_2) p^2 + \dots \\ & (T_1 + T_2) \left(1 - \frac{1}{1 + k_1 k_2} \right) p + \frac{T_1 T_2}{1 + k_1 k_2} (T_1 + T_2) \left(1 - \frac{1}{1 + k_1 k_2} \right) p^2 \\ & + \frac{1}{1 + k_1 k_2} \left(\frac{1}{1 + k_1 k_2} \right) (T_1 T_2 - 1 + k_1 k_2) p^2 + \dots \end{aligned} \right|$$

Згідно з викладеним знайдемо коефіцієнти помилок у даній системі:

- *коефіцієнт статичної помилки*

$$C_v = \frac{1}{1 + k_1 k_2}$$

(система статична);

- *коефіцієнт динамічної помилки*

$$C_1 = \frac{1}{1 + k_1 k_2} (T_1 + T_2) \left(1 - \frac{1}{1 + k_1 k_2} \right);$$

- *коефіцієнт помилки за прискоренням*

$$C_2 = \frac{1}{1 + k_1 k_2} \left(T_1 T_2 - \frac{1}{1 + k_1 k_2} \right).$$

Підставивши знайдені значення коефіцієнтів помилок у рівняння помилки і диференціювавши функцію задання $y(t)$, отримаємо відповідні складові помилки, за якими можна знайти і результуючу величину $e(t)$.

6.3

**Основні шляхи підвищення точності керування
Замикання системи**

Розглянемо найвідоміші напрями вирішення проблеми підвищення точності САР:

- 1) використання замкнутих САР і збільшення коефіцієнта підсилення регулятора (системи);
- 2) формування потрібних законів регулювання (введення астатизму регулювання за похідними);
- 3) використання спеціальних структур САР, які реалізують принципи керування, що забезпечують підвищення точності (комбіноване керування, системи зі змінною структурою);
- 4) реалізація принципу інваріантності;
- 5) використання різного виду коректуючих пристроїв

Замикання САР і можливості підвищення точності. Як приклад розглянемо спрощену функціональну схему САР стабілізації (рис. 6.3), яка складається з об'єкта 1 і регулятора 2.

Рівняння замкнутої системи у відхиленнях має вигляд

$$[P(p) + Q(p)]\Delta x = S(p)P_1(p)\Delta f.$$

Нехай об'єкт — аперіодична ланка першого порядку, а регулятор — проста відслідковуюча ланка. Тоді рівняння об'єкта і регулятора

$$(T_1 p + 1)x = k_1 f; \quad u = k_2 x.$$

При цьому $P(p) = (T_1 p + 1)$; $Q(p) = k_1 k_2$; $P_1(p) = 1$; $S(p) = k_0$ (де k_0 — передаточний коефіцієнт об'єкта до збуренням).

Знайдемо помилки, які з'являються в розімкнутих і замкнутих системах. Запишемо рівняння розімкнутої системи в згаданому вигляді

$$P_1(p)\Delta x = Q_1(p)\Delta f.$$

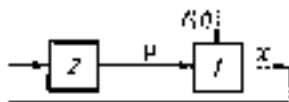


Рис. 6.3

Для наведеної на рис. 6.3 системи його матиме вигляд

$$(T_1 p + 1)\Delta x = k_0 \Delta f,$$

звідки

$$\Delta x = \frac{k_1 \Delta f}{(T_1 p + 1)}.$$

Статична помилка цієї системи при $t \rightarrow \infty$ записується так:

$$\Delta x = \Delta x_{st} = k_1 \Delta f,$$

а розв'язок рівняння –

$$\Delta x = k_1 \Delta f (1 - e^{-t/T_1}).$$

При замиканні системи й рівняння матиме вигляд

$$(T_1 p + 1 + k_1 k_2) \Delta x = k_1 \Delta f,$$

звідки

$$\Delta x = \frac{k_1 \Delta f}{T_1 p + 1 + k_1 k_2}.$$

Виплинемо статичну помилку замкнутої системи ($t \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$)

$$\Delta x = \Delta x_{st} = \frac{k_1 \Delta f}{1 + k_1 k_2}$$

і розв'язок її рівняння

$$\Delta x = \frac{k_1 \Delta f}{1 + k_1 k_2} \left[1 - e^{-\frac{t(1 + k_1 k_2)}{T_1}} \right].$$

Порівняння знайдених значень статичних помилок і розв'язків рівнянь динаміки розімкнутої й замкнутої систем дозволяє зробити такі висновки.

1. Замикання САР дає змогу зменшити статичну помилку і сталу часу в $1 + k_1 k_2$ разів.

2. Графіки часових характеристик, наведених на рис. 6.4 (1 – розімкнута; 2 – замкнута системи), показують, що зчеплення системи дає змогу зменшити також припадність перехідного процесу в $1 + k_1 k_2$ разів.

3. Зі збільшенням коефіцієнта підсилення регулятора k_2 при замиканні системи можна зменшити її статичну помилку.

Замикання системи дозволяє також кардинально змінити динамічні властивості деяких об'єктів. Як вказувалося раніше, об'єкти з

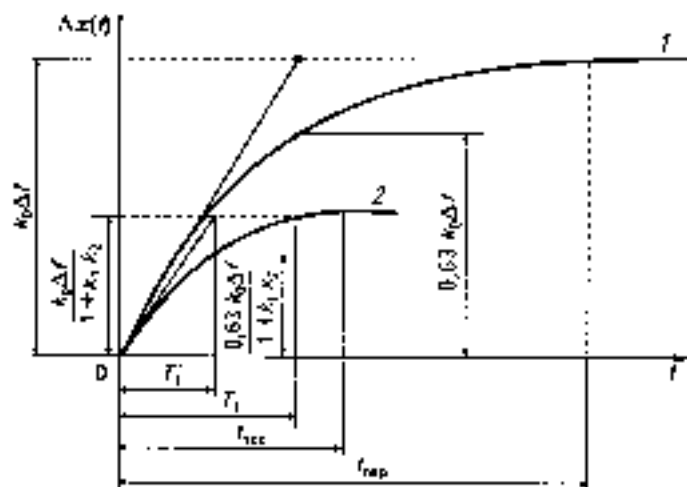


Рис. 6.4

від'ємним коефіцієнтом самовиринювання, які мають нестійкі часо-ді характеристики, без регулятора є нездатними до роботи.

Рівняння такого об'єкта можна записати у вигляді

$$(T_1 p + 1) \Delta x_{\text{max}} = k_1 \Delta f.$$

Розв'язок нього

$$\Delta x_{1, \text{max}} = k_1 \Delta f (e^{-t/T_1} - 1) \rightarrow \infty$$

визначає постійку роботу об'єкта без регулятора (в розімкнутій системі).

При введенні цього об'єкта в замкнуту систему з регулятором 2 (див. рис. 6.3), рівняння якого

$$(T_2 p + 1) p = k_2 \Delta x_{\text{max}},$$

рівняння замкритої системи матиме вигляд

$$\{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k_1 k_2\} \Delta x_{\text{max}} = S(p) P_1(p) \Delta f,$$

де $S(p) = k_{\text{ав}}$, $P_1(p) = T_1 p + 1$.

Позначивши $k_1 k_2 = k_2$, дістанемо характеристичне рівняння замкнутої системи:

$$T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + k_2 = 0.$$

Умови стійкості системи такі: $T_1 > T_2$ і $k_1 > 1$. Отже, нестійкий об'єкт за певного налаштування замкнутої системи може забезпечити її стійку роботу.

6.4

Типові закони регулювання.

Введення астатизму і регулювання за похідними

Розглянувши інші приклади показує, що об'єкти в замкнутих системах набувають нових динамічних і статичних властивостей і характеристик. Властивості замкнутих систем залежать не тільки від характеристик об'єкта і лінійних збурень, а й від особливостей і характеристик регуляторів.

Регулятори поділяють за різними ознаками:

- за видом енергії, що використовується, — механічні, мехатронні, гідравлічні, електричні;
- за принципом керування — керування за відхиленням (помилкою), за збуренням, комбіновані;
- за характером передачі сигналів — неперервні, дискретні;
- за характером зв'язків між елементами системи — ті стійко та змінюю структуру.

У ГАР однією з основних особливостей регулятора є можливість відносно статичні й динамічні помилки САР, що залежить від характеристик регулятора, які визначаються його законом керування (регулювання).

Під *законом регулювання* розуміють залежність вихідної величини регулятора від його вхідної величини x за умови, що навісія самого регулятора не враховується (див. рис. 6.3).

$$y = f(x).$$

Залежно від вигляду функції $f(x)$ існують три основні принципи законів та відповідні їм типи регуляторів: *пропорційний*, який реалізується за допомогою пропорційного регулятора (П-регулятора); *інтегральний* (І-регулятора); *диференціальний* (Д-регулятора).

На практиці найбільшого закористовують комбіновані закони регулювання, які об'єднують поліпшені властивості вказаних вище принципів керування і відомених регуляторів.

Розглянемо основні властивості і особливості названих регуляторів.

Пропорційний закон регулювання (P-регулятор). Це найпростіший закон керування. Він описується залежністю

$$\Delta u = k \Delta x, \quad (6.14)$$

Властивості P-регулятора і характер його дій вже розглядалися при дослідженні впливу замикання системи на її статичну помилку та частотні характеристики.

До переваг P-регуляторів належать простота і надійність, безінерційність, можливість зменшення статичної помилки і прискорення перехідного процесу.

Основні недоліки регуляторів: принципова неможливість впливу на динамічні похибки і неможливість повної ліквідації статичної помилки. Останнє зумовлено тим, що при різкому збільшенні коефіцієнта передачі розімкнutoї системи, яке необхідно для відповідного зменшення статичної помилки, система може стати нестійкою (для зменшення статичної помилки до нуля коефіцієнт передачі має дорівнювати нескінченності).

Інтегральний закон регулювання (I-регулятор). Інтегральний регулятор виконує регулювання за інтегральним законом

$$\Delta u = k \int_0^t \Delta x dt \quad (6.16)$$

В операторній формі він має вигляд

$$\Delta u = k \frac{1}{p} \Delta x, \quad (6.17)$$

Інтегрування вихідної величини об'єкта Δx в інтегральному регуляторі виконується за допомогою серво двигуна, що відповідає введенню в структурну схему САР інтегруючої ланки (рис. 6.5) з передаточною функцією

$$W_i(p) = \frac{\Delta u}{\Delta x} = k, \frac{1}{p}.$$



Рис. 6.5

Нехай передаточна функція замкнутої системи за збуренням до введення інтегрувальної ланки має вигляд

$$W'(\rho) = \frac{\Delta x}{\Delta f} = \frac{W'(\rho)}{1 + W(\rho)},$$

де $W(\rho) = W_1(\rho)W_2(\rho)$ — передаточна функція розімкнутої системи;
 $W'(\rho)$ — передаточна функція об'єкта за збуренням.

При цьому статична помилка

$$\Delta x_{ст} = \left| \frac{W'(\rho)}{1 + W(\rho)} \right|_{\rho=0}, \quad \Delta f \neq 0$$

і система буде статичною.

Після введення інтегрувальної ланки передаточна функція розімкнутої системи

$$W(\rho) = W_1(\rho)W_2(\rho)W_3(\rho) = W(\rho)\xi \frac{1}{\rho},$$

а статична помилка

$$\Delta x_{ст} = \left| \frac{W'(\rho)}{1 + W(\rho)} \right|_{\rho=0}, \quad \Delta f = \left| \frac{W'(\rho)\rho}{\rho + W(\rho)} \right|_{\rho=0}, \quad \Delta f = 0.$$

Відсутність статичної помилки свідчить про те, що система після введення інтегрувальної ланки зі статичної перетворилася на астатичну.

При цьому треба мати на увазі, що інтегрувальну ланку (ланки) слід вводити в структурну схему так, як показано на рис. 6.5, — на

вхід об'єкта, точніше, до точки прикладання збурення, яке діє на об'єкт. Якщо інтегровальну ланку ввести в САР після точки прикладання збурення (рис. 6.6), то, розглядаючи систему стабілізації $y(t) = 0$, лістаємо передаточну функцію за збуренням з урахуванням введення інтегровальної ланки з передаточною функцією $W_1(p) = k \frac{1}{p}$,

які матимемо вигляд

$$W'(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} =$$

$$= \frac{k \frac{1}{p} W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{k W_2(p)}{p + W_1(p)W_2(p)k},$$

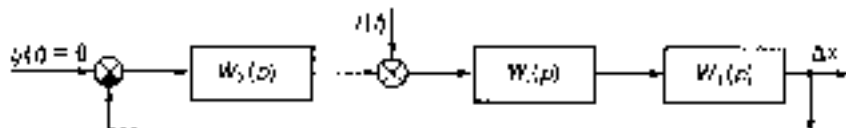


Рис. 6.6

Статичну помилку знайдемо за формулою

$$\Delta x_{ст} = W'(p) \Delta f = \left| \frac{k W_2(p)}{p + W_1(p)W_2(p)k} \right|_{p=0} \Delta f = \frac{k W_2(0) \Delta f}{W_1(0)W_2(0)} \neq 0,$$

оскільки $W_1(0) \neq 0$, $W_2(0) \neq 0$.

Порівняєш нулю $\Delta x_{ст}$ свідчить про неможливість ліквідувати статичну помилку в разі несправильного введення інтегровальної ланки між точкою прикладання збурення й об'єктом.

Введення інтегровальної ланки задля ліквідації статичної помилки і перетворення статичної системи на астатичну називають *введенням астатизму* в систему.

За однієї інтегровальної ланки кажуть про введення астатизму першого порядку, за двох — астатизму другого порядку і т. д. Введення астатизму другого і вищих порядків для зняття лінійної динамічної (виниклої) помилки, які виникають у системі в разі зміни зовнішніх збурень.

Проте слід пам'ятати, що введення в систему з аперіодичними і підсилювальними ланками двох і більше інтегрувальних ланок призводить до структурної нестійкості системи.

Для усунення структурної нестійкості системи інтегровальну ланку охоплюють прямим зв'язком (рис. 6.7). Таку нову ланку називають *іздромною інтегровальною*.

Рівняння іздромної ланки

$$x'_{\text{из}} = x_{\text{из}} + x_{\text{инт}}.$$

Оскільки рівняння вихідної інтегровальної ланки $x_{\text{инт}} = k \int x_{\text{из}} dt$, то вихідний сигнал

$$x'_{\text{из}} = x_{\text{из}} + k \int x_{\text{из}} dt = x_{\text{из}} \left[1 + \frac{k}{p} \right] = \frac{p+k}{p} x_{\text{из}}.$$

Передавальна функція іздромної інтегровальної ланки

$$W_i(p) = \frac{p+k}{p}.$$

Якщо характеристичне рівняння замкнутої системи у разі безінерційного регулятора з $k_1 = k_2$ і об'єкта у вигляді аперіодичної ланки першого порядку з $k = k_1$, $T = T_1$ має вигляд

$$1 + W(p) = 1 + \frac{k \cdot k_2}{T \cdot p + 1} = T_1 p + 1 + k_2 = 0$$

то при введенні в систему двох інтегровальних ланок з коефіцієнтами передачі k_1 і k_2 характеристичне рівняння замкнутої системи запишеться так:

$$1 + W(p)W_1(p)W_2(p) = 1 + \frac{k_1 k_2}{T_1 p + 1} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} = T_1 p^3 + p^2 + k_2 = 0.$$

Відсутність складової $n_2 p$ в цьому рівнянні свідчить про те, що САР є структурно-нестійкою. Замінимо інтегровальну ланку з $k = k_1$ по-



Рис. 6.7

дромною. У цьому разі вигляд характеристичного рівняння замкнутої системи відповідатиме структурно-стійкій системі:

$$1 + W(p)W_1(p)W_2(p) = \\ = 1 + \frac{k_1 k_2}{T_1 p + 1} \frac{k_1}{p} \frac{p + k_2}{p} \cdot T_1 p^2 + p^2 - k_1 k_2 k_1 p + k_2 = 0.$$

Отже, заміна інтегрувальної ланки іздромною дає змогу структурно-нестійку систему перетворити на структурно-стійку.

Проаналізуємо вплив введення астатизму першого і другого порядків у САР за допомогою методу коефіцієнтів помилок.

Розглянемо слідкувальну систему з об'єктом у вигляді аперіодичної ланки першого порядку з передаточною функцією $W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}$ і безінерційним регулятором з передаточною функцією $W_2(p) = k_2$.

Передаточна функція замкнутої системи за помилкою матиме вигляд

$$W'(p) = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{1}{1 + \frac{k_1 k_2}{T_1 p + 1}} = \frac{T_1 p + 1}{T_1 p + 1 + k_2}.$$

Знайдемо коефіцієнти помилок. Розкладаючи передаточну функцію в ряд, розділямо чисельник на знаменник.

$$\frac{1 + T_1 p}{1 + \frac{T_1 p}{1 + k_2}} = \frac{(1 + k_2) + T_1 p}{1 + \frac{T_1 p}{1 + k_2}} = \frac{1}{1 + k_2} + \frac{1 - \frac{1}{1 + k_2}}{1 + k_2} T_1 p \\ = \frac{T_1 p \left(1 - \frac{1}{1 + k_2} \right)}{1 + k_2} = \frac{T_1 p \left(1 - \frac{1}{1 + k_2} \right)}{0}.$$

У цьому разі

$$W'(p) = \frac{1}{1 + k_2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{1 + k_2} \right) T_1 p}{1 + k_2} = C_0 + C_1 p.$$

де $C_0 = \frac{1}{1 + k_2} \neq 0$; $C_1 = \left[\frac{k_2}{(1 + k_2)^2} \right] T_1$. Коефіцієнт $C_0 \neq 0$, тому система є статичною.

Після введення в систему астизму першого порядку за рахунок введення інтегровальної ланки з передаточною функцією $W_1(p) = \frac{1}{p}$ передаточна функція матиме вигляд

$$W^*(p) = \frac{1}{1 + W(p) \cdot \frac{1}{p}} = \frac{1}{1 + \frac{k_1 k_2}{T_1 p + 1} \cdot \frac{1}{p}} = \frac{T_1 p^2 + p}{T_1 p^2 + p + k_1 k_2}, \quad k_1 k_2 = k_2.$$

Знайдемо коефіцієнти помилок:

$$\frac{p + T_1 p^2}{p^2 + \frac{1}{k_2} p^2 + \frac{T_1}{k_2} p} \left[\frac{k_2 + p + T_1 p^2}{k_1 p + \frac{1}{k_2} \left(T_1 - \frac{1}{k_2} \right) p^2} \right] =$$

а також передаточну функцію після розкладання в ряд у загальному вигляді

$$W^*(p) = C_0 + C_1 p + C_2 p^2 + \dots$$

де $C_0 = 0$; $C_1 = \frac{1}{k_2}$; $C_2 = \frac{1}{k_2} (T_1 - \frac{1}{k_2})$

Отже, як зазначалося раніше, після введення в систему однієї інтегровальної ланки (астизму першого порядку) статична система перетворилася на астатичну ($C_0 = 0$). При цьому в системі зникли помилки за швидкістю ($C_1 \neq 0$) і прискоренню ($C_2 \neq 0$). Для усунення швидкісної помилки необхідно ввести в систему астизм другого порядку. Тоді при двох інтегровальних ланках передаточна функція

$$W^*(p) = \frac{1}{1 + W(p) \frac{k_1 k_2}{p^2}} = \frac{T_1 p^2 + T_1}{T_1 p^2 + p^2 + k_2},$$

якщо $C_0 = 0$; $C_1 = 0$; $\frac{C_2}{2} = \frac{T_1}{k_2}$.

Отже, статична і динамічна помилки в системі відсутні. Але, як було показано раніше, при двох інтегровальних ланках система є структурно-нестійкою, тому наведені результати мають чисто теоретичне значення.

Знайдемо значення коефіцієнтів помилки у структурно-стійкій схемі з двома інтегровальними ланками, одна з яких є безрозмірною.

Згідно з викладеним раніше маємо

$$W'(p) = \frac{1}{1 - W(p)} \cdot \frac{k_1}{p} \cdot \frac{p + k_2}{p} = \frac{T p^2 + p^2}{T p^2 + p^2 + k_1 k_2 k_3 p + k_2},$$

де $k_2 = k_1 k_3 k_4 k_5$:

$$\begin{aligned} &= \frac{p^2 + T_1 p^1}{p^2 + \frac{1}{k_2} p^1 + \frac{1}{k_2} p^0} = \dots = \left[\frac{\frac{k_2}{k_2} + k_2 \frac{k_2}{k_2} \frac{k_2}{k_2} p + p^2 + T_1 p^1}{\frac{k_2}{k_2} p^2 - \frac{1}{k_2} \left[T_1 - \frac{1}{k_2} \right] p^1} \right] \\ &= \left[\frac{T - \frac{1}{k_2} \left[p^1 - \dots \right]}{\left(T_1 - \frac{1}{k_2} \right) p^1 + \dots} \right]. \end{aligned}$$

Оскільки $C_0 = 0$; $C_1 = 0$; $\frac{C_2}{2} = \frac{1}{k_2}$; $\frac{C_3}{6} = \frac{1}{k_2} \left(T - \frac{1}{k_2} \right)$, то видно, що в

системі немає динамічної помилки. Для усунення помилки за прискоренням ($C_2 = 0$) слід ввести в систему астатичну ланку третього порядку, що можна зробити, якщо ввести ще одну безрозмірну ланку.

Наведені результати досліджень свідчать про переваги інтегровальних регуляторів, які полягають у можливості усунення різних помилок і підвищенні статичної та динамічної точності системи.

Проте інтегровальні регулятори мають також суттєві недоліки. Так, порівняючи пропорційний та інтегровальні закони регулювання, бачимо, що за інтегрального закону регулювання дія регулятора проявляється лише через деякий час. Тому помилка, що виникла, усунеться не одразу, а з появою. Це може призвести до небажаних коливань у системі, зміщення характеру перехідного процесу і навіть втрати стійкості системи. Крім того, усунення калібра дина-

мінних складових помилки потребує введення відповідної кількості інтегральних і диференціальних ланок, що підвищує складність системи.

Диференціальний закон регулювання (Д-регулятор). За допомогою Д-регулятора забезпечується подання на вхід об'єкта величини, пропорційної швидкості зміни вихідної величини (помилки)

$$\Delta u = k \frac{d\Delta x}{dt}, \quad (6.12)$$

аби в операторній формі запису

$$\Delta u = kp\Delta x. \quad (6.13)$$

Диференціальний закон керування реалізується за допомогою диференціювальних ланок.

При появі в системі внаслідок відповідної дії збурень помилок за швидкістю, прискоренням, рівномі для їх усунення на вхід об'єкта потрібно подати відні величини, пропорційні відповідному степеню похідних вихідної величини об'єкта (відхилення). Таке регулювання називають *регулюванням за похідними*.

Практично регулювання за похідними від помилки виконється і того, що система має регулятори, крім самої помилки, також на генерований її зміни (швидкості і зглад зчипи відхилення).

Розглядаючи вплив введення похідних з схемою, подану на рис. 6.5. Передаточні функції ланок мають вигляд

$$W(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}; \quad W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1}; \quad W_3(p) = \frac{k_3}{p}.$$

Запишемо передаточну функцію розімкнутій системі

$$W(p) = \frac{k_2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

де $k_2 = k_1 k_3 k_4$, і передаточну функцію замкнутій системі за помилкою до введення похідної

$$\begin{aligned} W^*(p) &= \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k_2} = \\ &= \frac{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p + k_2}. \end{aligned}$$

Знайдемо коефіцієнти помилок у результаті ділення многочлена чисельника на многочлен знаменника

$$\frac{\rho + (T_1 + T_2)\rho' + T_1T_2\rho''}{\rho + \frac{1}{k_2}\rho' + \frac{1}{k_2}(T_1 + T_2)\rho' - \frac{1}{k_2}T_1T_2\rho''} = \frac{k_2 + \rho + (T_1 + T_2)\rho' + T_1T_2\rho''}{\rho + \frac{1}{k_2}\rho' + \frac{1}{k_2}(T_1 + T_2)\rho' - \frac{1}{k_2}T_1T_2\rho''} +$$

$$\frac{\left[(T_1 + T_2) - \frac{1}{k_2}\right]\rho' + \left[T_1T_2 - \frac{1}{k_2}(T_1 + T_2)\right]\rho'' + \dots}{\left(T_1 + T_2 - \frac{1}{k_2}\right)\rho' + \left[\frac{1}{k_2}(T_1 + T_2) - \frac{1}{k_2}T_1T_2\right]\rho'' + \dots}$$

звідки

$$C_0 = 0; C_1 = 1/k_2; \quad \frac{C_2}{2} = \frac{T_1 + T_2}{k_2} - \frac{1}{k_2^2}; \quad \frac{C_3}{6} = \frac{T_1T_2}{k_2} - 2\frac{T_1 + T_2}{k_2^2} - \frac{1}{k_2^3}.$$

Передавальну функцію вузла введення похідної $W''(\rho)$ можна розглядати як результуючу передавальну функцію двох пореєдано з'єднаних елементів — прямого зв'язку $W_{n1}(\rho) = 1$ і самого диференціального елемента (ланки) — $W_2(\rho) = T_2\rho$. Отже, можна записати

$$W''(\rho) = W_{n1}(\rho) \cdot W_2(\rho) = 1 + T_2\rho.$$

Запишемо передавальну функцію розімкнутої системи з урахуванням регулювання за похідною

$$W_n(\rho) = W(\rho)W''(\rho) = \frac{k_2(1 + T_2\rho)}{(T_1\rho + 1)(T_2\rho + 1)}.$$

і передавальну функцію замкнутої системи за помилкою з урахуванням вузла введення похідної

$$W_n'(\rho) = \frac{1}{1 + W_n(\rho)} =$$

$$= \frac{(T_1\rho + 1)(T_2\rho + 1)}{(T_1\rho + 1)(T_2\rho + 1) + k_2(T_2\rho + 1)} = \frac{T_1T_2\rho^2 + (T_1 + T_2)\rho + 1}{T_1T_2\rho^2 + (T_1 + T_2 + k_2T_2)\rho + 1 + k_2}.$$

Після ділення многочлена чисельника на многочлен знаменника знайдемо значення коефіцієнтів помилок

$$C_0 = 0; C_1 = \frac{1}{k_2}; \quad \frac{C_2}{2} = \frac{T_1 + T_2}{k_2} - \frac{1}{k_2^2} - \frac{T_1}{k_2};$$

$$C_1 = \frac{T_1 T_2}{k_2} \approx \frac{T_1 + T_2 - T_n}{k_2} = \frac{1}{k_1} = \frac{T_n (T_1 + T_2 - T_n)}{k_2^2}.$$

Порівнюючи знайдені значення коефіцієнтів помилок з відповідними значеннями цих коефіцієнтів до введення в закон керування похідної, робимо висновки:

- 1) значення коефіцієнтів C_0 і C_1 не змінилися;
- 2) коефіцієнти C_2 і C_3 зменшилися;
- 3) зміною параметра T_n можна дістати $C_2 = 0$.

Якщо ввести в систему ще один вузол усереднення похідної, то, змінивши відповідним чином сталі часу диференціювальних ланок T_{n1} і T_{n2} , можна дістати $C_2 = C_3 = 0$.

Слід підкреслити, що в усіх наведених прикладах розглядалися ідеальні диференціювальні ланки.

Решами диференціювальна ланка має передавальну функцію вигляду

$$W_{\text{д.р.}}(p) = \frac{T_{\text{д.р.}} p}{T_{\text{д.р.}} p + 1}.$$

Характеристики реальної диференціювальної ланки ті ж самою часу $T_{\text{д.р.}}$ будуть тим ближче до характеристик ідеальної ланки зі зростаючим часу, чим більша нерівність $T_{\text{д.р.}} > T_{\text{д.}}$.

Перевагою регулювання за похідними є швидкість і можливість зменшення швидкоплинних помилок.

Недоліки диференціальних законів керування та відповідних Д-регуляторів такі:

- 1) не можна усунути вплив сталих складових помилки;
- 2) в системах не забезпечується повна компенсація швидкоплинних помилок (бо ідеальне диференціювання принципово неможливе).

Враховуючи, що основні відносно прості закони регулювання в більшості випадків не можуть забезпечити потрібну статичну і динамічну точність, на практиці поширені складніші закони керування (регулювання) і відповідні регулятори.

Пропорційно-інтегральний закон регулювання (PI-регулятор). Цей закон записується в вигляді

$$\Delta u = k \int_0^t \Delta x dt + k \Delta x, \quad (6.24)$$

в операторній формі —

$$\Delta u = k \frac{1}{p} \Delta x + k_1 \Delta x. \quad (6.25)$$

Інтегральна складова в системах з ПІ-регулятором забезпечує введення в статичну, а пропорційна — виправляє швидкодію системи.

Якщо заінтегрувати обидві частини виразу (6.25), то з рівності

$$p \Delta u = k \Delta x + k_1 p \Delta x$$

можна зробити висновок, що ПІ-регулятор забезпечує швидкість зацив вхідної величини об'єкта, яка пропорційна швидкості зміни величини на виході об'єкта, що зумовлює поліпшення динамічних властивостей САР.

Недоліком регуляторів даного типу є неможливість оперативного компенсувати швидкісні помилки.

Пропорційно-диференціальний закон регулювання (ПД-регулятор). Рівняння даного закону має вигляд

$$\Delta u = k \Delta x + k_1 p \Delta x. \quad (6.26)$$

Регулятор оперативно реагує не тільки на саму помилку, а й на швидкість її зміни. Якщо $p \Delta x > 0$, для регулятора тріхстає, при $p \Delta x < 0$ — спадє, що допомагає стабілізувати копіваном, які виникають у системі через інерційність об'єкта.

Особливість ПД-регулятора полягає в можливості мати значинні сигнали на виході за незначної помилки, оскільки за досить малих величин помилки Δx швидкість її зміни $p \Delta x$ може бути великою. Недоліком ПД-регуляторів є неможливість повного усунення статичної помилки.

Пропорційно-інтегрально-диференціальний закон регулювання (ПІД-регулятор). Математичний вираз цього закону має три складові:

$$\Delta u = k \Delta x + k_1 \frac{1}{p} \Delta x + k_1 p \Delta x. \quad (6.27)$$

ПІД-регулятори найскладніші, проте вони об'єднують переваги всіх трьох розглянутих вище простих законів керування, забезпечуючи квітність системи, оперативне регулювання на відхилення та її по-

хідом. Крім розглянутих простих і складних законів керування, можливі й інші ще складені закони керування, які можуть враховувати нелінійності і регулювання за збуреннями.

6.5

Точність САР

в установлених динамічних режимах

Режим зміни збурення зі сталою швидкістю (похідною).

В цьому разі похідна збурення $df/dt = v = \text{const}$ або $pf = v$, звідки $f = v/p$.

Усталена статична помилка за збуренням

$$\Delta x_{\text{уст}} = W'(1)p f = \left. \frac{W_1'(p) v}{1 + W(p) p} \right|_{p=0}.$$

При статичній системі $W_1'(0) = k_1$; $W(0) = k_2$ і тоді

$$\Delta x_{\text{уст}} = \left| \frac{k_1 v}{1 + k_2} \frac{v}{p} \right|_{p=0} = \infty.$$

Звідси випливає, що в статичній системі при зміні збурення зі сталою швидкістю помилка системи неперервно збільшується. Для збільшення помилки необхідно введення астазму в дану систему за допомогою інтегрувальної ланки.

Розглянемо введення астазму першого порядку. Нова передаточна функція розмкненої системи матиме вигляд

$$W'(p) = \frac{1}{p} W(p)$$

При підключенні інтегрувальної ланки до точки прикладання збурення до об'єкта дістанемо передаточну функцію об'єкта за збуренням $W_1'(p)$ при $p = 0$. В цьому разі $W_1'(p) = k_1$. Тоді

$$\Delta x_{\text{уст}} = \left| \frac{k_1}{\left(1 + \frac{1}{k_2}\right)p} v \right|_{p=0} = \left| \frac{k_1 v}{p + k_2} \right|_{p=0} = \frac{k_1 v}{k_2} = \text{const}$$

Відношення $\frac{y}{\Delta x_{\text{вх}}}$ k , називають *добротністю* системи за швидкістю. В розглянутому випадку $k_v = k_1/k_p$.

Фізичний сенс добротності системи полягає в тому, що вона дорівнює швидкості зміни збурення при установлених відхиленні вхідної величини, яке дорівнює одиниці. Отже,

$$k_v = v \text{ (при } \Delta x_{\text{вх}} = 1)$$

Для спількувальних (приріджених) систем (рис. 6.8), де $W_{\Sigma}(p)$ — передаточна функція основного зворотного зв'язку, значення помилки обчислюється за формулою

$$e(t) = y(t) - v(t)W_{\Sigma}(p) \quad (6.28)$$

Передаточна функція за помилкою при наявності інтегрувальної ланки має вигляд

$$W_{\Sigma}(p) = \frac{e(t)}{y(t)} = \frac{1}{1 + W(p)k} \frac{1}{p},$$

а установлене значення помилки при зміні збурення зі сталою швидкістю —

$$e_{\text{уст}} = \left. \frac{1}{1 + W(0)k} \frac{v}{p} \right|_{p \rightarrow 0} = \left. \frac{1}{p + k} v \right|_{p \rightarrow 0} = \frac{v}{k_v},$$

де $W(0)k = k_v$.

У даному разі добротність системи за швидкістю k_v дорівнює k_v .

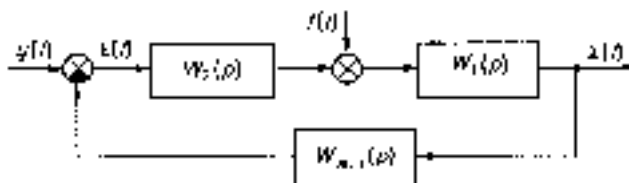


Рис. 6.8

Режим зміни збурення зі сталим прискоренням. На такій-то режимі $\frac{d^2 f}{dt^2} = a = \text{const}$ або $p^2 f = a$, звідки $f = a/p^2$. У статичній системі дістанемо

$$\Delta x_{\text{ст}} = \left| \frac{k_1}{1 + k_1} \frac{a}{p^2} \right|_{p=0} = \infty.$$

В астатичній системі з астатизмом другого порядку при підключенні інтегрувальних ланок до місця прикладання зовнішнього збурення передаточна функція розмкнutoї системи матиме вигляд

$$W'(p) = \frac{1}{p^2} W(p)$$

і тоді

$$\Delta x_{\text{ст}} = \left| \frac{W'(p)}{1 - \frac{1}{p^2} W(p)} \frac{a}{p^2} \right|_{p=0} = \left| \frac{k_1}{p^2 + k_2} a \right|_{p=0} = \frac{k_1}{k_2} a.$$

де $\frac{a}{\Delta x_{\text{ст}}} = \frac{k_2}{k_1} = k_a$ — *добротність системи за прискоренням*, тобто якщо розуміють прискорення, за якого $\Delta x_{\text{ст}} = 1$. При цьому $k_a = k_2$.

Якщо система має скінченне значення добротності за прискоренням, то добротність цієї системи за швидкістю дорівнює нескінченності, а усталене відхилення вихідної величини при збуренні, що змінюється зі сталою швидкістю, дорівнює нулю.

Отже,

$$\Delta x_{\text{ст}} = \left| \frac{k}{1 + \frac{1}{p^2} k_2} \frac{v}{p} \right|_{p=0} = 0.$$

6.6

**Підвищення точності САР
на основі принципу інваріантності**

Принцип *інваріантності* визначається так: САР є інваріантною відносно збурюючої дії, якщо після завершення перехідного процесу, зумовленого початковими умовами, регульована величина і помилка системи не залежать від цієї дії.

Оскільки

$$\Delta x(p) = W'(p) \Delta f(p),$$

то система може бути інваріантною зі умови

$$W'(p) \Delta f(p) = 0$$

Виконати цю умову можна різними способами, в зв'язку з чим розрізняють чотири форми інваріантності. Розглянемо кожну з них.

Перша форма інваріантності. Умовою її виконання: $\Delta f(p) = 0$ (це означає відсутність дії збурення на об'єкт), і тому, що ця форма інваріантності практичного значення не має.

Друга форма забезпечує інваріантність за рахунок виконання умови

$$W'(p) = \frac{W_1'(p)}{1 + W(p)} = 0$$

У цьому разі інваріантність досягається за будь-якого значення (форма) збурення $\Delta f(p)$. Таку інваріантність визначають як *абсолютну*.

Досягти абсолютну інваріантність в принципі можливо а в о м а способами.

Перший з цих способів в тому, що, побудувавши окремі паразитний канал (або канали) передачі збурення (рис. 6.9), можна забезпечити рівність нулю чисельника передаточної функції замкнутої системи за збуренням, яку можна записати у вигляді

$$W'(p) = \frac{\sum W_i'(p)}{1 + W(p)},$$

де $\sum W_i'(p)$ — сума передаточних функцій всіх каналів передачі збурення, $W(p)$ — передаточна функція роз'якненої системи.

6.6 Абсолютна нерозривність САУ
за основним принципу надійності.

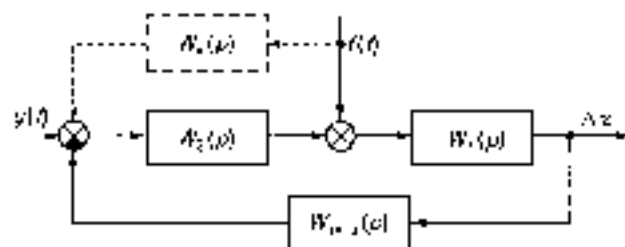


Рис. 6.9

При врахуванні лише одного (основного) каналу передачі збурення, згідно з рис. 6.9, запишемо

$$W'(p) = \frac{W_1'(p)}{1 + W'(p)} = \frac{W_1(p)}{1 + W'(p)W_{n-1}(p)W_2(p)}.$$

При передачі збурення двома каналами маємо

$$W'(p) = \frac{\sum_{i=1}^2 W_i(p)}{1 + W'(p)} = \frac{W_1(p) + W_2(p)W_1'(p)W_2'(p)}{1 + W'(p)}.$$

Умовою інваріантності в даному разі є вираз

$$W_1(p) - W_2(p)W_2'(p)W_1'(p) = 0,$$

звідки знаходимо значення передаточної функції паралельного каналу

$$W_1'(p) = \frac{1}{W_2'(p)}.$$

Ця форма інваріантності реалізується в класі комбінованих САУ, в яких викоріне існуються об'єкти принципів автоматичного керування — за відхиленням (основний замкнутий контур з $W_{n-1}(p)$) і за збуренням (компенсуючий канал з $W_2'(p)$).

Другий спосіб забезпечення абсолютної інваріантності полягає у виконанні умови $W_2'(p) \rightarrow \infty$.

Для практичної реалізації цієї умови необхідно, щоб коефіцієнт підсилення розімкнутої системи k_z дорівнював нескінченності, а не

визначає з того, що $W(p) \neq 1$, як відомо, є лівою частинною характеристичного рівняння замкненої системи. Тому можна записати

$$W(p) + 1 = P(p) + Q(p) = a_0 p^r + a_1 p^{r-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

при $r \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ і $W(0) + 1 = a_n = f(k_z)$.

У той самий час відомо, що різке збільшення коефіцієнта підсилення системи k_z призводить до її нестійкої роботи. Тому досягнення інваріантності за рахунок забезпечення умови $k_z = \infty$ має чисто теоретичне значення.

Третя форма інваріантності має назву *часткової*. Запишемо

$$\Delta f(p) = \frac{A(p)}{B(p)}; \quad W'(p) = \frac{Q(p)}{D(p)},$$

де $A(p)$, $B(p)$, $Q(p)$, $D(p)$ — деякі поліноми.

Згідно з умовою інваріантності можна записати

$$\Delta W(p) = W'(p) \Delta f(p) = \frac{Q(p)A(p)}{D(p)B(p)} = 0. \quad (6.29)$$

При $W'(p) \neq 0$ та $\Delta f(p) \neq 0$ виконання умови інваріантності можливе лише в окремому випадку за певних збурень (відповідних хвиль).

Це можна пояснити так. Розкладемо поліноми $Q(p)$ і $B(p)$ на співмножники вигляду відповідно $(p - p_i)$ і $(p - p'_i)$. Але p_i і p'_i — корені рівнянь $Q(p) = 0$ і $B(p) = 0$. Нехай кожний множитель має по два корені: відповідно p_i, p_{i+1} і p'_i, p'_{i+1} .

Згідно з (6.29) можна записати

$$\Delta W(p) = \frac{Q(p)A(p)}{D(p)B(p)} = \frac{(p - p_{i+1})A(p)}{D(p)(p - p'_i)(p - p'_{i+1})}.$$

Якщо можна забезпечити рівність коренів $p_i = p'_i$ поліномів чисельника і знаменника, то скорочуються відповідні співмножники і тоді поминка

$$\Delta W(p) = \frac{(p - p_{i+1})A(p)}{D(p)(p - p'_{i+1})}.$$

Якщо вилжити, що корінь p_i дорівнює впливу основного збурення на вихідний складову $\Delta_i(t)$ в розв'язку рівняння замкненої системи

$$x(t) = x_{\text{уст}} + x_k(t). \quad (6.30)$$

Якщо $x_{\text{уст}}$ — усталена складова, то за умови $p_i = p_i^*$ вплив кореня p_i «компенсується» наявністю кореня p_i^* . При цьому, якщо знехтувати впливом крутого кореня p_{k+1} , можна вважати, що буде забезпечена наближена рівність нулю вимушеної складової $x_k(t) \rightarrow 0$, отже, наявність самого перехідного процесу $x(t) = x_{\text{уст}}$. Система в цьому разі буде частково інваріантною (стосовно основного збурення). Якщо вплив інших факторів (збурень), які можуть діяти в системі, є відсутнім, то система, інваріантна відносно основного збурення, яке умовно в розглянутому прикладі визначалося коренем p_k , не буде інваріантною стосовно інших збурень. У цьому разі може з'явитися вимушена складова в рівнянні (6.30), але вплив її буде відповідно меншим.

Четверта форма інваріантності забезпечується тим, що в систему вводиться додаткова компенсуюча лнз. величина якої $f_k(p)$ відповідає передаточна функція $W_k(p)$ мають бути підібрані так, щоб виконувалася умова

$$\Delta f(p) = W_k^*(p)\Delta f(p) - W_k^*(p)\Delta f_k(p) = 0.$$

Для виконання цієї умови передаточна функція компенсаційного каналу повинна мати вигляд

$$W_k^*(p) = \frac{W_k^*(p)\Delta f(p)}{\Delta f_k(p)}.$$

6.7

Підвищення якості в комбінованих САР і системах зі змінною структурою

Використання спеціальних структур і відповідних принципів керування є одним із важливих шляхів підвищення якості САР. Прикладом цього є розглянута раніше комбінована САР, яка дає змогу при такому самому значенні коефіцієнта підсилення розімкнутої системи, що її у відкритій системі з керуванням за відхиленням, діяти значно меншою статичною помилкою за рахунок дії розімкнутого компенсаційного каналу.

Застосовуючи принципи інваріантності в комбінованих САР, можна також зменшити динамічні помилки систем.

Успішних *і зміною структури* (див. рис. 1.23) можна забезпечити перехід від однієї структури САР до іншої із досить визмінними, якісними динамічними характеристиками.

Не вдаючись у досить складні питання теорії систем з змінною структурою, яку викладено в окремих монографіях, для індивідування особливостей таких систем і їхніх можливостей розглянемо рис. 6.10, а, б, де 1 — часова характеристика, що відповідає початковому положенню перемісника (1) (див. рис. 1.23); 2 — часова характеристика, що відповідає новій структурі, перехід на яку відбувається в момент t_1 .

Якби САР працювала із незмінною структурою з характеристикою 1, то тривалість перехідного процесу дорівнювала б t_{01} , а процес був би коливальним зі значними динамічними помилками. При роботі на характеристиці 2 процес був би аперіодичним тривалістю t_{02} , яка не дуже відрізняється від t_{01} .

При переході САР в момент t_1 з характеристики 1 на характеристику 2 завдяки зміні структури (рис. 6.10, б) усуваються динамічні помилки і різко зменшується тривалість перехідного процесу (до величини $t_{02} \ll t_0 < t_{01}$).

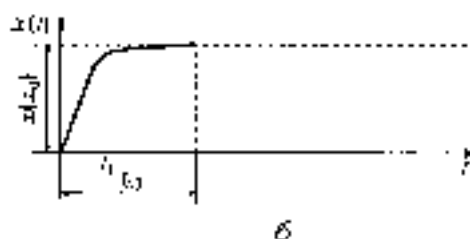
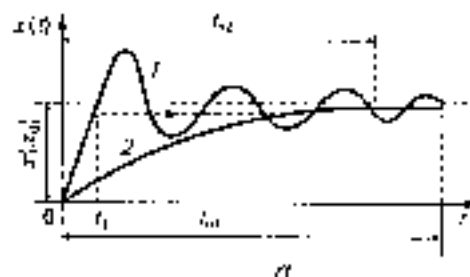


Рис. 6.10

6.8

Використання неодиначних зворотних зв'язків і масштабування

У найпростішому випадку (рис. 6.11) при одноступінчастому зворотному зв'язку помилку системи за збуршенням можна записати у вигляді

$$\Delta x(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} \Delta y(p);$$

система працюватиме без помилки за умови $\Delta x(p) = \Delta y(p)$. Для виконання цієї умови в коло зворотного зв'язку слід ввести ланку з передаточною функцією $W_{\text{н.з.}}(p) \neq 1$. Тоді

$$\Delta x(p) = \frac{W(p)}{1 + W_{\text{н.з.}}(p)W(p)} \Delta y(p)$$

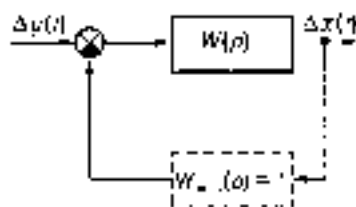


Рис. 6.11

Для виконання умови $\Delta x(p) = \Delta y(p)$ треба, щоб

$$1 + \frac{W(p)}{W_{\text{н.з.}}(p)W(p)} = 1 \quad \text{або} \quad W(p) = 1 + W_{\text{н.з.}}(p)W(p).$$

Звідки

$$W_{\text{н.з.}}(p) = \frac{W(p) - 1}{W(p)}.$$

Оскільки $W(p)$ — передаточна функція розімкнутієї системи, то $W(p)_{p=0} = W(0) = k_z$ і коефіцієнт зворотного зв'язку

$$k_{\text{н.з.}} = 1 - 1/k_z.$$

За цієї умови при безінерційній ланці зворотного зв'язку в одноступінчастій системі можна усунути статичну помилку. Технічна реалізація умови може бути виконана на основі рис. 6.12, де крім одноступінчастого відсімуного зворотного зв'язку введено неолінійний додатний зворотний зв'язок із коефіцієнтом передачі $k_{\text{н.з.}} = 1/k_z$. За такого значення k_z така система працюватиме без статичної помилки.

Масштабування. В статичній системі за одноступінчастого зворотного зв'язку маємо $\Delta x_{\text{ст.}} = k_z \cdot \Delta y_{\text{ст.}} / (1 + k_z)$. Якщо змінити масштаб вхідної

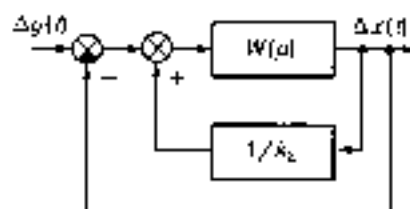


Рис. 6.12.

дії у так, щоб виконувалася рівність $m \cdot \frac{k_x}{1+k_z} = \Delta x$ і забезпечували-
ся умови роботи системи без статичної помилки $\Delta x = \Delta y$, то з рівності
 $m \cdot \frac{k_x}{1+k_z} = 1$ можна дістати необхідну величину масштабу m :

$$m = \frac{1+k_z}{k_x}.$$



Рис. 6.13

Якщо ввести таку ланку з перемножним коефіцієнтом m на вході
в систему (рис. 6.13), то при $k_z = \infty$ можна усунути статичну по-
милку.

6.9

Технічна реалізація коректувальних пристроїв у схемах автоматизованого електропривода

Найпростішими і досить поширеними коректу-
вальними пристроями у схемах автоматизованого
електропривода є пасивні чотириполюсники, побудовані на RC -еле-
ментах (резисторах та конденсаторах). У багатьох книгах з теорії ав-
томатичного керування є спеціальні таблиці, які містять схеми ла-
сних коректувальних пристроїв, передаточні функції, логарифміч-

ні характеристики й формули для розрахунків параметрів, що відповідають цим пристроям. Схеми з характеристики деяких найуживаніших коректувальних пристроїв наведено в табл. 6.1.

Передаточні функції пасивних чотириполюсників, схеми яких подібні до наведених у табл. 6.1, найпростіше визначити таким чином. Опори шлянок кола слід записати в операторній формі, тобто прийняти для ємності $Z_C(p) = 1/jC$ для актив-ного опору $Z_R(p) = R$. Після цього електричне коло слід перетворити на еквівалентний Г-подібний чотириполюсник, схему якого показано на рис. 6.14.

Якщо припустити, що навантаження відсутнє, тобто знехтувати струмом вихідного кола коректувальної ланки порівняно зі струмом вхідного кола, то передаточну функцію можна визначити як відношення

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}.$$

□ **Приклад 6.1.** Визначити передаточну функцію чотириполюсника, схему якого показано на рис. 6.15.

Розв'язання. Параметри еквівалентного Г-подібного чотириполюсника такі:

$$Z_1(p) = R_1 + \frac{1}{C_1 p} = \frac{R_1 C_1 p + 1}{C_1 p}; \quad Z_2(p) = R_2 + \frac{1}{C_2 p} = \frac{R_2 C_2 p + 1}{C_2 p}.$$

Передаточна функція має вигляд

$$W(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{R_2 C_2 p + 1}{(R_1 + R_2) C_1 C_2 p + 1} = \frac{k(T_2 p + 1)}{T_1 p + 1},$$

де

$$k = \frac{C_1}{C_1 + C_2}; \quad T_1 = R_2 C_2; \quad T_2 = \frac{(R_1 + R_2) C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Пасивні чотириполюсники беззв'язні, надійні, мають досить велику різноманітність схем, у кожній з яких можна змінювати параметри в широкій межі. Проте пасивні чотириполюсники послаблюють сигнал

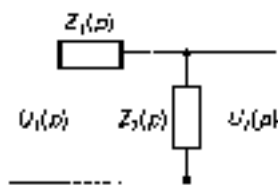


Рис. 6.14

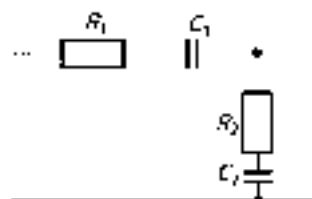


Рис. 6.15

Таблиця 6.1

Но- мер дан- ки	Схема коду	ЛАХ	Передаточна функція формули для розрахунку параметрів
1			$W(p) = \frac{k p}{T p + 1};$ $k = T = RC$
2			$W(p) = \frac{k(T_1 p - 1)}{T_2 p + 1};$ $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; T_1 = R_1 C_2;$ $T_2 = k T_1 = \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2}$
3			$W(p) = \frac{k p (T_2 p - 1)}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)};$ $k = R_2 C_3; T_1 = R_1 C_1;$ $T_2 = R_1 (C_2 + C_3);$ $T_3 = R_2 C_3$
4			$W(p) = \frac{1}{T p + 1}; T = RC$
5			$W(p) = \frac{T p - 1}{T p + 1};$ $T = (R_1 + R_2) C;$ $T_1 = R_2 C$

Закладка табл. 6.1

На- чи- ска	Схема кола	ЛАХ	Передавальна функція, формули для розрахунків параметрів
6			$W(p) = \frac{1(T_2 p - 1)(T_1 p + 1)}{(T_1 p - 1)(T_2 p + 1)} = \frac{(T_2 p + 1)(T_1 p + 1)}{T_2 p + 1}$ $a_0 p^2 + a_1 p + 1$ $a_0 = R_1 R_2 C_1 C_2$ $a_1 = R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2$ $T_1 = R_1 C_1; T_2 = R_2 C_2$
7			$W(p) = \frac{1}{T_1 p + 1}$ $T_1 = R_1 C_1$

нал внаслідок втрат енергії в резисторах, крім того, на їхні характеристики істотно впливає опір навантаження. Тому в схемах автоматизованого електропривода частіше застосовуються коректувальні пристрої на базі операційних підсилювачів.

Визначаючи передавальну функцію кола з операційним підсилювачем, припускаємо, що коефіцієнт підсилення k і вхідний опір $R_{вх}$ приблизно дорівнюють нескінченності; підсилювач вважається безінерційним. Операційний підсилювач має інвертувальний та неінвертувальний входи. Якщо вхідна напруга подається на інвертувальний вхід, то вихідна змінає полярність. Це дає змогу створювати під'єднаний зворотний зв'язок.

Схему коректувального кола з операційним підсилювачем показано на рис. 6.16.

З прийнятого припущення про те, що $R_{вх} \rightarrow \infty$, випливає, що вхідний струм $I_{вх}$ дорівнює нулю, тому струм зворотного зв'язку I_2 дорівнює струму I_1 . Напруга на інвертувальному вході операційного підсилювача $U_{инв}$ дорівнює нулю. Це пояснюється тим, що при

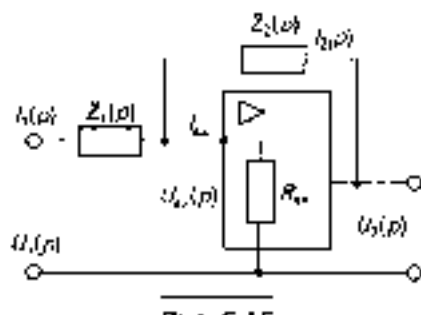


Рис. 6.16

$k = \infty$ будь-яке відхилення $U_{\text{вн}}$ від нульового значення було б нескінченно зменшено, передаве через коло зворотного зв'язку на вхід підсилювача і, будучи інвертованим відносно напруги $U_{\text{вн}}$, скомпенсувало б її. За цих умов досить просто визначити передаточну функцію кола з операційним підсилювачем. Для схеми (рис. 6.16)

$$U_{\text{вн}} = U_1(p) - I_1(p)Z_1(p);$$

$$U_{\text{вн}}(p) = U_1(p) - I_1(p)Z_1(p),$$

але, якщо врахувати, що $U_{\text{вн}} = 0$, $I_1 = I_2$, то

$$U_1(p) = I_2(p)Z_1(p) + U_2(p) = I_2(p)Z_2(p).$$

Звідси передаточна функція матиме вигляд

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = -\frac{Z_1(p)}{Z_2(p)}, \quad (6.31)$$

де $Z_1(p)$, $Z_2(p)$ – повні опори в операторній формі.

Із виразу (6.31) випливає, що вибір відповідних значень $Z_1(p)$ і $Z_2(p)$ навіс можливості на базі операційного підсилювача створити різноманітні типи регуляторів (коректуючих пристроїв).

Пропорційний регулятор (P-регулятор). Схему регулятора показано на рис. 6.17, а. Його передаточна функція має вигляд

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = -\frac{R_2}{R_1} = -k.$$

Інтегральний регулятор (I-регулятор). Схему регулятора показано на рис. 6.17, б. Вважаючи, що $Z_1(p) = R$, $Z_2(p) = 1/Cs$, передаточну функцію дістанемо з (6.31):

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = -\frac{1/Cp}{R} = -\frac{1}{RCp} = -\frac{1}{Tp},$$

де $T = RC$ – стала інтегрування.

Пропорційно-інтегральний регулятор (PI-регулятор). Схему регулятора показано на рис. 6.17, в. Для цієї схеми

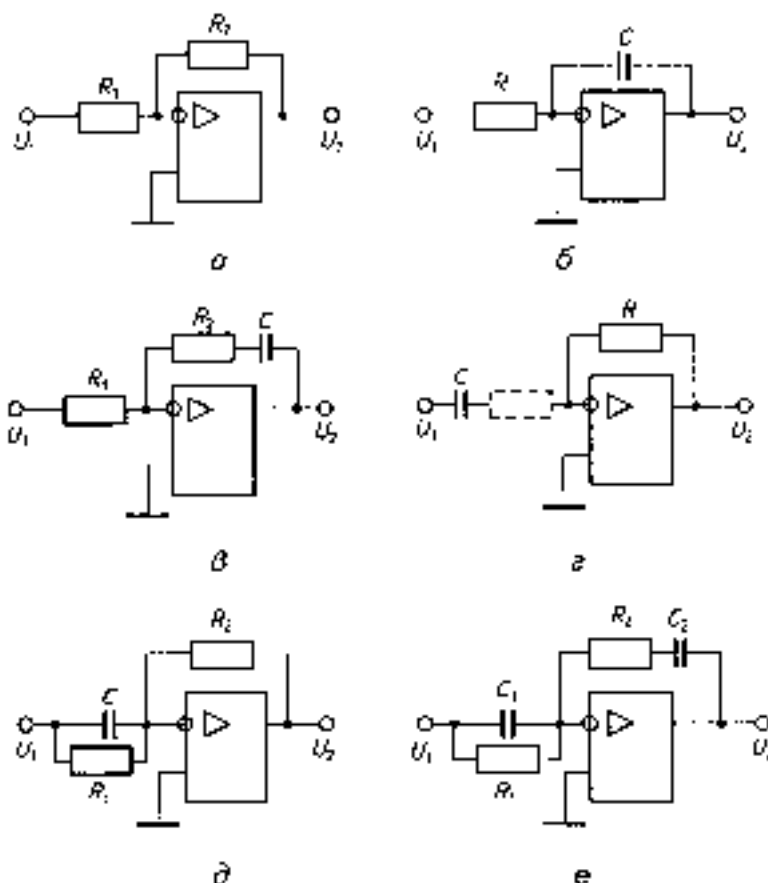


Рис. 6.17

$$Z_1(p) = R_1; \quad Z_2(p) = R_2 + 1/Cp = \frac{R_2 Cp + 1}{Cp}.$$

Тому передаточна функція

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{R_2 Cp + 1}{CR_1 p} = - \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{CR_1 p} \right) = - \left(k_n + \frac{1}{T_i p} \right),$$

де $k_n = R_2/R_1$ — коефіцієнт переданої пропорційної складової;
 $T_i = CR_1$ — стала інтегрування.

Диференціальний регулятор (Д-регулятор). Схему регулятора показано на рис. 6.17, а її математичну схему

$$Z_1(p) = 1/Cp, \quad Z_2(p) = R,$$

тому

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = -RCp = -T_d p,$$

де $T_d = RC$.

Розглянута схема не забезпечує якісного диференціювання, оскільки вона має властивість підсилювати високочастотні перешкоди, які є у вхідному сигналі. Струм перешкоди можна легко обмежити, якщо послідовно з конденсатором C увімкнути резистор із невеликим опором (на рис. 6.17, а цей резистор зображено підтриховою лінією).

Високоякісний Д-регулятор можна дістати, якщо зв'язати зворотного зв'язку виконати інтегратор. Схему такого регулятора зображено на рис. 6.18. Підсилювач DA2, який працює в режимі інтегратора, призначений для збереження відомого знака зворотного зв'язку.

Передавальна функція регулятора має вигляд

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = -\frac{R_2 R_3}{R_1 R_4} R_3 Cp.$$

Поклавши $R_1 = R_2 = R$, $R_4 = R$, дістанемо

$$W(p) = -R_3 Cp = -T_d p,$$

де $T_d = R_3 C$.

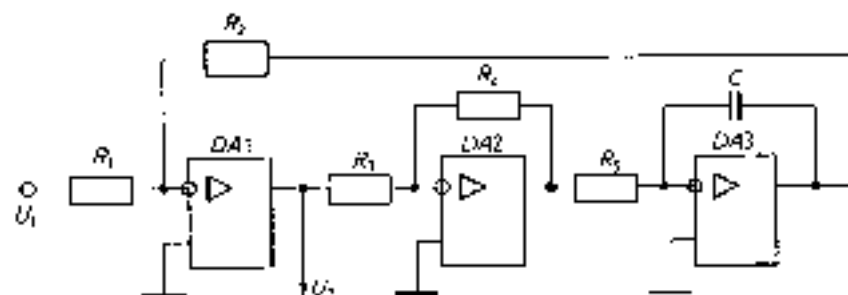


Рис. 6.18

Пропорційно-диференціальний регулятор (ПД-регулятор) Схему такого регулятора показано на рис. 6.17, б. Для неї

$$Z_1(p) = \frac{\frac{1}{C_1} R}{1 - R_1 C_1 p} = \frac{R_1}{R_1 C_1 p + 1}; \quad Z_2(p) = R_2,$$

тому

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = - \frac{R_2 (R_1 C_1 p + 1)}{R_1} = - \left(\frac{R_2}{R_1} + R_2 C_1 p \right) = -(k_n + T_p p),$$

де

$$k_n = R_2 / R_1; \quad T_p = R_2 C_1.$$

Пропорційно-інтегрально-диференціальний регулятор (ПІД-регулятор) Схему регулятора показано на рис. 6.17, в. Для неї

$$Z_1(p) = \frac{R_1}{R_1 C_1 p + 1}; \quad Z_2(p) = R_1 + 1 / C_2 p = \frac{R_1 C_2 p + 1}{C_2 p},$$

а передаточна функція

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = - \frac{(R_1 C_2 p + 1)(R_1 C_1 p + 1)}{R_1 C_2 p} = \\ &= - \left(\frac{R_1 C_2 + R_1 C_1}{R_1 C_2} + R_1 C_1 p + \frac{1}{R_1 C_2 p} \right) = -(k_n + T_p p + 1 / T_i p), \end{aligned}$$

де

$$k_n = (R_1 C_2 + R_1 C_1) / R_1 C_2; \quad T_p = R_1 C_1; \quad T_i = R_1 C_2.$$

Коректувальні пристрої на базі операційних підсилювачів мають такі позитивні властивості, як незалежність коефіцієнта передачі від розкиду параметрів вихідних стабілізуючої дії від'ємного зворотного зв'язку, малий вихідний струм схеми, що забезпечує близький до коластатого ходу режим роботи пристрою, вимкненого до входу операційного підсилювача.

Комбіновані регулятори (ПІ, ПД, ПІД) звичайно дістають за рахунок паралельного з'єднання відповідних простих регуляторів (П, І,

Д) Для підсилювання вхідних сигналів цих регуляторів використовується логатковий операційний підсилювач. Схема у такому разі дещо ускладнюється, але я її не забезпечується можливість незалежного регулювання складових навісного елемента комбінованого регулятора.

6.10

Способи підвищення запасу стійкості

Способи підвищення запасу стійкості, або *демпфуння*, досить різноманітні. В деяких випадках для цього достатньо, не змінюючи структуру системи, змінити коефіцієнт передачі прямого кола, коефіцієнти зворотних зв'язків або, якщо це можливо, став часу елементів САР. Поширеним способом демпфуння є введення в САР додаткових коректувальних ланок. Їх можна вводити послідовно в пряме коло системи, паралельно окремим ланкам, або охоплювати зворотний зв'язком одну або кілька ланок САР. При цьому динамічні властивості лінійних систем можна зробити беззв'язковими, тобто для коректувального пристрою одного виду можна підібрати еквівалентний коректувальний пристрій іншого виду. Найпростіше простежити вплив на частотні характеристики і, отже, на динамічні властивості САР послідовних коректувальних ланок, тому саме для них розглядатимуться способи підвищення запасу стійкості.

Додаткові ланки змінюють частотні характеристики САР, тому їх вплив на зміну запасу стійкості можна простежити за допомогою будь-якого частотного критерію стійкості. Найзручнішим для цієї мети є критерій стійкості Найквіста в логарифмічній формі.

Існують чотири основні способи змінювання частотних характеристик. Розглянемо кожний з них.

Демпфуння з придушенням високих частот. Якщо передаточна функція розімкнutoї стійкої системи становить добуток передаточних функцій мінімально-фазових ланок (безінерційних, апериодичних, колісальних, форсувальних), то достатній запас стійкості можна забезпечити, уніфікуючи послідовно в коло регулювання апериодичну ланку з великою сталою часу T_0 і коефіцієнтом передачі $k = 1$ (див., наприклад, ланку № 4 в табл. 6.1). Передаточна функція такої ланки

$$W'_1(p) = \frac{1}{T_n p + 1}. \quad (6.32)$$

Розглянемо ланку цієї ланки на прикладі статичної системи, передаточна функція якої в розімкненому стані має вигляд

$$W_1(p) = \frac{K(\tau_1 p + 1) \dots (\tau_n p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \dots (T_m p + 1)}, \quad (6.33)$$

де $n \geq m$.

Логарифмічну амплітудну характеристику $L_1(\omega)$ і логарифмічну фазову характеристику $\varphi_1(\omega)$ показано на рис. 6.19, а. Система нестійка, бо на частоті зрізу ω_1 зсув за фазою $\varphi_1(\omega_1)$ менше $-\pi$.

Початкова частина ЛАХ статичної системи має нахил 0 дБ/дек і проходить на рівні $20 \lg K$. Тому за будь-яких значень сталих часу передаточної функції (6.33) завжди можна вказати таку частоту ω_1 , що для всіх частот $\omega < \omega_1$ значення $L_1(\omega)$ дуже мало відрізнятиметься від $20 \lg K$, а значення $\varphi_1(\omega)$ — від нуля. Якщо тепер вибрати сталий час T_n передаточної функції (6.32) такою, щоб частота зрізу ω_2 нової ЛАХ $L_2(\omega)$ була меншою за ω_1 , то в результаті дістанемо стійку систему з достатнім запасом стійкості. Це пояснюється тим, що передаточну функцію розімкнутої системи з коректуючою ланкою наближено, але з досить великою точністю можна подати у вигляді

$$W_2(p) = \frac{K}{T_n p + 1}.$$

оскільки частоти сполучення, які відповідають репті сталих часу передаточної функції (6.33), знаходяться значно правіше від частоти зрізу ω_2 , визначають тільки високочастотні частини ЛАХ і ЛФХ і практично не впливають на стійкість системи.

Отже, ефект демпфування досягається за рахунок того, що введення великого сталих часу T_n робить репту сталих часу відносно малим.

Запас стійкості не зміниться й при збільшенні K , якщо одночасно збільшувати T_n і залишити незмінним співвідношення

$$K/T_n = \omega_2 = \text{const}$$

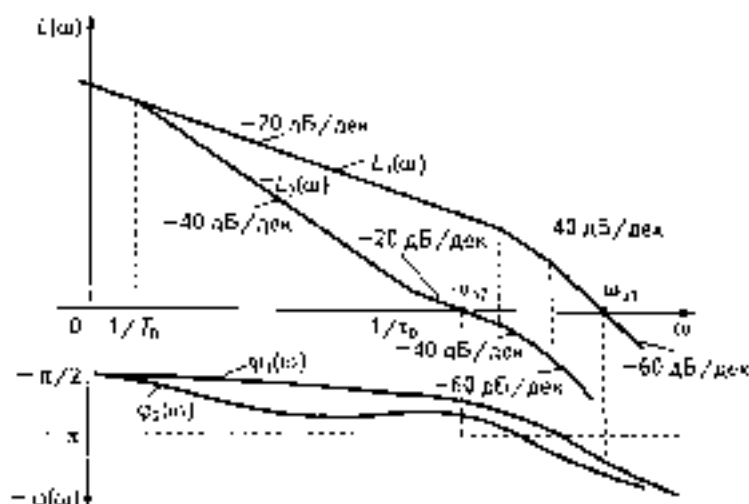
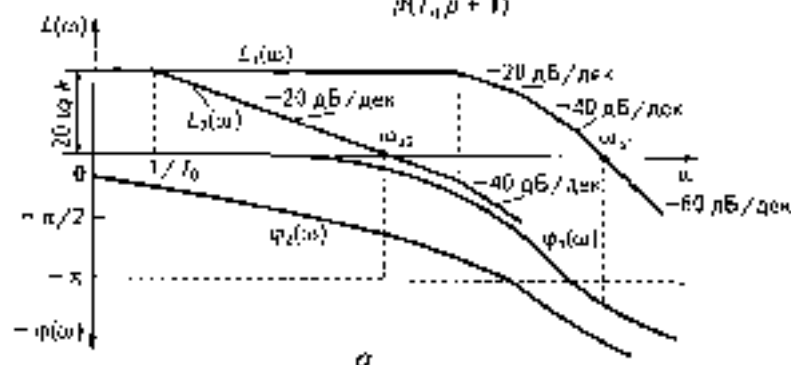
Для демпфування астатичних систем першого порядку, що складаються з мінімально-фазових ланок, можна використати інтегродиференціювальну ланку з передаточною функцією

$$W_k(p) = \frac{\tau p + 1}{T_n p + 1},$$

де $T_n > \tau$, (див. табл. 6.1, ланку № 5).

За досить великих T_n і τ , передаточна функція розімкнутої системи

$$W(p) = \frac{k(\tau p + 1)}{p(T_n p + 1)},$$



б

Рис. 6.19

оскільки і в цьому випадку рештою сталих часів можна знехтувати.

Логарифмічні характеристики, що ілюструють розглянутий випадок, зображено на рис. 6.19, б.

Перевагою наведеного способу демпфування є те, що додаткова ланка з великою сталою часу T_n є фільтром низьких частот і послаблює вплив на систему високочастотних перешкодь, недовіком — тобто зменшення швидкодії системи. Тому демпфування з пружинним високім частот використовується лише в разі, коли з урахуванням умов роботи системи зниження швидкодії є допустимим.

Демпфування з підняттям високих частот. Стійкість і логрибний запас стійкості забезпечуються за рахунок розширення смуги пропускання розімкнутої системи при введенні послідовно в коло регулювання форсувальної ланки з передаточною функцією $W_k(p) = T_k p + 1$. Ця ланка створює додатний зсув за фазою $\varphi_k(\omega) = \arctan \omega T_k$, який у зоні високих частот наближається до 90° . Крім того, ланка збільшує здатність системи пропускати високочастотний сигнал. Бо модуль частотної передаточної функції ланки $A_k(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2 T_k^2}$ зростає при збільшенні частоти.

Вплив форсувальної ланки на запас стійкості системи пояснюється логарифмічними частотними характеристиками розімкнутої системи, показаними на рис. 6.20. Тут $L_1(\omega)$ і $\varphi_1(\omega)$ — логарифмічні характеристики зв'язної системи. Якщо вибрати сталу часу коректу-

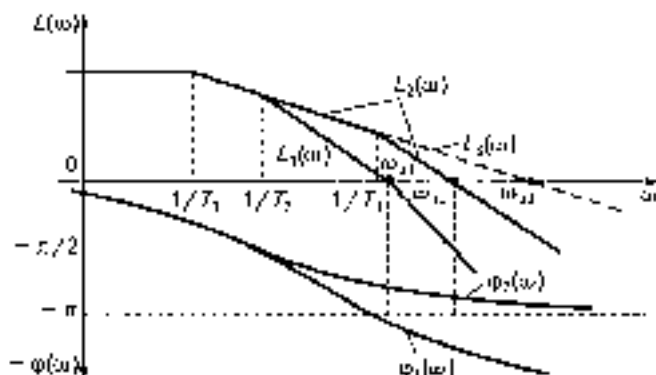


Рис. 6.20

вальної форсувальної ланки $T_c = T_c$, то ЛАХ і ПФХ змінюєть і матимуть вигляд $L_c(\omega)$ (рис. 6б). Служа пропускання системи розшириться і одночасно підвищиться фазова характеристика, що приведе до збільшення запасу стійкості.

Якщо вплив однієї форсувальної ланки на підвищення запасу стійкості буде недостатнім, то можна ввести ще одну ланку. Наприклад, якщо в розглянутому випадку ввести дві коректувальні ланки із загальною передавальною функцією $W_c(p) = (T_c p + 1)(T_{c2} p + 1)$, де $T_{c1} = T_c$ і $T_{c2} = T_c$, то ЛАХ матиме вигляд $L_c(\omega)$ і перетне вісь частот з нахилом -20 дБ/дек. Це, значить, забезпечить прийнятний запас стійкості.

При розгляді цього способу демпфування зроблено припущення, що використання ідеальних форсувальних ланок, які насправді не можна фізично реалізувати, можливе. Практично використовуються реальні форсувальні ланки, наприклад ланка № 2 з табл. 6.1. Передаточна функція такої ланки

$$W_c(p) = \frac{k_c (\tau_c p + 1)}{T_c p + 1},$$

причому $k_c < 1$ і $\tau_c \gg T_c$, а фазова характеристика

$$\varphi_c(\omega) = \arctg \tau_c \omega - \arctg T_c \omega,$$

тому стала часу T_c обмежує діапазон частот, на яких зберігається доданний зсув за фазою. Проте, якщо вибрати $\tau_c \gg T_c$, то вплив T_c на частотах, близьких до частоти зрзу, буде незначним.

Оскільки коефіцієнт передачі коректувальної ланки менше одиниці, слід вжити зусиль для збільшення коефіцієнта передачі розімкнутої системи в $1/k_c$ разів. Можна також використати ПД-регулятор на базі операційного підсилювача (див. рис. 6.17, д).

Замість постійних форсувальних ланок можна використовувати еквівалентні за впливом численні інтегральні зв'язки, які містять апериодичні ланки.

Розглянутий спосіб підвищення запасу стійкості теоретично є універсальним і дає бажаний результат практично за будь-якої передаточною функцією вихідної системи, включаючи системи з неминимально-фазовими ланками. Крім того, одночасно зі збільшенням запасу стійкості підвищується швидкодія системи. Проте практичне застосування цього способу значно обмежується, бо при розширенні

смуги пропускання системи зростає вплив високочастотних перешкод.

Демпфування з придушенням середніх частот. Ефект демпфування досягається за рахунок послідовного шматкування інтегро-диференціальної ланки з передаточною функцією

$$W_k(p) = \frac{(T_{1k}p + 1)(T_{2k}p + 1)}{(T_{1k}p + 1)(T_{2k}p + 1)} \quad (6.74)$$

Схему такої ланки наведено в габл. 6.1 (ланка № 6).

Вплив ланки № 6 на запас стійкості можна пояснити, розглянувши логарифмічні характеристики на рис. 6.21. ЛАХ розімкнутої вихідної системи позначено $L_1(\omega)$. Статі часу ланок, що зумовлюють зміни нахилів ЛАХ, позначено T_1, T_2, T_1 . Якщо вибрати статі часу інтегродиференціальної ланки з умов $T_{1k} = T_1, T_{2k} = T_1, T_{1k} = T_1^2/T_2$, то після її введення в коло регулювання логарифмічні характеристики матимуть вигляд $L_2(\omega)$ і $\varphi_2(\omega)$. Нахил ЛАХ до частоти зрізу становить -20 дБ/дек, що забезпечує прийнятний запас стійкості.

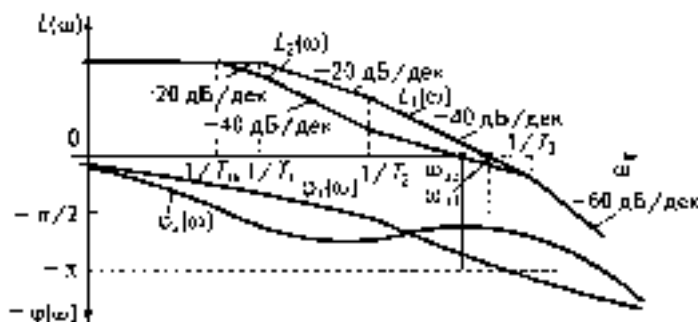


Рис. 6.21

При демпфуванні з придушенням середніх частот швидкодія системи зменшується, але не істотно. Цей вид демпфування є найпоширенішим.

Демпфування з введенням від'ємних зсувів за фазою

Цей вид демпфування дає добрі результати за наявності в системі консервативної ланки або коливальної ланки з малим згасанням.

Для демпфування у прямих коло системи вводиться немінімально-фазова ланка, наприклад, з передаточною функцією

$$W_c(p) = \frac{1 - T p}{T p + 1}$$

(ланка № 7 з табл. 6.1). Ланка № 7 не впливає на амплітудно-частотну характеристику, бо $A_c(\omega) = 1$, але створює плазмічний зсув за фазою

$$\varphi_c(\omega) = \arg(1 - \omega T) - \arg(1 + \omega T) = -2 \arctg \omega T.$$

Виходячи з того, що коректувальна ланка є немінімально-фазовою, її вплив на властивості системи зручніше розглянути, користуючись не логарифмічними, а звичайними амплітудно-фазовими характеристиками розімкнутої системи. Припустимо, що передаточна функція розімкнутої системи

$$W_1(p) = \frac{R(p)}{p(T^2 p^2 + 1)Q_1(p)},$$

де $R(p)$, $Q_1(p)$ – поліноми, корені яких мають від'ємні дійсні частини, тобто до складу системи ввійшли консервативні та інтегрувальні ланки.

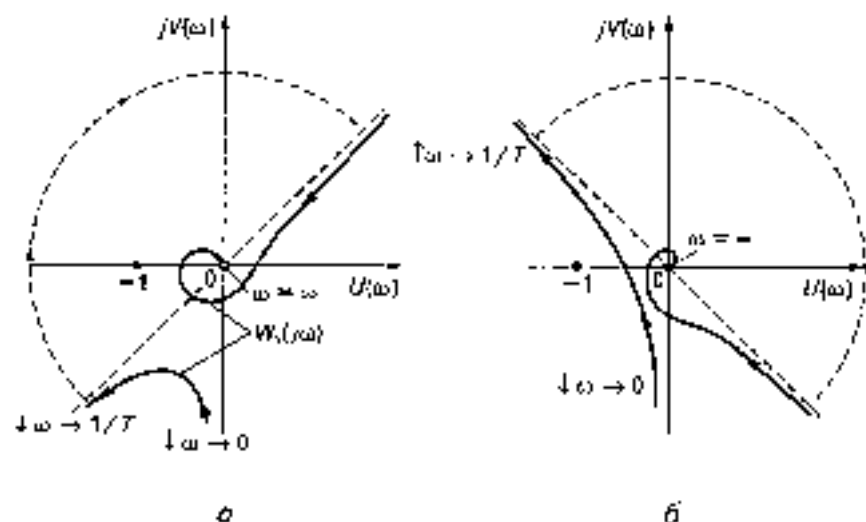


Рис. 6.22

Амплітудно-фазову характеристику розімкнутої системи $W_1(j\omega)$ показано на рис. 6.22, а. При $\omega = 0$ і $\omega = 1/T$ модуль $W_1(j\omega)$ прямує до нескінченності, а аргумент на частоті $1/T$ стрибком дорівнює -180° , тому розриви АФХ доповнюються півколами нескінченного радіуса у напрямі ходу стрілки годинника.

АФХ розімкнутої системи оминає точку з координатами $(-1, j0)$, отже, замкнута система нестійка. Додавання відривного зв'язку за фазою (див. табл. 6.1, ланку № 7) пригнітить до «закручування» АФХ за ходом стрілки годинника (рис. 6.22, б). У результаті АФХ розімкнутої системи не охоплюватиме точку $(-1, j0)$ і замкнута система буде стійкою.

Розглянуті способи деміфункції є основними, але вони лише якісно ілюструють ідеї, які можна застосовувати для підвищення запасу стійкості. Ці способи можуть поєднуватися залежно від частотних характеристик вихідної системи. Наприклад, може виникнути потреба поглибити згаснення середніх частот і знизити високіх, підвищення високіх частот і придушення окремої їх зони тощо.

6.11

Синтез коректувальних пристроїв методом ЛАХ

Одним з найефективніших інженерних методів синтезу систем автоматичного керування є метод, в основу якого покладено використання ЛАХ розімкнутої системи. Ідея методу ґрунтується на тому, що для стійких мінімально-фазових систем існує однозначний зв'язок між перехідною характеристикою замкнутої системи і виглядом ЛАХ відповідної розімкнутої системи. Виходячи з бажаного вигляду перехідного процесу, будують ЛАХ, яка відповідає такому процесу (бажану ЛАХ). Далі, знаючи вигляд бажаної ЛАХ, до неї наближують ЛАХ вихідної системи, запроваджуючи різні коректувальні пристрої.

Будь-яка САР з електроприводом складається з незмінної частини, до якої належить об'єкт регулювання, електродвигун, силовий керуючий перетворювач, а також елементи гальмозного зворотного зв'язку та порівняння. Об'єкт регулювання вважається піданим при

проектуванні САР, двигун і перетворювач вибирають, виходячи з технологічних характеристик об'єкта. Природно, що ці елементи не підлягають зміні при корекції динамічних властивостей САР. Незмінними звичайно виходяться також елементи, що забезпечують потребу в точності роботи системи в установлених режимах — підсилювач, а в астатичній системі — інтегрувальний елемент. Елементи САР, що не змінюються, визначають ЛАХ вихідної (нескоректованої) системи.

Бажану ЛАХ, яка визначає потрібну якість САР, умовно поділяють на три частини: низькочастотну $L_{\omega_1}(\omega)$, середньочастотну $L_{\omega_2}(\omega)$ і високочастотну $L_{\omega_3}(\omega)$. Можливий вигляд бажаної ЛАХ показано на рис. 6.23.

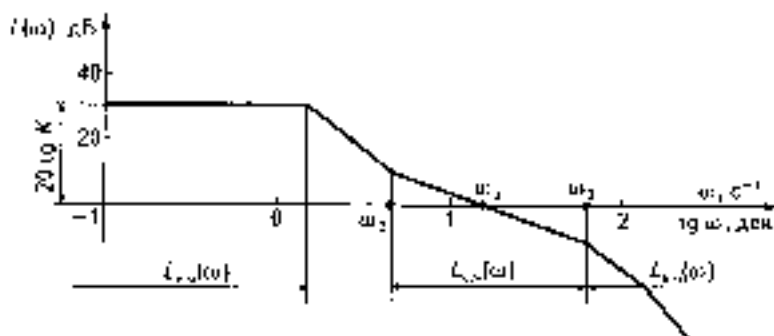


Рис. 6.23

До *низькочастотної* частини ЛАХ належить ділянка характеристики, нахил якої не змінюється при $\omega \rightarrow 0$. Вона проходить через точку з координатами $L(\omega) = 20 \lg K$, $\lg \omega = 0$, де K — коефіцієнт передачі розімкнутої системи, і має нахил 0 дБ/дек для статичних систем, -20 дБ/дек — для астатичних систем першого порядку і -40 дБ/дек — для астатичних систем другого порядку. ЛАХ на рис. 6.23 відповідає статичній системі.

Низькочастотна частина ЛАХ визначається коефіцієнтом передачі розімкнутої системи K і порядком астатизму, отже, вона характеризує точність роботи системи в установлених режимах. Якщо до незмінюваної частини системи належать елементи, що забезпечують

потрібну точність роботи САР в установлених режимах, то низькочастотні частини бажаної ЛАХ і ЛАХ вихідної системи збігаються.

До *середньочастотної* частини належить діяння ЛАХ з поміркованим нахилом, що проходить через частоту зрізу ω_c . Ця частина ЛАХ є найважливішою, бо вона переважно визначає якість перехідних процесів. Основними параметрами, які характеризують середньочастотну частину, є її нахил і частота зрізу. Для задовільної якості перехідних процесів замкнутої системи необхідно, щоб нахил ЛАХ на частоті зрізу дорівнював -20 дБ/дек. Якщо нахил ЛАХ на частоті зрізу становить -40 дБ/дек, то перехідний процес має велике перерегулювання, а при нахилі -60 дБ/дек система, як правило, буде нестійкою. Частота зрізу ω_c визначає швидкодію САР. Швидкодія зростає при збільшенні ω_c .

Високочастотна частина ЛАХ $L_d(\omega)$ знаходиться в зоні від'ємних децибелів, тому майже не позначається на якості перехідного процесу і впливає лише на його початок. Власне кажучи, краще мати якомога більший нахил асимптот високочастотної частини, бо це зменшує вплив високочастотних перешкод. У деяких випадках високочастотну частину ЛАХ взагалі не беруть до уваги.

Для побудови бажаної ЛАХ, виходячи із заданих швидкості до якості перехідних процесів, використовуються різні методи. Розглянемо найпоширеніші з них.

Метод Соловйова. Розглянемо цей метод стосовно астатичної системи першого порядку, в якій низькочастотні асимптоти з нахилом -20 дБ/дек вихідної $L_d(\omega)$ і бажаної ЛАХ $L_b(\omega)$ збігаються і проходять через точку з координатами $L(\omega) = 20 \lg K$, $\lg \omega = 0$ (рис. 6.24).

Вихідними даними для побудови бажаної ЛАХ є час регулювання t_r і перерегулювання σ . Можуть бути заданими також максимальне прискорення $a_{\max}$ та «початков» розузгодження вихідної координати x_r .

Бажану ЛАХ $L_d(\omega)$ будують у такій послідовності.

1. Вибирати частоту зрізу, виходячи з умови

$$\omega_{c1} \leq \omega_c \leq \omega_{c2},$$

де ω_{c1} — мінімальне значення частоти зрізу, за якого час регулювання не перевищує заданий; ω_{c2} — максимальне значення частоти

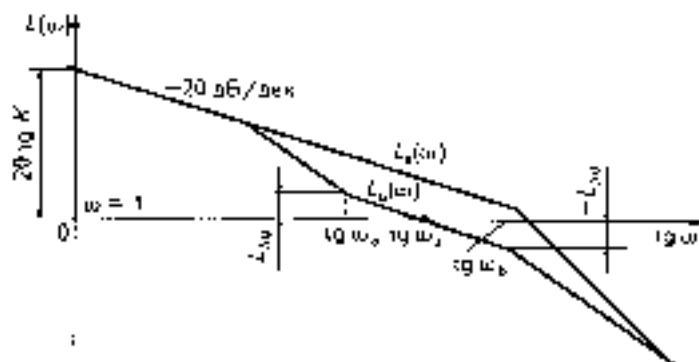


Рис. 6.24

зрізу, яке визначають, виходячи із заданого максимального прискорення σ_m , регульованої координати та її початкового розподілення x_0 .

Значення ω_1 визначають за номограмою (рис. 6.25) у такому порядку

Виходячи із заданого значення σ за графіком $\sigma(U_{max})$ визначають відповідне значення U_{max} . Потім за цим значенням (U_{max}) за графіком $t_d(U_{max})$ знаходять σ/ω_1 . Цю величину порівнюють із заданим значенням t_r і в знайденого рівняння визначають

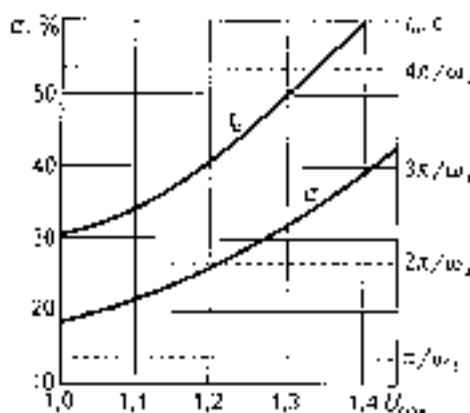


Рис. 6.25

$$\omega_1 = \sigma / t_r$$

Частоту ω_2 обчислюють за формулою

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\sigma_{max}}{t_d}}$$

Якщо $\omega_1 > \omega_2$, то слід вибрати $\omega \leq \omega_2$. Якщо значення σ_1 і t_d не задані, то $\sigma \geq \omega_1$.

2. Після визначення частоти зрізу будуть потрібні частоту асимптоту бажаної ЛАХ, яка проходить через частоту зрізу з нахилом -20 дБ/дек

3. Виходячи зі знайденого значення $U_{\text{н.д.}}$ за графіком (рис. 6.26) визначають $L_{\text{д.р.}}$ і $\Delta\varphi_{\text{н.д.}}$.

Після цього співставляють середньочастотну асимптоту з низькочастотною так, щоб в інтервал частот, для якого

$$0 < L_{\text{д.р.}}(\omega) \leq L_{\text{н.д.}}, \quad (6.35)$$

падіння фазы був більшим або дорівнював мінімальному падінню

$$\Delta\varphi \geq \Delta\varphi_{\text{н.д.}}, \quad (6.36)$$

Сполучення здійснюють асимптоту з нахилом -40 або -60 дБ/дек для остаточних систем першого порядку і -60 дБ/дек — для систем другого порядку. Надлишок фазы за частоти ω_0 можна визначити за такою наближеною формулою.

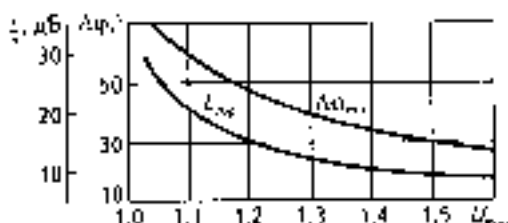


Рис. 6.26

$$\Delta\varphi_0 = \pi - \nu \frac{\pi}{2} - \left(m \frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{\omega_0} \right) + \left(l \frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{\omega_0} \right),$$

де ν — порядок астатизму; ω_i — частоти сполук бажаної ЛАХ, які містяться ліворуч від ω_0 ; m і l — кількість частот сполук, на яких нахил бажаної ЛАХ змінюється відповідно на -20 або $+20$ дБ/дек.

Надлишок фазы $\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_0)$, де $\varphi(\omega_0) < 0$, перевіряють лише для тієї частоти ω_0 , (див. рис. 6.24), для якої $L_{\text{д.р.}} = L_{\text{н.д.}}$. Частоті ω_0 може відповідати точка сполуки асимптот або точка на одній із них асимптот.

Задоволення умов (6.35) і (6.36) означає, що бажаній ЛАХ відповідає типовий частотний характеристика $U(\omega)$, у якій $|U_{\text{н.д.}}| = U_{\text{н.д.}} - 1$ і для якої складено використати раніше залежності $\pi(U_{\text{н.д.}})$ і $L_{\text{д.р.}}(U_{\text{н.д.}})$, наведені на рис. 6.25.

Якщо на частоті ω_0 надлишок фазы $\Delta\varphi_0 < \Delta\varphi_{\text{н.д.}}$, то асимптоту сполуки необхідно зсувати вліво або зменшити її нахил; якщо $\Delta\varphi_0 > \Delta\varphi_{\text{н.д.}}$, то асимптоту слід зсувати вправо або збільшити її на-

хил. Отже, потрібно покласти асимптотні сполучки відшукати методом спроб. При цьому різниця $\Delta\varphi_c - \Delta\varphi_{\text{max}}$ має не перевищувати кількох градусів.

4. Середньочастотну асимптоту сполучають із високочастотною так, щоб в інтервалі частот для кожного

$$0 \geq L_c(\omega) \geq L_{c,r}$$

нахил фаз становив $\Delta\varphi \geq \Delta\varphi_{\text{max}}$.

Нахил фаз досить перевірити за частоти ω_d (див. рис. 6.24) за такою наближеною формулою:

$$\Delta\varphi_0 = \pi - \frac{\pi}{4} q_{c,r} - \sum_{i=1}^r \frac{\omega_0}{\omega_i},$$

де $q_{c,r}$ — відносний нахил середньочастотної асимптоти (при нахилі -20 дБ/дек $q_{c,r} = 2$), r — кількість частот сполучки бажаної ЛАХ, що перевищують частоту зрізу ω_d ; ω_i — частоти сполучки бажаної ЛАХ, що перевищують ω_d .

Якщо $\Delta\varphi < \Delta\varphi_{\text{max}}$, то асимптоту сполучки треба зсувати вправо або зменшити її нахил, якщо $\Delta\varphi > \Delta\varphi_{\text{max}}$, то зсувати вліво або збільшити нахил. Різниця $\Delta\varphi - \Delta\varphi_{\text{max}}$ не повинна перевищувати кількох градусів.

При сполученні середньочастотної частини ЛАХ з низькочастотною та високочастотною слід прагнути, щоб бажана ЛАХ якомога менше відрізнялася від ЛАХ вихідної системи. Це спростує корекцію.

Метод Санковського — Сігалова В основі цього методу покладено дев'ять цинів бажану ЛАХ розімкнутій системі (табл. 6.2).

Тип ЛАХ вибирається залежно від вимог до САР, що синтезується. Ці вимоги є вихідними даними для синтезу. До них належать: $(\ddot{\omega}/\dot{\omega})_{\text{max}}$, $(\dot{\omega}^2/\dot{\omega}^2)_{\text{max}}$ — максимальне значення швидкості та прискорення зміни швидкості, t — час регулювання; σ — перерегулювання.

При виборі типу ЛАХ рекомендується керуватися такими положеннями:

1) якщо завдання зводиться до великих прискорень, а рівень перешкод незначний, слід вибрати ЛАХ типу 1 для статичних систем і типу 2 — для астатичних;

Таблица 6.2

Тип ЛАХ	Передаточная функция	Асимптотический ЛАХ	Частота границы
1	$\frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$		ω_1
2	$\frac{\lambda}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$		λ
3	$\frac{k(\tau_1 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$		$\frac{k\omega_1^2}{\omega_2}$
4	$\frac{k(\tau_1 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$		$\frac{k\omega_1}{\omega_2}$
5	$\frac{k(\tau_1 p + 1)}{p^2(T_1 p + 1)}$		$\frac{k}{\omega_2}$
6	$\frac{k(\tau_1 p + 1)^2}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$		$\frac{k\omega_1^2}{\omega_2}$
7	$\frac{\lambda(\tau_1 p + 1)^2}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$		$\frac{k\omega_1^2}{\omega_2}$

Закреслений табл. 6.2

Тип ЛАХ	Передаточна функція	Асимптотична ЛАХ	Частота зрізу
8	$\frac{k(\tau_1 p - 1)^2}{p^2(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$		$\frac{k_1}{\omega_3}$
9	$\frac{k(1 + T_1 p + T_2 p^2)}{p^2(T_1 p + 1)}$		$\frac{k}{\omega_2}$

2) якщо прискорення, з яким змінюється завантаж., незначне, а рівень переход досить малий, слід вибрати ЛАХ типу 3, 4 або 5;

3) при великих прискореннях зміни завантаж. і низькому рівні переход треба вибрати ЛАХ типу 6, 7, 8 або 9.

Після того як тип бажаної ЛАХ вибрана і, виходячи з мікро до якості САР в усталеному режимі, визначено її низькочастотну частину, для побудови решетки частин бажаної ЛАХ використовують дані табл. 6.2 з такі співвідношення.

частота зрізу

$$\omega_1 = c/T_2, \quad (6.37)$$

запас стійкості за фазою

$$\Delta\varphi = 90^\circ - \sigma, \quad (6.38)$$

де $c = 9$ при $\Delta\varphi = 30^\circ$; $c = 8$ при $\Delta\varphi = 45^\circ$ і $c = 7$ при $\Delta\varphi = 60^\circ$.

Формули (6.37) і (6.38) дають помилку, що не перевищує 0,05 і 0,1 при $60^\circ > \Delta\varphi > 30^\circ$.

При розрахунках можна користуватися й такими співвідношеннями:

$$\omega_1/\omega_2 = \frac{2}{\gamma(j-1)}; \quad (6.39)$$

$$\omega_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i} = \frac{n}{2}; \quad (6.40)$$

$$\sigma = \pi/2 - \Delta\varphi, \quad (6.41)$$

де $l = 2$ або $l = 3$ при нахилі асимптоти -40 або -60 дБ/дек, що спливає середньо- та низькочастотні частини ДАХ.

Значення a (у радіанах) визначають, виходячи з припущення, що $\omega_1/\omega_2 \ll 1$ при $i = 3, 4, \dots$ та $\omega_i/\omega_1 \gg 1$.

□ **Приклад 6.2.** Перезадає функція розширеної протиповільної частини системи, що складається з об'єкта регулювання, дивуща та перетворювача з підсумовуючим підсилювачем, має вигляд

$$W_n(p) = \frac{50}{p(0,005p + 1)(0,2p + 1)} \quad (6.47)$$

Вибрати та побудувати бажану ДАХ, виходячи з таких показників якості: $\sigma \leq 20\%$; $t_p \leq 0,5$ с. Вважає, що додання змінюється повільно, а рівень перешкод значний.

Розв'язання. ДАХ незмінюваної (вихідної) частини системи побудовано на рис. 6.27. Низькочастотна частина ДАХ проходить через точку з координатами $(1\omega) = 20 \lg 50 = 34$ дБ, $m = 1$ та має нахил -20 дБ/дек.

Враховуючи викладені раніше рекомендації виберемо бажану ДАХ типу 4 з табл. 6.2. За формулою (6.38) визначимо необхідне значення запасу стійкості за фазою

$$\Delta\varphi = 73^\circ - \varphi = 73^\circ - 20^\circ = 53^\circ$$

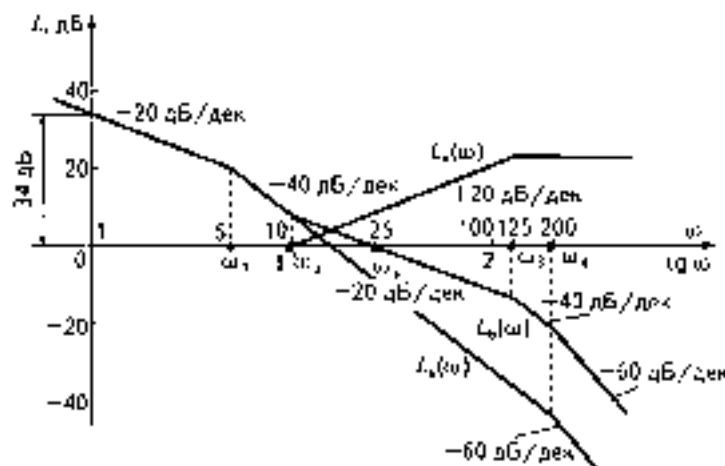


Рис. 6.27

і, приймаючи $\varepsilon = 7.5$, за формулю (6.37) знаходимо частоту зрізу

$$\omega_1 = \varepsilon \omega_r = 7.5/0.3 = 25 \text{ с}^{-1}$$

Приймаємо, що частота сполуки ω_2 створюється сталю часу 0.2 с незмінюваної частини системи, тобто $\omega_2 = 1/0.2 = 5 \text{ с}^{-1}$. Тоді за формулю (6.2) визначимо частоту

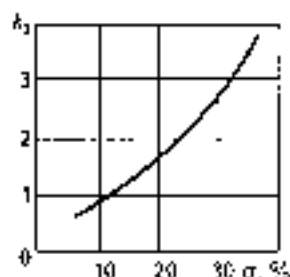
$$\omega_3 = k\omega_1/\omega_2 = 50 \cdot 5/25 = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Знаходимо сталю

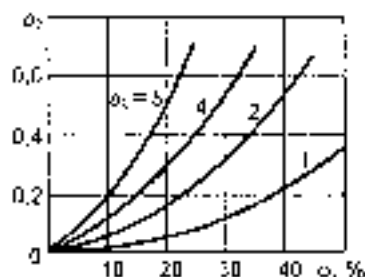
$$\alpha = \pi/2 - \Delta\sigma = 3.14/2 - 53/57.3 = 0.65 \text{ рад.}$$

Приймаємо, що стала часу 0.005 с незмінюваної частини системи створює частоту сполуки $\omega_4 = 1/0.005 = 200 \text{ с}^{-1}$, а за формулю (6.40) визначимо частоту сполуки

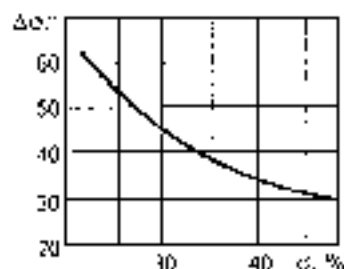
$$\omega_1 \frac{1}{\omega_2} + \omega_1 \frac{1}{\omega_4} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \omega_1 = \frac{1}{\frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{\omega_4}} = \frac{1}{\frac{0.65}{2} - \frac{1}{200}} = 125 \text{ с}^{-1}.$$



а



б



в

Рис. 6.28

Для перевірки розрахунки обчислюють ліну і праву частини бажаної рівності (6.39):

$$\omega_2/\omega_1 = 10^{25} = 0,4; \quad \frac{\alpha}{2(\beta-1)} = \frac{0,65}{2} = 0,325$$

Можна вважати, що бажана рівність (6.39) задовольняється.

Остання асимптота високочастотної частини бажаної ЛАХ пропорційно паралельно середньочастотній частині ЛАХ вихідної системи, тобто з нахилом -60 дБ/дек.

Побудовану бажану ЛАХ $L_d(\omega)$ показано на рис. 6.27.

Спрощена побудова бажаної ЛАХ Вихідними даними

для побудови $L_d(\omega)$ є час регулювання T_p та перерегулювання σ . Частота зрізу бажаної ЛАХ обчислюється за формулою

$$\omega_c \approx k \cdot \pi/T_p,$$

де k — коефіцієнт, що визначається за графіком на рис. 6.28, α залежно від перерегулювання.

Через частоту зрізу ω_c проводять середньочастотну асимптоту бажаної ЛАХ з нахилом -20 дБ/дек. Частоти ω_1 і ω_2 , що обмежують середньочастотну асимптоту ліворуч і праворуч, вибирають, виходячи з таких наближених рівностей:

$$\omega_2 = \omega_c^2/\omega_1; \quad \omega_1 = (2 - \sigma)\omega_c$$

Перерегулювання σ визначається за графіками на рис. 6.25, σ залежно від коефіцієнтів α_1 і α_2 , що визначають довжину середньочастотної частини ЛАХ: $\alpha_2 = \omega_c/\omega_1$, $\alpha_1 = \omega_2/\omega_c$. Знає стійкості за фазою $\Delta\varphi$ визначається за графіком на рис. 6.28, α залежно від перерегулювання.

Синтез послідовної коректувальної ланки Побудована

коректувальна ланка вводить в основний контур регулювання системи (рис. 6.29) і звичайно є пасивним електричним ланкою або регу-

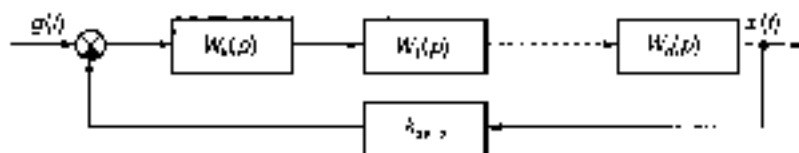


Рис. 6.29

датором на балі операційного підсилювача. По можливості ланку слід виводити ближче до входу системи, де сигнали мають найменшу потужність.

Передаюча функція шкідливої розбіжкунієї системи

$$W_c(p) = W_1(p)W_2(p) \dots W_n(p)k_{\text{нп}},$$

після введення коректувальної ланки матиме вигляд

$$W_c(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p) \dots W_n(p)k_{\text{нп}} = W_k(p)W_n(p).$$

Після переходу до логарифмічних характеристик дістанемо

$$L_c(\omega) = L_k(\omega) + L_n(\omega).$$

однак

$$L_k(\omega) = L_c(\omega) - L_n(\omega). \quad (6.43)$$

Цей вираз виверне такий порядок синтезу послідовної коректувальної ланки:

1) виходячи із заданої структури системи з параметрів її ланок, будують ЛАХ шкідливої розбіжкунієї системи $L_n(\omega)$;

2) за заданими показниками якості будують бажану ЛАХ $L_k(\omega)$;

3) визначають ЛАХ коректувальної ланки $L_c(\omega)$ як різницю $L_k(\omega) - L_n(\omega)$;

4) за ЛАХ коректувальної ланки $L_c(\omega)$ визначають її передаючу функцію, схему та її параметри.

□ **Приклад 6.3.** ЛАХ невідомої системи $L_n(\omega)$, бажану ЛАХ побудовано на рис. 6.27 (див. приклад 6.2). Побудувати ЛАХ послідовної коректувальної ланки $L_k(\omega)$, вибравши її схему і значення параметрів.

Розв'язання. ЛАХ коректувальної ланки $L_k(\omega)$ на рис. 6.27 визначено як різницю $L_k(\omega) = L_c(\omega)$. За прикладом $L_n(\omega)$ з табл. 6.1 виберемо схему коректувальної ланки (варіант № 2) і запишемо її передаючу функцію:

$$W_k(p) = \frac{k(1Tp + 1)}{T_1p + 1}. \quad (6.44)$$

Порівняючи ЛАХ коректувальної ланки (табл. 6.1) побудовану на рис. 6.27, отримаємо

$$T_1 = 1/\sigma_1 = 1/10 = 0,1 \text{ с}, \quad T_2 = 1/\sigma_2 = 1/125 = 0,008 \text{ с}.$$

Обчислюємо параметри R_1 , R_2 , C схеми коректувальної ланки за допомогою формул з табл. 6.1. Незвідомі значення для зобразуємо параметрів — для номінальних параметрів — три. Якщо, наприклад, один із них, можна дати певну

Припустимо $C = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$. Тоді

$$R_1 = T_1 / C = 0,1 / 2 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^4 \text{ Ом} = 50 \text{ кОм}$$

Далі, оскільки $k = T_2 / T_1 = 0,08$

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

то

$$R_2 = \frac{k R_1}{1 - k} = \frac{0,08 \cdot 5 \cdot 10^4}{1 - 0,08} = 4348 \text{ Ом}$$

Вибіримо номінальні резистори $R_1 = 51 \text{ кОм}$, $R_2 = 4,3 \text{ кОм}$

Вибрані коректувальні ланки є підсилювачами з негативним коефіцієнтом передачі, меншим за одиницю ($k = 0,08$). Для збереження змінного коефіцієнта передачі розмаїтості системи необхідно встановити додатковий підсилювач, коефіцієнт збільшення якого k_d задовольняє умову

$$k k_d = 1.$$

Якщо

$$k_d = 1/k = 1/0,08 = 12,5.$$

Якщо є можливість збільшити в 12,5 рази коефіцієнт підсилення підсилювача вхідної системи, то додатковий підсилювач не потрібен.

Коректувальну ланку, синтез якої виконана, можна також реалізувати на базі стандартного підсилювача, інверсійного типу, зображеному на рис. 6.30.

Відома, тільки з виразом 6.31 передаточна функція цієї схеми

$$W(p) = \frac{R_{\text{н}}}{1 + \frac{C p R_1}{1 + C p R_2} + R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1 C p + 1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C p + 1} = k \frac{T p + 1}{T_2 p + 1}$$

Як видно з передаточної функції (6.44), підсилювач є інверсним, тобто, що коефіцієнт передачі k має негативний відповідно до k_d (за

на рис. 6.27 коефіцієнт передачі коректувальної ланки має доданок одиниці, тому в схемі, зображеній на рис. 6.30, слід прийняти $K_{\text{кр}} = K_1 + K_2$. Решта параметрів схеми такі самі, як і параметри розімкнутої ланки з класичного чотириполюсника.

Зуваження. При побудові схеми слід враховувати, що операційний підсилювач змінює полярність вихідного сигналу. Для компенсації в полірихті послідовно з коректувальною ланкою викладають пропорційний регулятор (див. рис. 4.17, а) з коефіцієнтом передачі $K = 1$, тобто при $R_1 = R_2$.

Синтез паралельної коректувальної ланки. Паралельні коректувальні ланки вводяться у вигляді зворотних зв'язків, які охоплюють одну або кілька ланок вихідної системи (рис. 6.31). Термін «паралельна коректувальна ланка» тут не зовсім точний, бо коректувальна ланка вмикається не паралельно ланкам системи, а створює від'ємний зворотний зв'язок. Проте цей термін звичайно використовується в багатьох книжках з теорії автоматичного регулювання.

Передаючу функцію вихідної розімкнутої системи запишемо у вигляді

$$W_0(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)k_{\text{кр}} = W_0(p)W_{\text{кр}}(p),$$

де $W_0(p)$ — передаточна функція частини системи, що охоплюється паралельною коректувальною ланкою, $W_{\text{кр}}(p)$ — передаточна функція решти частин розімкнутої системи.

Для структурної схеми (рис. 6.31)

$$W_0(p) = W_1(p); \quad W_{\text{кр}}(p) = W_2(p)W_3(p)k_{\text{кр}}.$$

Після введення коректувальної ланки передаточна функція бажаної розімкнутої системи

$$W_0(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)k_{\text{кр}}}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{W_0(p)}{1 + W_1(p)W_{\text{кр}}(p)} \quad (6.15)$$

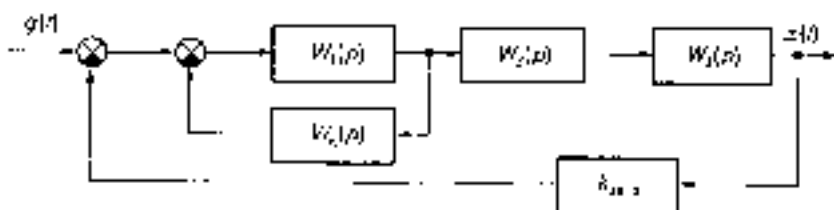


Рис. 6.31

Після переходу до логарифмічних характеристик дістанемо

$$L_z(\omega) = L_1(\omega) - 20 \lg |1 + W_1(j\omega)W_m(j\omega)|. \quad (6.46)$$

Основна складність синтезу паралельної коректувальної ланки зумовлена наявністю одиниці у знаменнику передаточної функції (6.45). Для подолання цього іноді розглядається тільки інтервал частот, у якому

$$|W_1(j\omega)W_m(j\omega)| \gg 1, \quad (6.47)$$

тобто одиницю в знаменнику передаточної функції (6.45) взагалі не враховують. Проте нерівність (6.47) зазвичай виконується тільки для високіх частот і не зберігається на низьких частотах.

Розглянемо досить точний метод синтезу, який дає змогу врахувати одиницю в знаменнику передаточної функції (6.45). Введемо такі позначення.

$$W_z(p) = W_1(p)W_m(p); \quad (6.48)$$

$$W_{z1}(p) = 1 + W_1(p)W_m(p) = 1 + W_z(p) \quad (6.49)$$

і відповідно

$$L_z(\omega) = 20 \lg |W_1(j\omega)W_m(j\omega)| = L_1(\omega) + L_m(\omega);$$

$$L_{11}(\omega) = 20 \lg |1 + W_1(j\omega)W_m(j\omega)|$$

За формулою (6.46) побудуємо ЛАХ $L_1(\omega)$, віднявши $L_m(\omega)$ від $L_z(\omega)$. Залишається перейти від $L_{11}(\omega)$ до $L_1(\omega)$. Цей перехід можна здійснити так. Виходячи з виразу $L_{11}(\omega)$, визначимо $W_{z1}(p)$ і відносно до виразу (6.49) знаходимо передаточну функцію

$$W_{z1}(p) = W_z(p) + 1,$$

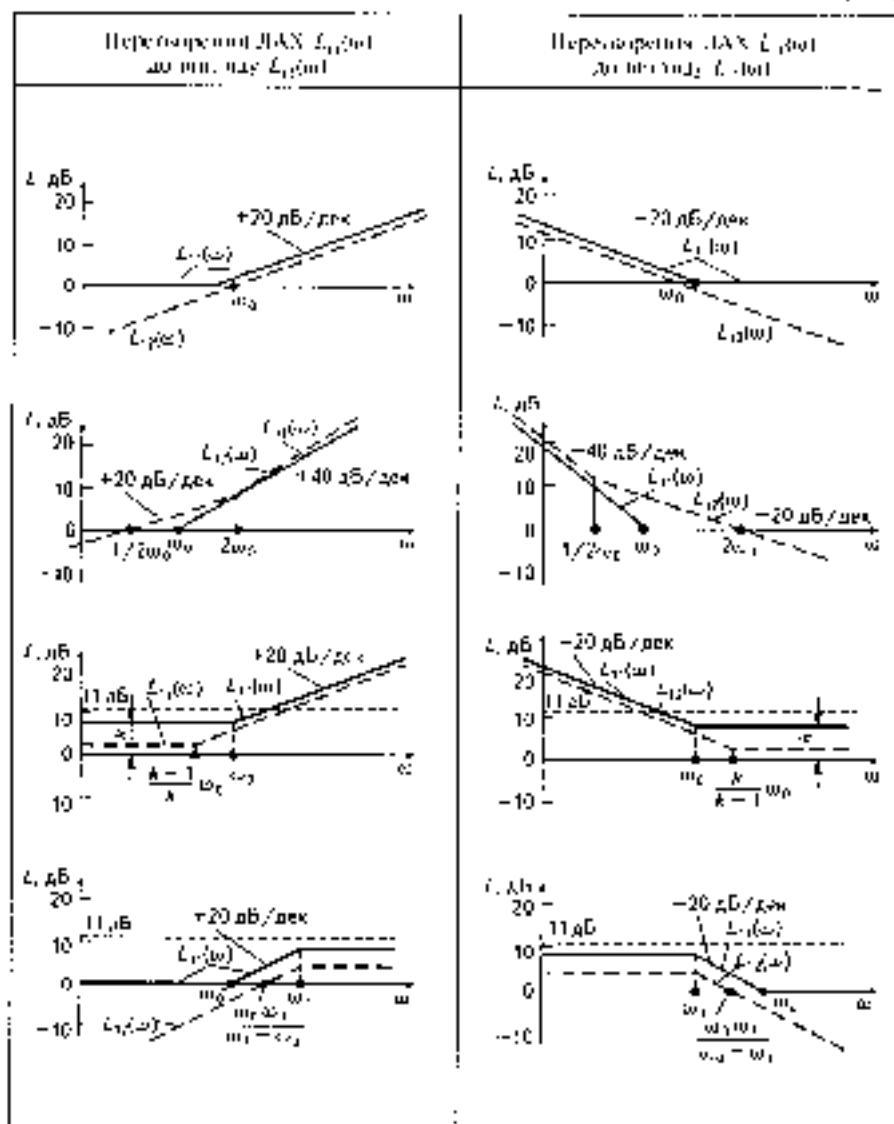
за якою будуємо ЛАХ $L_{z1}(\omega)$.

ЛАХ $L_{z1}(\omega)$, які здебільшого трапляються під час синтезу коректувальних ланок, та ЛАХ $L_{11}(\omega)$, що їм відповідають, наведено в табл. 6.3

Отже, можна запропонувати такий порядок синтезу паралельної коректувальної ланки.

1. За заданою структурною схемою і параметрами її ланок будується ЛАХ вихідної розімкнутої системи $L_1(\omega)$.
2. За заданими показниками якості будується бажана ЛАХ $L_z(\omega)$.

Таблиця А.3



3. Визначається ЛАХ $L_1(\omega)$ відніманням бажаної ЛАХ $L_6(\omega)$ від ЛАХ вихідної системи $L_4(\omega)$

$$L_1(\omega) = L_4(\omega) - L_6(\omega).$$

Ця ЛАХ відповідає значеннику передаточної функції (6.45).

4. За виглядом ЛАХ $L_1(\omega)$ будується ЛАХ $L_{12}(\omega)$ знаменника передаточної функції (6.45) без одиниці. У діапазоні частот, де виконується умова $L_1(\omega) > 1$ дБ, ЛАХ $L_1(\omega)$ і $L_{12}(\omega)$ збігаються з точністю до 3 дБ. Якщо показати цю точність до 0 зліткою, то перехід від $L_1(\omega)$ до $L_{12}(\omega)$ при $L_1(\omega) > 1$ дБ не потребує ніяких перетворень. Для переходу від $L_1(\omega)$ до $L_{12}(\omega)$ у діапазоні частот, де $L_1(\omega) < 1$ дБ, слід користуватися даними табл. 6.3.

Після побудови $L_{12}(\omega)$ необхідно перевірити стійкість внутрішнього контуру системи, який створюється ланками з передаточною функцією $W_{12}(p)$ і коректувальною ланкою. Висновок про стійкість внутрішнього контуру можна зробити лише за виглядом $L_{12}(\omega)$.

5. Вибирається місце введення коректувальної ланки і будується $L_{13}(\omega)$. Як правило, коректувальну ланку доцільно розміщувати частину системи, яка має великий коефіцієнт підсилення.

6. Визначається ЛАХ коректувальної ланки $L_8(\omega)$ як різниця характеристик $L_1(\omega)$ і $L_{13}(\omega)$:

$$L_8(\omega) = L_1(\omega) - L_{13}(\omega).$$

7. За виглядом ЛАХ коректувальної ланки визначається її передаточна функція, вибирається схема і обчислюються її параметри.

□ **Приклад 6.4.** ЛАХ вихідної системи $L_4(\omega)$ і бажану ЛАХ $L_6(\omega)$ показано на рис. 6.32. Побудувати ЛАХ перетворюючої коректувальної ланки, вибравши в схему та розрахувавши параметри за умови, що коректувальна ланка охоплює ланку ЛАХ якої має вигляд $L_{11}(\omega)$.

Розв'язання. Всі характеристики, пов'язані з побудованою $L_4(\omega)$ зображено на рис. 6.32. Спочатку будують характеристику $L_1(\omega) = L_4(\omega) - L_6(\omega)$ (суцільна лінія), потім за виглядом $L_1(\omega)$ і даними табл. 6.3 — характеристику $L_{12}(\omega)$ (штрихова лінія). ЛАХ коректувальної ланки $L_8(\omega)$ визначається як різниця $L_1(\omega) - L_{12}(\omega)$. Характеристиці $L_8(\omega)$ відповідає ланка з передаточною функцією

$$W_8(p) = \frac{k\tau p}{\tau p + 1} \quad (6.54)$$

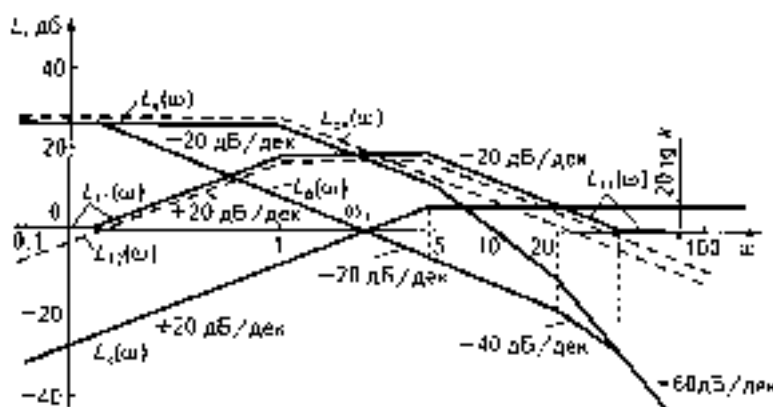


Рис. 6.32

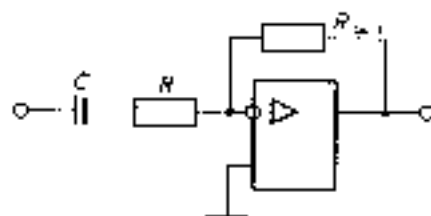


Рис. 6.33

Параметри передаточної функції $\tau = 1/5 = 0.2$ с, $20 \lg k = 6$; $k = 2$ визначені за характеристикою $L_{\text{дв}}(\omega)$, зображеною на рис. 6.32.

Передаточну функцію (6.50) має коректувальна ланка, схему якої наведено на рис. 6.33.

Спрямки, відповідні до виразу (6.31) передаточної функції цієї ланки має вигляд

$$W_c(p) = -\frac{R_{\text{дв}}}{1/\tau p - R} = -\frac{R_{\text{дв}}}{R} \frac{RCp}{RCp + 1} = -\frac{k_{\text{сп}}}{\tau p + 1}, \quad (6.51)$$

де $\tau = RC$, $k = R_{\text{дв}}/R$.

Прийнявши $C = 10 \text{ мкФ} = 10^{-5} \text{ Ф}$, визначаємо

$$R = \tau/C = 0.2/10^{-5} = 2 \cdot 10^4 \text{ Ом} = 20 \text{ кОм};$$

$$R_{\text{дв}} = kR = 2 \cdot 2 \cdot 10^4 = 4 \cdot 10^4 \text{ Ом} = 40 \text{ кОм}.$$

Дивись також зображення до прикладу 6.1.

Синтез кількох коректувальних ланок для однієї САР. За допомогою ЛАХ можна синтезувати не тільки одну, а й кілька коректувальних ланок для однієї схеми. Нехай, наприклад, ЛАХ вихідної системи $L_0(\omega)$ та бажаної ЛАХ $L_n(\omega)$ мають вигляд, зображений на рис. 6.34

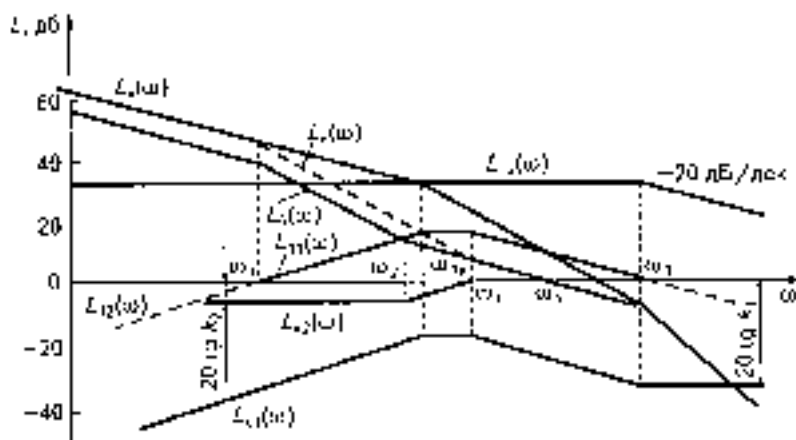


Рис. 6.34

Для переходу від $L_1(\omega)$ до $L_2(\omega)$ застосуємо дві коректувальні ланки. Введемо деяку проміжну ЛАХ $L_m(\omega)$ і виразимо, що перша коректувальна ланка забезпечує перехід від $L_1(\omega)$ до $L_m(\omega)$ а друга — від $L_m(\omega)$ до $L_2(\omega)$. Виходячи з того, що вигляд проміжної ЛАХ $L_m(\omega)$ впливає складність коректувальних ланок, при її побудові слід максимально використовувати частоти сполучки вихідної та бажаної ЛАХ, тобто $L_1(\omega)$ побудувати так, щоб вона якомога менше відрізнялася від $L_2(\omega)$ і $L_4(\omega)$.

ЛАХ $L_m(\omega)$ зображена на рис. 6.34, для частот $\omega < \omega_1$ збігається з $L_1(\omega)$ в інтервалі частот від ω_0 до ω_1 має нахил -40 дБ/дек і на вищих частотах збігається з $L_2(\omega)$.

Перехід від $L_1(\omega)$ до $L_m(\omega)$ здійснюється за рахунок введення паралельної коректувальної ланки. Виразимо, що коректувальна ланка охоплює ланку вихідної системи зі сталою часу $1/\omega_1$. ЛАХ цієї ланки має вигляд $L_{11}(\omega)$. Віднімаючи $L_1(\omega)$ від $L_m(\omega)$ дістаємо $L_{11}(\omega)$ і за її виглядом будемо $L_{12}(\omega)$. Віднімаючи $L_m(\omega)$ від побудованої $L_{11}(\omega)$, отримаємо ЛАХ паралельної коректувальної ланки $L_{13}(\omega)$.

Характеристичі $L_{11}(\omega)$ відповідає передаточна функція

$$W_{11}(p) = \frac{k_1 p(T_1 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_1 p + 1)} \quad (6.52)$$

де

$$T_1 = 1/\omega_1, \quad T_2 = 1/\omega_2, \quad T_3 = 1/\omega_3.$$

Для реалізації паралельної коректувальної ланки можна використати пасивний чотириполюсник (див. табл. 6.1, ланку № 3).

Для переходу від $L_1(\omega)$ до $L_2(\omega)$ використаємо послідовну коректувальну ланку. ЛАХ $L_2(\omega)$ після ланки визначимо як різницю бажаної $L_2(\omega)$ і проміжної $L_1(\omega)$ ЛАХ. Характеристика $L_2(\omega)$ являтиме не релативна функція

$$W_{L2}(p) = \frac{k_2(\tau_1 p + 1)}{\tau_1 p + 1}, \quad (6.53)$$

де $\tau_1 = T_1/\omega_1$; $\tau_2 = T_2/\omega_2$. Для реалізації цієї ланки можна також використати пасивний чотириполюсник (див. табл. 6.1, ланку № 3).

При синтезі коректувальних ланок можна вибрати в іншу чергу-ність їх введення, тобто перехід від $L_1(\omega)$ до $L_2(\omega)$ здійснити за рахунок введення послідовної коректувальної ланки, а перехід від $L_2(\omega)$ до $L_3(\omega)$ — паралельної.

Ідею використання проміжної ЛАХ можна застосувати також для синтезу двох паралельних коректувальних ланок.

6.12

Послідовна корекція

з підпорядкованим регулюванням координат

Послідовна корекція з підпорядкованим регулюванням координат за певного часу є найпоширенішим видом корекції гістеронних електродвигунів постійного і змінного струму.

САР з послідовною корекцією становить багатоконтурну систему, кількість контурів якої дорівнює кількості регульованих параметрів. У електродвигунах постійного струму такими параметрами можуть бути: напруга переключення, струм якорного кола, швидкість обертання валу електродвигуна, кут повороту ланки перемищення органів робочої машини тощо. Головним регульованим параметром є параметр, який визначає швидкість автоматичного регулювання. В системі стабілізації швидкості таким параметром є швидкість, в системах позиціонування — кут повороту або лінійне переміщення тощо. Решта параметрів є підпорядкованими головному параметру, крім

того, вони підпорядковані також один одному. Наприклад, у системі тиристорний перетворювач — двигун постійного струму параметр напруги перетворювача підпорядкований параметру струму зовнішнього кола, струм — параметру швидкості електродвигуна, параметр швидкості — параметру кутового переміщення. Тому системи з послідовною корекцією називають також *системами підпорядкованого регулювання* (СПР).

Структурну схему триконтурної СПР показано на рис. 6.35. Об'єкт регулювання поділено на три частини: $W_{s1}(p)$, $W_{s2}(p)$, $W_{s3}(p)$. Вихідною величиною кожної з них є один із регульованих параметрів x_1 , x_2 , x_3 . Кожна частина об'єкта регулювання має одну (моді дві) «велику» ступінь часу, яка компенсується дією відповідного регулятора. Тому кількість регуляторів дорівнює кількості «великих» ступеней часу об'єкта регулювання. Регулятори з'єднуються послідовно (каскадно). Кожиний регулятор контролює один із регульованих параметрів, тому вони називаються *регуляторами струму, швидкості, кутового положення* тощо.

Внутрішній (перший) контур складається з відповідної частини об'єкта регулювання $W_{s1}(p)$ і регулятора $W_{r1}(p)$, на вхід якого, крім сигналу зворотного зв'язку x_1 , подається сигнал задання x_1^* від регулятора $W_{r2}(p)$ другого контуру. Цей контур є зовнішнім відносно першого. Об'єктом регулювання другого контуру є перший (внутрішній) контур та частина об'єкта регулювання $W_{s2}(p)$. Другий контур є складовою об'єкта регулювання третього контуру.

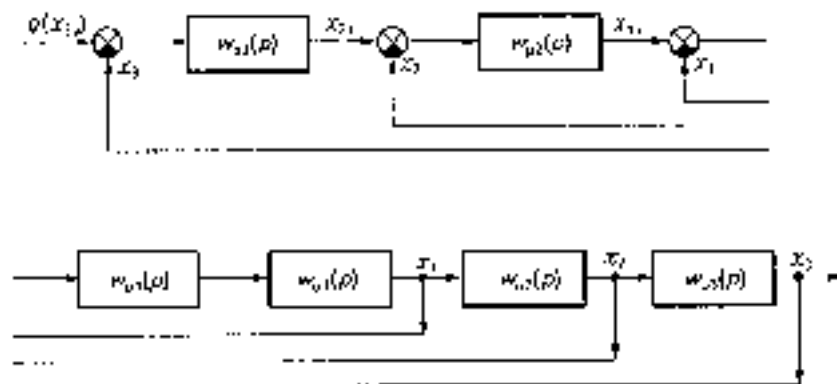


Рис. 6.35

У загальному випадку багатоконтурної системи будь-який з i -х контурів, крім першого і останнього, є зовнішнім (керуючим) відносно $(i-1)$ -го контуру і внутрішнім (підпорядкованим) відносно $(i+1)$ -го контуру. Такий контур складається з двох ланок — регулятора з передаточною функцією $W'_{i-1}(p)$ об'єкта регулювання з передаточною функцією

$$W'_{i+1}(p) = W'_{i-1}(p)W'_{ii}(p), \quad (6.54)$$

де $W'_{i+1}(p)$ — передаточна функція замкнутого $(i+1)$ -го контуру.

Передаточна функція розімкненого i -го контуру

$$W_i(p) = W'_{ii}(p)W'_{i-1}(p), \quad (6.55)$$

замкнутого —

$$W_{ii}(p) = \frac{W'_{ii}(p)}{1 + W'_{i-1}(p)}, \quad (6.56)$$

Регулятори багатоконтурної СПР розраховуються за умови послідовної оптимізації контурів системи, починаючи з внутрішнього (першого) і закінчуючи зовнішнім (останнім).

Передаточну функцію об'єкта регулювання будь-якого контуру можна подати у вигляді

$$W'_{ii}(p) = \frac{W_{i0}(p)}{T_i p + 1}, \quad (6.57)$$

де $W_{i0}(p)$ — частина передаточної функції об'єкта, до якої входить «велика» складова часу, що компенсується регулятором; T_i — сума «маленьких» складових часу, що не компенсуються регулятором.

Великі складові часу викликають швидкодію контуру, малі — високочастотну частину ЛАХ і майже не впливають на якість перехідних процесів. Наприклад, якщо складовою об'єкта регулювання є тиристорний перетворювач, передаточна функція якого

$$W'_{ii}(p) = \frac{k_{ii} e^{-\tau p}}{\tau_i p + 1}, \quad (6.58)$$

де k_{ii} — коефіцієнт підсилення тиристорного перетворювача за напругою; τ — середньозважене значення затримки системи керування тиристором; τ_i — стала часу фільтра на вході перетворювача, то

$$W'_{\tau_0}(p) = \frac{k_{1p}}{(\tau_0 p + 1)(\tau p + 1)} = \frac{k_{1p}}{\tau_0 \tau p^2 + (\tau_0 + \tau)p + 1}, \quad (6.59)$$

де враховано, що

$$e^{-\tau_0} = \frac{1}{\tau p + 1}.$$

Оскільки τ_0 і τ є малими сталими, то добуток $\tau_0 \tau \approx 0$ і дві аперіодичні ланки можна наближено замінити однією зі сталою часу, що дорівнює сумі двох малих сталих часу, тобто

$$W'_{\tau_0}(p) = \frac{k_{1p}}{(\tau_0 + \tau)p + 1} = \frac{k_{1p}}{T_0 p + 1}, \quad (6.60)$$

де $T_0 = \tau_0 + \tau$.

Величина T_0 для реальних систем електропривода становить від 0,005 до 0,01 с.

При настроюванні контуру на *вигаданий (модельний) оптимум* передаточна функція регулятора вибирається так, щоб передаточна функція замкнутого контуру становила передаточну функцію козпильної ланки:

$$W'(p) = \frac{1}{\alpha T_0^2 p^2 + \alpha T_0 p + 1} \quad (6.61)$$

де $\alpha = 2$. При цьому коефіцієнт загучання $\xi = \alpha / (2\sqrt{\alpha} - \sqrt{2})/2 = 0,707$ і перерегулювання $\sigma = 4,3\%$, що відповідає оптимальному за швидкодією перехідному процесу (час регулювання становить $4,1 T_0$).

Настроювання на *тежкий оптимум* не є оптимальним у повному розумінні ні за швидкодією, яку можна збільшити, зменшуючи значення α , ні за перерегулюванням, яке можна зменшити, збільшуючи значення α , тобто зближуючи швидкодію. Проте таке настроювання в більшості випадків одночасно задовольняє вимоги щодо швидкодії та перерегулювання, тобто в певному розумінні його можна вважати оптимальним.

Передаточна функція замкнутого контуру має вигляд (6.61), якщо передаточна функція розімкнутого контуру визначається так:

$$W(p) = \frac{1}{\alpha T_0 p (T_0 p + 1)}. \quad (6.62)$$

З іншого боку, передаточна функція розімкнутого контуру має вигляд

$$W(p) = W_{\text{р}}(p)W_{\text{об}}(p) = \frac{W_{\text{р}}(p)W_{\text{об}}(p)}{T_{\text{п}} p + 1}, \quad (6.63)$$

де $W_{\text{р}}(p)$, $W_{\text{об}}(p)$ — передаточні функції регулятора й об'єкта.

Для визначення передаточної функції регулятора прирівняємо вирази (6.62) та (6.63) і отримаємо

$$W_{\text{р}}(p) = \frac{1}{W_{\text{об}}(p) a T_{\text{п}} p} \quad (6.64)$$

або при $a = 2$

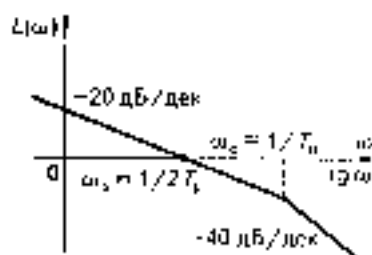
$$W_{\text{р}}(p) = \frac{1}{W_{\text{об}}(p) 2 T_{\text{п}} p}. \quad (6.65)$$

ЛАХ розімкнутого контуру при настроюванні на технічний оптималь зображено на рис. 6.36, а. Вона побудована за передаточною функцією (6.62) при $a = 2$. Низькочастотна середньочастотна частини ЛАХ мають нахил -20 дБ/дек, при частотах вище ω_1 нахил характеристики становить -40 дБ/дек. Частота зрізу цієї характеристики

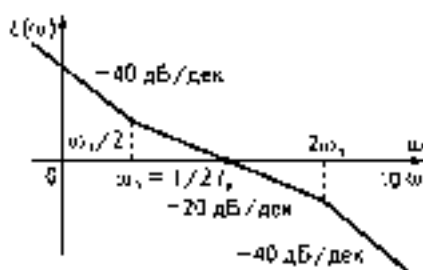
$$\omega_1 = 1/T_{\text{п}}.$$

а частота складки

$$\omega_2 = 1/T_{\text{в}}.$$



а



б

Рис. 6.36

- **Приклад 6.5.** Структурну схему тиристорного електропривода постійного струму наведено на рис. 6.37, де $W_{r,u}(\rho)$, $W_{u,i}(\rho)$ — відношення передаточних функцій регулятора швидкості і струму; k_{rr} — коефіцієнт підсилення тиристорного перетворювача за напругою; T_p — еквівалентна стала часу тиристорного перетворювача; R_s — електричний опір силового кола; c — стала двигуна (добуток конструктивної сталої на номінальний магнітний потік); T_s — електромагнітна стала силового кола; T_m — електромеханічна стала електропривода; k_s , k_u — коефіцієнти

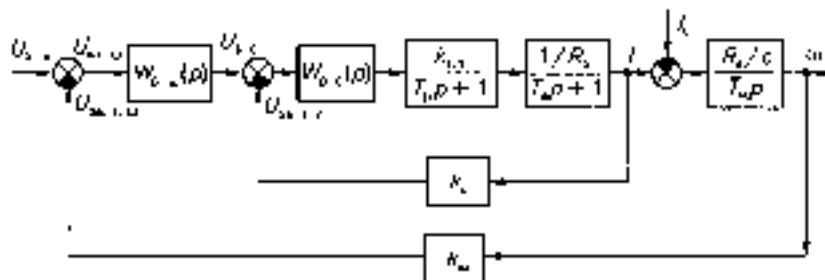


Рис. 6.37

не коефіцієнти зворотних зв'язків за струмом і швидкістю. Визначити передаточні функції регуляторів для настроювання системи на технічний оптимум. Стала часу T_p чотири (некомутована). Компенсації підлягають великі сталі часу T_s і T_m .

Розв'язання. Перейдемо з зовнішнього контуру (контур струму) і запишемо передаточну функцію об'єкта контуру струму

$$W_{r,u}(\rho) = \frac{k_s k_{r1} R_s}{(T_p \rho + 1)(T_s \rho + 1)} \quad (6.66)$$

і передаточну функцію частини об'єкта, що компенсується регулятором струму,

$$W_{u,i}(\rho) = \frac{k_{r1} k_r}{R_s (T_s \rho + 1)} \quad (6.67)$$

Тоді, згідно з виразом (6.65),

$$W_{s,i}(\rho) = \frac{R_s (T_s \rho + 1)}{k_{r1} k_r T_p \rho} = \frac{T_s \rho + 1}{T_p \rho} \quad (6.68)$$

де $T_1 = k_{r1} k_r T_p / R_s$.

Передаточної функції розімкненого асимілюючого контуру струму

$$W_{\text{ср}}(p) = W_{\text{ср}}'(p) \frac{k_{\text{ср}}}{T_{\text{ср}} p + 1} \frac{1}{T_{\text{ср}} p + 1} k_{\text{ср}} = \frac{1}{2T_{\text{ср}} p (T_{\text{ср}} p + 1)}, \quad (6.69)$$

а замкнутого

$$W_{\text{ср}}(p) = \frac{W_{\text{ср}}'(p) k_{\text{ср}}}{1 + W_{\text{ср}}'(p)} = \frac{1/k_{\text{ср}}}{2T_{\text{ср}}^2 p^2 + 2T_{\text{ср}} p + 1}. \quad (6.70)$$

Член $2T_{\text{ср}}^2 p^2$ можна відкинути, оскільки він містить добуток малих сталих часу, близький до нуля. Тоді

$$W_{\text{ср}}(p) \approx \frac{1/k_{\text{ср}}}{2T_{\text{ср}} p + 1} \quad (6.71)$$

Знаючи передаточну функцію об'єкта контуру швидкості

$$W_{\text{об'єкт}}(p) = \frac{1/k_{\text{ср}}}{2T_{\text{ср}} p + 1} \frac{R_{\text{ср}}/c}{T_{\text{ср}} p} k_{\text{ср}}$$

і передаточну функцію частини об'єкта, що кінцюється регулятором швидкості,

$$W_{\text{ср, об'єкт}}(p) = \frac{R_{\text{ср}} k_{\text{ср}}}{k_{\text{ср}} c T_{\text{ср}} p},$$

Передаточна функція регулятора швидкості, згідно з виразом (6.65) і з урахуванням того, що мала стала часу контуру швидкості становить $2T_{\text{ср}}$, матиме вигляд

$$W_{\text{р, об'єкт}}(p) = \frac{k_{\text{ср}} c T_{\text{ср}}}{R_{\text{ср}} k_{\text{ср}} 2(T_{\text{ср}}) p} = \frac{k_{\text{ср}} c T_{\text{ср}}}{4T_{\text{ср}} R_{\text{ср}} k_{\text{ср}}} = k_{\text{р, об'єкт}}. \quad (6.72)$$

Отже, згідно з виразами (6.68) і (6.72), при проектуванні контурів із заданим підсилювачем дістаємо пропорційно-інтегральний регулятор струму і пропорційний регулятор швидкості.

У разі проектування їм технічний оптимум забезпечується добра якість перехідних процесів, проте статична точність системи за наявності зовнішніх збурень у багатьох випадках виявляється недостатньою. Розглянемо, наприклад, структурну схему, наведену на рис. 6.37. Для цієї схеми

$$u_{\text{ср, об'єкт}} = u_{\text{ср}} + u_{\text{ср, об'єкт}}.$$

Якщо врахувати, що

$$u_{\text{н.н.}} = \frac{u_{\text{н.н.}}}{W_{\text{р.н.}}(f)} = \frac{u_{\text{н.н.}}}{k_{\text{р.н.}}}$$

$$u_{\text{н.н.}} = k_{\text{н.н.}} \omega,$$

$$u_{\text{н.н.}} = k_{\text{н.н.}} \omega + u_{\text{н.н.}} / k_{\text{р.н.}}.$$

Регулятор струму є пропорційно-інтегральним, тому в установившому режимі

$$u_{\text{н.н.}} = u_{\text{н.н.}} = Ik_{\text{н.н.}}$$

$$u_{\text{н.н.}} = k_{\text{н.н.}} \omega + Ik_{\text{н.н.}} / k_{\text{р.н.}},$$

$$\omega = \frac{u_{\text{н.н.}}}{k_{\text{н.н.}}} - \frac{Ik_{\text{н.н.}}}{k_{\text{р.н.}} k_{\text{н.н.}}}.$$

Враховуючи вираз (6.72) для $k_{\text{р.н.}}$, це рівняння можна записати у вигляді

$$\omega = \frac{u_{\text{н.н.}}}{k_{\text{н.н.}}} - I \frac{R_{\text{д}}}{c} \frac{4T_{\text{в}}}{T_{\text{ч}}}. \quad (6.73)$$

Звідси випливає, що відхилення швидкості в установившому режимі, зумовлене зміною струму I (навантаження на валу двигуна), визначається другою складовою цього рівняння, тобто

$$\Delta \omega_{\text{ст}} = I \frac{R_{\text{д}}}{c} \frac{4T_{\text{в}}}{T_{\text{ч}}}.$$

Статичне падіння швидкості в розглянутій системі обчислюється за формулою

$$\Delta \omega_{\text{ст.р}} = IR_{\text{д}} / c,$$

тому

$$\Delta \omega_{\text{ст}} = \Delta \omega_{\text{ст.р}} \frac{4T_{\text{в}}}{T_{\text{ч}}}.$$

Отже, падіння швидкості в системі підпорядкованої регулювання з пропорційним регулятором швидкості буде меншим, ніж у ро-

тимкнутій системі тільки за умови $T_{\Sigma} > 4T_{\Sigma}$. Для більшості електроприводів ця умова виконується, тобто точність роботи замкнутої системи в установившому режимі вища, ніж розімкнутої. Проте для багатьох електроприводів точність роботи СТР з пропорційним регулятором виявляється недостатньою. Для усунення цього недоліку використовують настроювання на *симетричний оптимум*.

По суті настроювання на симетричний оптимум можна здійснити, якщо в контур, настроєний на технічний оптимум, ввести послідовно пропорційно-інтегральну ланку, передаточна функція якої $(4T_{\Sigma}p + 1)/2T_{\Sigma}p$. Тоді передаточна функція розімкнутого контуру матиме вигляд

$$W(p) = \frac{4T_{\Sigma}p + 1}{4T_{\Sigma}p} \frac{1}{2T_{\Sigma}p(T_{\Sigma}p + 1)} \quad (6.74)$$

Відповідну ЛАХ покладає на рис. 6.36, б. Ця характеристика симетрична відносно частоти зрізу $\omega_d = 1/2T_{\Sigma}$, звідси і назва «симетричний оптимум».

У разі настроювання на симетричний оптимум статична похибка відсутня, але якість перехідних процесів у разі відпрацювання сукупності важкої дії значно гірша порівняно з настроюванням на технічний оптимум. Передаточна функція (6.74) відповідає відносно невеликій затримці фазою $\Delta\varphi = 33^\circ$. Перерегулювання збільшується до 43 %, тобто якість перехідного процесу незадовільна. Проте перерегулювання доцільно просто знизити до 3 %, якщо застосувати в ланці «завдання» фільтр із передаточною функцією

$$W_d(p) = 1/(4T_{\Sigma}p + 1).$$

Добрі результати дає також застосування длавача інтенсивності, який перетворює ступінчастий вхідний сигнал на такий, що змінюється лінійно залежно від часу.

Наведемо переваги СТР, які забезпечують їм широке застосування в електроприводах постійного і змінного струму.

1. Незмінність структури для об'єктів керування з різними параметрами регулювання.
2. Простота визначення передаточних функцій регуляторів.
3. Простота та зручність налагодження.
4. Прості та зручні способи розрахунку і настроювання контуру СТР, що дає змогу навіть за значних похибок визначення динаміч-

них параметри об'єкта дістали відком роботодавцю систему керування електроприводом.

5. Можливість і простота обмеження будь-якого з регульованих параметрів на потрібному рівні. Кожний з контурів СПР виконує завдання стабілізації одного з параметрів. Вхідним сигналом кожного із внутрішнього контуру є вихідний сигнал регулятора зовнішнього контуру. Тому для обмеження параметра, регульованого другим контуром, достатньо обмежити вихідний сигнал регулятора зовнішнього контуру.

Проте слід зауважити, що в системах підпорядкованого керування можна забезпечити потрібну якість перехідних процесів, але при настроюванні системи на технічний оптимум неможливо відійти від величини статизму, оскільки він визначається відхиленням змичної величини в розімкнутій системі та співвідношенням сталу част системи. У разі настроювання на симетричний оптимум статизм відсутній, але динамічне відхилення регульованої величини при збудженні тому збудженні наблизиться таке саме, як і в системі, настроєній на технічний оптимум. Неможливість зменшення статизму (при настроюванні на технічний оптимум) і динамічного відхилення регульованої величини є загальним недоліком систем підпорядкованого керування. Ця обставина укажує на застосування систем підпорядкованого керування для електроприводів з великим діапазоном регулювання вихідної величини із підвищеними вимогами до її стабілізації.

6.13

Модальне керування

Суть модального керування полягає в забезпеченні бажаного розподілу полюсів замкнутої системи, яка складається з ланки об'єкта і регулятора, причому регулятор виконано у вигляді набору жорстких пропорційних зворотних зв'язків для кожної зі змінних стану об'єкта. Походження назви «модальне керування» пояснюється тим, що полюсам замкнутої системи відповідають складові вічного руху системи, які іноді називаються *модами*.

За умови, що є повна інформація про вектор стану об'єкта керування, регулятор виконується у вигляді набору пропорційних зв'яз-

ків за кожною координатою об'єкта. Коефіцієнти зворотних зв'язків вибирають так, щоб полюси замкнутої системи займали заданіше вибране положення, за якого характеристичне рівняння замкнутої системи відповідале певній стандартній формі порядку n :

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} \omega_d p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \omega_d^{n-1} p + a_n \omega_d^n, \quad (6.75)$$

де ω_d — модуль n -кратного дійсного кореня. Цей параметр визначає реальний час перебігу перехідних процесів у разі переведення системи з одного стану в інший. Вибір частоти ω_d , що визначає швидкість системи, в загальному випадку досягноть складної задачі. Зазвичайно тільки, що чим більше значення ω_d , тим менший, за інших однакових умов, час перехідних процесів.

Застосовуються різні способи бажаного розміщення коренів характеристичного рівняння. Один із них полягає в тому, що всі корені вважаються однаковими, дійсними та від'ємними. Приймається, що модуль коренів дорівнює ω_d . У цьому разі характеристичне рівняння n -го порядку має вигляд бінома Ньютона:

$$D(p) = (p + \omega_d)^n. \quad (6.76)$$

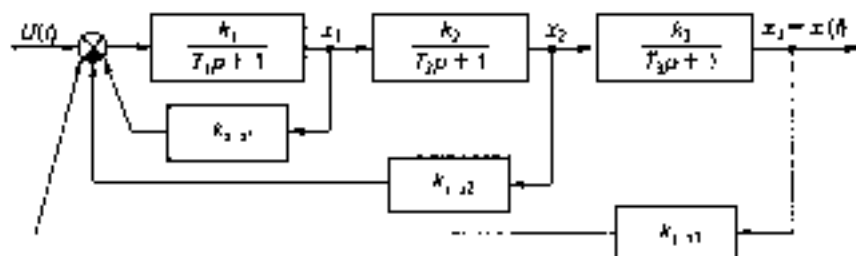
Стандартні форми, що відповідають цьому рівнянню, дістали назву *біноміальних*. Значення коефіцієнтів в біноміальній формі до восьмого порядку включно наведено в табл. 6.4.

Таблиця 6.4

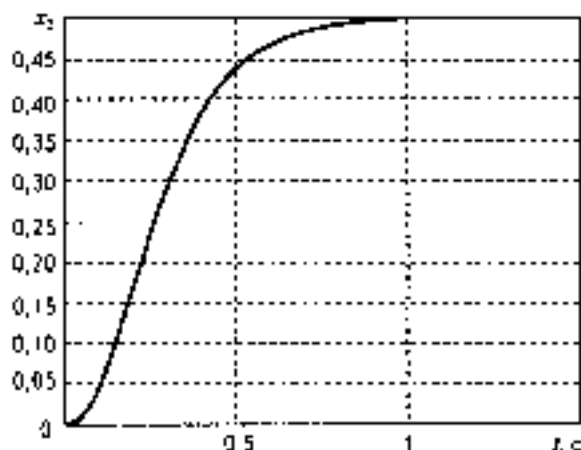
Порядок характерис- тичного рівняння	Коефіцієнти біноміальної форми									
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	
1	1	1	—	—	—	—	—	—	—	
2	1	2	1	—	—	—	—	—	—	
3	1	3	3	1	—	—	—	—	—	
4	1	4	6	4	1	—	—	—	—	
5	1	5	10	10	5	1	—	—	—	
6	1	6	15	20	15	6	1	—	—	
7	1	7	21	35	35	21	7	1	—	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	

Перехідні процеси в системі, характеристичне рівняння якої має вигляд (б.76), зумовлені ступінчастою зміною вхідної (задаючої) дії, є апериодичними і не мають перерегулювання.

- **Приклад 6.6.** Структурну схему системи подано на рис. 6.38, а. Параметри схеми: $T_1 = 1$ с; $T_2 = 0,5$ с; $T_3 = 0,2$ с; $k_1 = 50$; $k_2 = 2$; $k_3 = 0,5$. Визначити коефіцієнти жорстких широтних зв'язків $k_{1,1}$; $k_{1,2}$; $k_{1,3}$ так, щоб забезпечувати перехідний процес без перерегулювання. При розрахунку прийняти $\omega_k = 10$.



а



б

Рис. 6.38

Розв'язання. Характеристичне рівняння замкнутої системи

$$\begin{aligned} T_1 T_2 (p^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + k_1 k_{1,1} T_2 T_3) p^2 + \\ + (T_1 + T_2 + T_3 + k_1 k_{1,1} T_3 + k_2 k_{2,1} T_1 + k_2 k_{2,2} T_3) p + \\ + 1 + k_1 k_{1,1} + k_2 k_{2,1} + k_2 k_{2,2}) = 0 \end{aligned}$$

Підставимо значення параметрів та зберемо коефіцієнти при p^i рівним одиниці, тоді

$$\begin{aligned} p^3 + (8 + 50k_{1,1}) p^2 + (17 + 350k_{1,1} + 200k_{2,1}) p + \\ + 10 + 500k_{1,1} + 1000k_{2,1} + 500k_{2,2} = 0 \end{aligned}$$

Біномів даної форми рівняння третього порядку має вигляд

$$p^3 + 3\omega_n p^2 + 2\omega_n^2 p + \omega_n^3 = 0.$$

Порівнявши коефіцієнти при відповідних степенях p з вираженнями $\omega_n = 10$, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} 8 + 50k_{1,1} &= 30, \\ 17 + 350k_{1,1} + 200k_{2,1} &= 300, \\ 10 + 500k_{1,1} + 1000k_{2,1} + 500k_{2,2} &= 1000 \end{aligned}$$

відки отримаємо $k_{1,1} = 0,44$, $k_{2,1} = 0,645$, $k_{2,2} = 3,25$.

Перехідний процес з системи з визначеними параметрами коефіцієнтів зворотних зв'язок, зумовлений одиничною ступінчастою кінцею дією, зображено на рис. 6.38, б.

Інший важливий різновид коренів характеристичного рівняння замкнутої системи на комплексній площині $p \in$ розподіл Баттерворта. Корені розподілюються на лінійку і радіусом ω_n уявляють півнапівнісний комплексний площинні коренів. Кут між уявною віссю та лінійкою, введеною через найближчий до неї корінь і точку перетину уявної та дійсної осей, дорівнює половині кута між сусідніми коренями. Значення коефіцієнтів характеристичного рівняння у формі Баттерворта наведено в табл. 6.5.

Час переходних процесів, що відповідають характеристичному рівнянню у формі Баттерворта, за ступінчастої вхідної дії менший порівняно з біноміальною формою, але у разі зростання порядку характеристичного рівняння за даного значення ω_n значально збільшується. Якщо використовувати форму Баттерворта для систем другого порядку, то отримаємо характеристичне рівняння з коефіцієнтом демпфування $\sqrt{2}/2$, що відповідає налаштуванню на модульний сигнал.

Таблиця 6.5

Порядок харак- теристичного рівняння	Коефіцієнти форми Баттерфіта								
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	1	1	—	—	—	—	—	—	—
2	1	1,4	1	—	—	—	—	—	—
3	1	2	2	1	—	—	—	—	—
4	1	2,6	2,4	2,6	1	—	—	—	—
5	1	3,24	5,24	5,24	3,24	1	—	—	—
6	1	3,86	7,46	9,13	7,46	3,86	1	—	—
7	1	4,5	10,1	14,6	14,6	10,1	4,5	1	—
8	1	5,18	13,14	21,24	25,69	21,24	13,14	5,18	1

Коефіцієнти жорстких пропорційних зворотних зв'язків забезпечують керування усіма n коренями характеристичного рівняння, якщо ці зв'язки здійснюються до уведення змінного стану. У цьому разі n коефіцієнтів характеристичного рівняння залежить від n коефіцієнтів зворотних зв'язків, тобто маємо n рівнянь для визначення певних n зворотних зв'язків. Проте в більшості реальних задач можливо вимірювати та реалізувати зворотні зв'язки тільки за частинною змінним стану. У цьому разі для здійснення принципу матричного керування до жорстких зворотних зв'язків додаються диференціальні (пучкові) зв'язки.

Наприклад, якщо в системі n -го порядку вимірюються тільки r змінних стану, то необхідно додати $n - r$ пучкових зв'язків. Тоді загальна кількість коефіцієнтів жорстких і пучкових зворотних зв'язків дорівнюватиме кількості коефіцієнтів характеристичного рівняння, що для зм'ягчання ці коефіцієнти та реалізують принцип матричного керування.

6.14

Керованість і спостережуваність

Керованість — одне з основних понять теорії керування, що характеризує можливість переведення короткої системи в заданий стан за допомогою керуючих дій. Система вважається керованою, якщо існує така керуюча дія $u(t)$, що забезпечує переведення системи з довільного початкового стану x_0 в довільний стан x_1 протягом скінченного часу.

Точніше визначення керованості сформулював Р. Калман на прикладі лінійної стаціонарної системи, що описується рівнянням

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (6.77)$$

де A — матриця системи вимірності $n \times n$; B — матриця входу вимірності $n \times m$; $x(t)$ — вектор змінних стану; $u(t)$ — вектор зовнішніх впливів.

Рівняння (6.77) доповнюються рівнянням зв'язку між вектором змінних стану $x(t)$ й вектором вихідних вимірних параметрів системи $y(t)$:

$$y(t) = Cx(t). \quad (6.78)$$

У цьому рівнянні C — матриця виходу вимірності $r \times n$, де r — кількість вимірюваних змінних.

Система називається тоді *керованою повністю*, якщо для будь-яких моментів часу t_1, t_2 , де $t_2 > t_1$, і будь-яких зовнішніх станів x_0 і x_1 існує керуюча дія $u(t)$ ($t_1 < t < t_2$), що переводить початковий стан $x(t_0) = x_0$ у кінцевий $x(t_1) = x_1$.

Умову повної керованості для теорема Калмана: *лінійна n -вимірна система, що описується рівнянням (6.77), повністю керована тоді й тільки тоді, коли блок-матриця*

$$K = [B; AB; A^2B; \dots; A^{n-1}B] \quad (6.79)$$

вимірності $n \times nm$ має ранг, що дорівнює n , тобто

$$\text{rang } K = n. \quad (6.80)$$

Натавляємо, що ранг матриці дорівнює найвищому порядку міно-рів матриці, що не дорівнюють нулю.

Матриця K називається *матрицею керованості*. Вона складається з стовпців матриці B та добутків матриць $AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$.

Дослідимо керуваність об'єкта на такому простому прикладі. Розглянемо об'єкт другого порядку, що описується рівняннями

$$dx_1/dt = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2;$$

$$dx_2/dt = a_{21}x_1 + b_{22}u_2.$$

Матриці, що відповідають рівнянням (6.77), мають вигляд

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix},$$

а їхній добуток

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12} \cdot 0 & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0 & b_{12} + a_{22} \cdot 0 \\ 0 & b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Матриця керуваності записується так:

$$K = [B; AB] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0 & b_{22} & 0 & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

При $b_{22} \neq 0$ ранг матриці $K = 2$, тому об'єкт повністю керуваний. Якщо $b_{22} = 0$, то ранг матриці $K = 1$ і об'єкт не повністю керуваний, а керуваний лише за однією координатою.

Розглянемо тепер поняття *спостережуваності і відокремлюваності*. Система називається *якимось чином повністю спостережуваною*, якщо існує таке t_1 ($t < t_1 < \infty$), що за відомою інформацією про вихід $y(t)$ вхід $u(t)$ системи для інтервалу $t \leq t \leq t_1$ можна визначити всі координати вектора змінних стану системи $x(t)$.

Проблема спостережуваності виникла в зв'язку з тим, що при спостережі систем зі зворотними зв'язками керування визначається як функція змінних стану. В загальному випадку ці змінні є абстрактними величинами і їх не можна вимірювати. Піддавшись вимірюванню (спостереженню) вектор $y(t)$, координатами якого є вихідні величини, і вектор керуючої дії $u(t)$. Вихідні величини функціонально пов'язані зі змінними стану, тому для реалізації керування зі зворотним зв'язком необхідно записання визначення змінних стану за значеннями $y(t)$, що вимірюються.

З поняттям спостережуваності безпосередньо пов'язане поняття визначуваності. Система *визначувача* (або *повністю визначувача*), якщо існують такі t_0 ($-\infty < t_0 < t$), що за відомою інформацією про вхід $u(t)$ та вихід цієї системи для інтервалу $t_0 \leq t \leq t$ можна визначити всі координати вектора змінних стану системи $x(t)$.

Для стаціонарних систем з повної спостережуваності повністю визначуваність і навпаки, тому ці поняття можна не розрізняти.

Для з'ясування стаціонарної системи, що є повністю спостережуваною (6.77) і (6.78), критерій повної спостережуваності (визначуваності) формулюється так: *система повністю спостережувана (визначувача) тоді й тільки тоді, коли ранг матриці спостережуваності постійності не змінюється*

$$N = \{C^T + A^T C^T + \dots + A^T C^T + C^T\} \quad (6.81)$$

формулює. Це необхідна і достатня умова повної спостережуваності Калмана.

Якщо ранг матриці N менше n , то система не повністю спостережувана, якщо ранг дорівнює нулю — повністю неспостережувана.

Відоме значення вектора змінних стану позначається його *оцінкою*. Пристрій, що забезпечує знаходження оцінки за вимірюваними векторами керування $u(t)$ і вихідних параметрів $y(t)$ для інтервалу $t_0 \leq t \leq t$, називається *спостеревачем*.

Для спостережача вектори керування $u(t)$ і вихідних змінних $y(t)$ є віхідними змінними.

Спостережачем повного порядку для системи, що описується рівняннями (6.77) і (6.78), називається пристрій, рішення якого

$$\dot{x} = Fx + Gy + Hu, \quad (6.82)$$

якщо при $\dot{x}(t_0) = x(t_0)$ справедливі рівності,

$$\dot{x}(t) = x(t), \quad t \geq t_0$$

для всіх $y(t)$, $t \geq t_0$.

У рівнянні (6.82) F , G , H — матриці, а знаком « $\cdot$ » позначено оцінку вектора змінних стану.

Пристрій, що описується рівнянням (6.82), є *спостережачем повного порядку*, оскільки його порядок збігається з порядком вихідної системи. Якщо спостережач описується рівнянням, порядок якого

підлягає за порядком вихідної системи, то він називається *спостережимим зазначеного порядку*.

Введемо матриці F , G , H . Для цього з рівняння (6.77) віднімемо рівняння (6.82) й після підстановки $y(t)$ згідно з рівнянням (6.78) дістанемо

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{x} \cdot (A - GC)x - F\tilde{x} + (B - H)u.$$

З цього рівняння випливає, що якщо $x(t) = \tilde{x}(t)$ для всіх $t \geq t_0$ і $u(t)$, $t \geq t_0$, то

$$F = A - GC; \quad H = B$$

Матриця G дорівнює I , де I — довідкова матриця, яка позначається *матрицею коефіцієнтів підтегованих*.

Після підстановки знайдених значень матриць у рівняння (6.82) рівняння спостерігача матиме вигляд

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} - Ly + Du \quad (6.83)$$

або

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + L(y - C\tilde{x}). \quad (6.84)$$

З останнього рівняння випливає, що математична модель спостерігача складається з моделі вихідної системи $Ax + Bu$ і додаткового доданка, пропорційного різниці між вихідною змінною y та її оцінкою $\hat{y} = C\tilde{x}$. Структурну схему спостерігача, що відповідає рівнянню (6.84), наведено на рис. 6.39.

Спостерігач відновлює повну інформацію про вектор стану об'єкта керування, що являє можливість при проектуванні систем автоматичного керування використовувати метод *модального керування*.

Цей метод можна використати для визначення параметрів матриць L , коефіцієнтів спостерігача, що відповідає рівнянню (6.84). З рівняння (6.83) випливає, що стійкість та якість переходних процесів спостерігача ви-

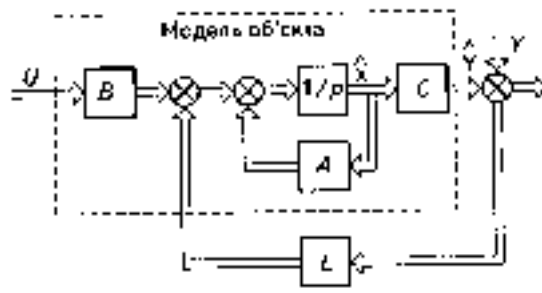


Рис. 6.39

значасться матрицею $A = LC$, де матриці A і C відомі. Характеристичне рівняння матриці $A = LC$ є характеристичним рівнянням спостерігача, а її власні значення — коренями характеристичного рівняння. Тому, визначивши характеристичне рівняння матриці $A = LC$ і порівнявши його до стандартної форми (6.75), коефіцієнти якої вибирають, виходячи з бажаного розміщення коренів на комплексній площині p , знаходимо параметри матриці L .

Контрольні запитання та завдання

1. Назвіть основні причини появи помилок у САР.
2. Наведіть рівняння помилок у спідкузованих системах і системах стабілізації.
3. Як знайти коефіцієнти помилок у лінійних САР?
4. Яким чином впливає замикання системи на її якість?
5. Перерахуйте основні шляхи підвищення точності САР.
6. Пирілі-айте часові характеристичні розумк-уте і замкнуту систему.
7. Що розуміють під законом керування?
8. Як особливості і який вплив має пропорційний закон керування?
9. Які недоліки має інтегральний регулятор?
10. Які переваги має ПІ-регулятор?
11. Напишіть формулу пропорційно-інтегрально-диференціаль-ного закону керування і визначте роль кожної складової.
12. Що таке «зворотність» системи?
13. Сформулюйте принцип інваріантності.
14. Як існують форми інваріантності?
15. Як забезпечити абсолютну інваріантність у системі?
16. Яким чином можна підвищити якість у системах зі змінною структурою?
17. Як підвищується якість у комбінованих САР?
18. Яким чином впливають нестаточні зворотні зв'язки на якість?
19. Як визначити передаточну функцію тисненого чотириполюсника?
20. Як визначити передаточну функцію кола з операційним посилювачем?
21. Напишіть схеми П-, І-, ПІ-, Д-, ПІД- і ПІД-регуляторів, побудованих на операційних підсилювачах.
22. Схарактеризуйте суть таких методів підвищення запасу стійкості: демпфування з придушенням високх частот, демпфування з підняттям високх частот, демпфування з придушенням середньх частот, демпфування з введенням від'ємних зсувів за фазою.
23. На чому ґрунтується ідея методу синтезу коректувальних пристроїв за допомогою ЛАХ?

24. Як побудувати бажану ЛАХ за методом Солодовнікова?
25. Наведіть спрощену методику побудови бажаної ЛАХ.
26. Як виконується синтез послідовної коректувальної ланки?
27. Як виконується синтез паралельної коректувальної ланки?
28. Як можна виконати синтез кількох коректувальних ланок для однієї САР?
29. Наведіть структурну схему системи підпорядкованого регулювання і поясніть принципи її побудови.
30. Як визначити передаточну функцію регулятора при настроюванні контуру на технічний і симетричний оптимуми?
31. У чому полягає суть методу модального керування?
32. Дайте визначення поняттям «керованість» і «спостережуваність».
33. Сформулюйте умову повної черговості.
34. Що таке спостерігач? Яким рівнянням описується спостерігач повного порядку?

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ
В СИСТЕМАХ
АВТОМАТИЧНОГО
КЕРУВАННЯ

7.1

Уявлення про випадкові процеси

У попередніх главах припускалося, що дії, прикладені до САК, є *детермінованими*, тобто становлять цілком визначені функції часу. Практично ж САК часто працюють в умовах, коли зовнішні дії мають *випадковий* характер. Як приклади таких дій можна навести шпур руху електромеханічних об'єктів, коливання напружкостійкості джерел енергії, електричних приводів, випадкові перешкоди в регуляторах і вимірювальних пристроях тощо. В складувальних системах часто випадковою є також задана дія.

САК, що працюють в умовах випадкових збурень, можна проєктувати, виходячи тільки з максимально можливих значень цих збурень. Проте, якщо ймовірність появи максимального значення збурення незначна, то до САК ставитимуться як до жорсткішої вимоги порівняно з тими, які виставляють з реальних умов експлуатації. Значно кращі результати дає використання спеціальних методів, які враховують випадковий характер збурень і надіють можливість визначити деяку усереднену поведінку системи.

Перед розробником інженерки САК, яка перебуває під дією випадкових збурень, виникають деякі необхідні відомості про випадкові величини, випадкові процеси та їхні ймовірнісні характеристики.

Випадковою називається величина, значення якої визначається неконтрольованими причинами і тому не може бути точно передбаченою. Якщо випадкова величина може набувати окремих значень лише зі скінченної множини її можливих значень, то вона називається *дискретною випадковою* величиною. Якщо ж випадкова величина може набувати усіх значень у певному заданому інтервалі, то вона називається *безперервною випадковою* величиною. Ймовірність того, що безперервна випадкова величина набуде конкретного, за-

довільний, визначеного значення, нескінченно малих, тобто ймовірність події $p = 0$.

Найважливішими ймовірнісними характеристиками безперервних випадкових величин є функція розподілу, щільність розподілу, математичне очікування, дисперсія.

Функцією розподілу ймовірностей випадкової величини X називається функція

$$F(x) = p(X \leq x),$$

яка дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X має значення, менше за x . Ймовірність того, що безперервна випадкова величина потрапить у деякий проміжок $x_1 < X < x_2$, визначається різницею функцій розподілу, тобто

$$p(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Похідна від функції розподілу

$$w(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (7.1)$$

називається *щільністю розподілу*, або *диференціальною функцією розподілу*.

Математичне очікування, або середнє значення безперервної випадкової величини, яке визначається за множиною її можливих значень, виражається через щільність розподілу за формулою

$$m_x = M\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x) dx, \quad (7.2)$$

а середнє значення квадрата безперервної випадкової величини

$$M\{x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x) dx. \quad (7.3)$$

У формулах (7.2) і (7.3) $M\{\cdot\}$ — символ усереднення.

Дисперсія D_x , яка характеризує розкил випадкових значень безперервної випадкової величини навколо її середнього значення, визначається як різниця середнього значення квадрата і квадрата середнього значення:

$$D_x = M\{x^2\} - m_x^2. \quad (7.4)$$

а середньоквадратичне шалашення як квадратний корінь із дисперсії:

$$\sigma = \sqrt{D_x}. \quad (7.5)$$

Випадкова величина X , що змінюється в часі t , становить випадковий процес. Інакше кажучи, *випадковий процес* — це функція часу, значення якої в кожний момент часу є випадковою величиною. Отже, випадковий процес $X(t)$ — це сукупність множини можливих кривих $x(t)$, кожна з яких становить лише окремі реалізації випадкового процесу $X(t)$. Можливі графіки випадкових процесів зображено на рис. 7.1.

Ймовірність того, що процес відбуватиметься за якою-небудь певною задаттегідою заданою кривою, нескінченно мала. Можливий характер перебігу випадкового процесу оцінюється ймовірністними характеристиками, подібними до характеристик безперервної випадкової величини.

У кожний окремий момент часу $t_1, t_2, t_3, \dots$ (рис. 7.1, а) можна розглядати випадкові величини $X(t_1), X(t_2), X(t_3), \dots$, кожна з яких має свою функцію розподілу. Для випадкової величини $X(t_1)$ функція розподілу має вигляд

$$F_1(x_1, t_1) = p\{X(t_1) < x\}$$

Функція $F(x, t)$ називається *одновимірною функцією розподілу ймовірностей* випадкового процесу $X(t)$. Частинна похідна від неї

$$w_1(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}$$

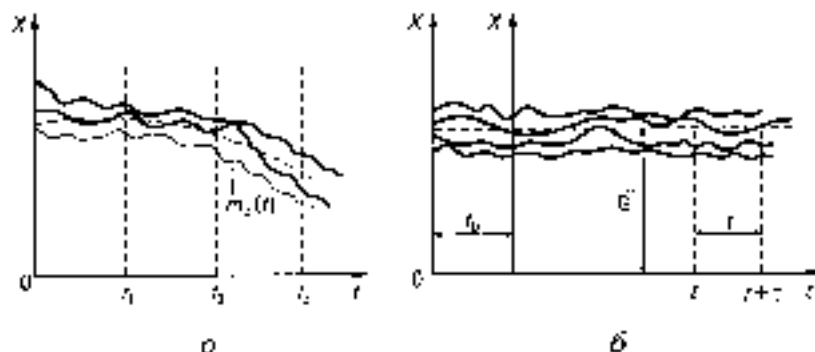


Рис. 7.1

називається *одновимірною щільністю розподілу*.

Функції $F_1(x, t)$ і $\pi_1(x, t)$ є найпростішими характеристиками випадкового процесу. Більш повну характеристику випадкового процесу дає *двовимірну функцію розподілу*

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) < x_1; X(t_2) < x_2\},$$

яка порівнює ймовірність того, що при t_1 значення випадкового процесу менше за x_1 , а при t_2 — менше за x_2 .

Частинні похідні

$$\pi_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

називається *двовимірною щільністю розподілу*.

Аналогічно можна визначити також багатовимірні функцію щільності розподілу.

Випадкові процеси можуть бути *стаціонарними* або *нестационарними*. Якщо ймовірнісні характеристики випадкового процесу не залежать від вибору моменту часу t , тобто інваріантні відносно початку відліку, то випадковий процес називається *стаціонарним*, у протилежному разі — *нестационарним*. Графік випадкового стаціонарного процесу зображено на рис. 7.1, б.

Ймовірнісні характеристики стаціонарного процесу не змінюються протягом часу, тобто

$$F(x, t) = F(x),$$

$$\pi(x, t) = \pi(x).$$

Стаціонарні випадкові процеси мають дуже важливу властивість, яка відноситься *ергодичності*. Суть цієї властивості така, будь-яке середнє за множиною з ймовірністю «одиночного» (фактично достовірного) дорівнює відповідному середньому за часом, тобто

$$x_{\text{ср}} = \bar{x}; \quad \langle x^2 \rangle_{\text{ср}} = \bar{x}^2$$

і т. д., де риском позначено усереднення за часом. Доді корисуватимемо загальним символом усереднення $M\{\}$, яким позначатимемо усереднення за множиною або за часом, тобто

$$M\{x_i^2\} = x_{\text{ср}}^2 = \bar{x}; \quad M\{x^2\} = \langle x^2 \rangle_{\text{ср}} = \bar{x}^2.$$

При викладенні наступного матеріалу розглядатимемо лише стаціонарні випадкові процеси.

Замість терміна *випадковий* використовують також термини *стochastic* або *random*.

7.2

Характеристики стаціонарних випадкових процесів

До основних характеристик стаціонарних випадкових процесів належать математичне очікування, дисперсія, кореляційна функція.

Математичне очікування визначає середнє значення випадкового процесу за множиною

$$m_x = M\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x w_1(x) dx. \quad (7.6)$$

Якщо взяти середню властивість, то

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (7.7)$$

Дисперсія

$$\begin{aligned} D_x &= M\{[x(t) - m_x]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 w_1(x) dx = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - m_x(t)]^2 dt = M\{x^2\} - (M\{x\})^2 \end{aligned} \quad (7.8)$$

характеризує міру розкиду значень випадкового процесу стосовно його середнього значення і дорівнює різниці середнього значення квадрата процесу і квадрата середнього значення процесу. Квадратний корінь із дисперсії визначає середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \quad (7.9)$$

Кореляційна функція (або, що те саме, автокореляційна) характеризує ступінь залежності (кореляції) між значеннями процесу, відрахованими один від одного на час τ , тобто оцінює швидкість згасання випадкового процесу протягом часу. Вони становлять середнє значення добутку випадкових процесів $x(t)$ і $x(t + \tau)$ і визначається за формулою

$$R_x(\tau) = M\{x(t)x(t + \tau)\}. \quad (7.10)$$

Для стаціонарного випадкового процесу на основі ергодичної властивості кореляційну функцію можна визначити як середню за часом:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau)dt \quad (7.11)$$

Кореляційна функція стаціонарного процесу має такі властивості:

1. Кореляційна функція є парною функцією часу τ . Замінивши у виразі (7.10) t на $t - \tau$, дістанемо

$$R_x(\tau) = M\{x(t - \tau)x(t)\} = R_x(-\tau).$$

2. При $\tau = 0$

$$R_x(0) = M\{x^2(t)\}, \quad (7.12)$$

тобто початкове значення кореляційної функції дорівнює середньому значенню квадрата випадкового процесу. Крім того, з виразів (7.12) і (7.8) випливає, що

$$R_x(0) = D_x + m_x^2 \quad (7.13)$$

Випадковий процес, середнє значення якого дорівнює нулю, називається *автопроцентом*. Для такого процесу

$$R_x(0) = D_x.$$

3. Значення кореляційної функції при $\tau = 0$ є найбільшим:

$$R_x(0) \geq R_x(\tau). \quad (7.14)$$

Щоб довести цю нерівність, розглянемо очевидну нерівність

$$[x(t) - x(t + \tau)]^2 \geq 0,$$

з якої

$$x^2(t) + x^2(t + \tau) \geq 2x(t)x(t + \tau).$$

Взьмемо середнє за часом ви правої та лівої частини останньої нерівності. Тоді, з урахуванням виразів (7.12) і (7.10), дістанемо

$$M\{x^2(t) + x^2(t + \tau)\} = 2M\{x^2(t)\} = 2R_x(0),$$

$$2M\{x(t)x(t + \tau)\} = 2R_x(\tau),$$

тобто

$$R_x(0) \geq R_x(\tau).$$

4. При $\tau \rightarrow \infty$ кореляційна функція дорівнює квадрату середнього значення випадкового процесу

$$R_x(\infty) = m_x^2. \quad (7.15)$$

Для центрованого випадкового процесу

$$R_x(\infty) = 0.$$

5. Значення кореляційної функції значайно зменшується при збільшенні τ , оскільки зв'язок між віддаленими значеннями x , як правило, слабшає.

Для стаціонарного випадкового процесу кореляційна функція становить універсальну характеристику. Обчислити її досить просто, якщо мати експериментальні дані криві, тобто окремі реалізації випадкового процесу. Одну з таких реалізацій зображено на рис. 7.2. Для неї, згідно з виразом (7.11),

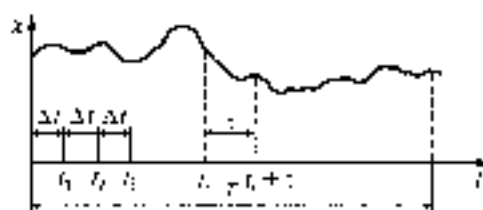


Рис. 7.2

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} x(t)x(t + \tau)dt =$$

$$= \frac{1}{T - \tau} \sum x(t_i)x(t_i + \tau)\Delta t$$

Чим більше час T і чим більше експериментальних знятих кривих, тим точніше можна визначити кореляційну функцію.

За відомою кореляційною функцією можна знати такі імовірнісні характеристики:

- середнє значення випадкового процесу

$$m_x = \sqrt{R_x(\infty)}.$$

7.2 Характеристика стохастических процессов

- середнє значення квадрата випадкового процесу

$$M[x^2(t)] = R_x(0);$$

- дисперсію

$$D_x = R_x(0) - R_x(\infty);$$

- середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{R_x(0) - R_x(\infty)}$$

Кореляційна функція має певний сенс також для детермованих обмежених процесів. Як приклад визначимо кореляційну функцію для постійної та гармонічної дій.

□ **Приклад 7.1.** Визначити кореляційну функцію постійної дї $x(t) = a$.

Розв'язання. За формулою (7.11) дістанемо

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a a d\tau = a^2.$$

□ **Приклад 7.2.** Визначити кореляційну функцію гармонічної дї $x(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$.

Розв'язання. За формулою (7.11)

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a^2 \sin(\omega t + \varphi) \sin[\omega(t + \tau) + \varphi] d\tau \quad (7.16)$$

У підінтегральному виразі добуток синусів замінимо різницею косинусів:

$$\sin(\omega t + \varphi) \sin[\omega(t + \tau) + \varphi] = \frac{\cos \omega \tau - \cos(2\omega t + \omega \tau + 2\varphi)}{2}$$

і зокремо деякі перегрупування членів частини виразу (7.16):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a^2 \frac{\cos \omega \tau}{2} d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{4T} \frac{\cos \omega \tau}{\omega} \Big|_{-T}^T = \frac{a^2}{2} \cos \omega \tau.$$

Вираз

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a^2 [-\cos(2\omega t + \omega \tau + 2\varphi)] d\tau$$

ібієрвально таким чином. Оскільки лінійний вираз є періодичним з періодом подорожжя $2\pi/\omega$, то інтеграл можна подати у вигляді суми підсумків і періодичних від $k = 0$ до $k\pi/\omega$ для $k = 0, 1, 2, \dots$

При $k = 0$

$$\frac{\omega^2}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(2\omega t + \omega t + 2\varphi) dt = 0$$

Для будь-якого k дістнемо істотний кінтосуа за цілий період, який дорівнює нулю. Отже,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \omega^2 [-\cos(2\omega t + \omega t + 2\varphi)] dt = 0$$

і внаслідок

$$R_{\omega}(\tau) = \frac{\omega^2}{2} \cos \omega \tau$$

Кореляційні функції безпосередньо стціонірних випадкових процесів можна подати у вигляді лінійних комбінацій кореляційних функцій трьох типів

$$R_{\omega}(\tau) = D_{\omega} e^{-\alpha|\tau|} \quad (7.17)$$

$$R_{\omega}(\tau) = D_{\omega} e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau \quad (7.18)$$

$$R_{\omega}(\tau) = D_{\omega} e^{-\alpha|\tau|} (\gamma \cos \omega_0 \tau + \gamma \sin \omega_0 \tau) \quad (7.19)$$

Графіки цих кореляційних функцій зображено на рис. 7.3.

Для описки статистичного зв'язку між двома випадковими процесами $X(t)$ і $Y(t)$ використовується поняття *взаємної кореляційної функції* $R_{xy}(\tau)$, яка виражається за формулою

$$R_{xy}(\tau) = M\{x(t)y(t + \tau)\} \quad (7.20)$$

Замінивши в ній $t = \tau$ дістанеми

$$R_{xy}(\tau) = M\{x(t - \tau)y(t)\} = M\{y(t)x(t - \tau)\} = R_{yx}(-\tau),$$

тобто взаємна кореляційна функція у разі зміни знака часу τ змінює порядок своїх індексів.

При $\tau = 0$

$$R_{xy}(0) = M\{x(t)y(t)\},$$

тобто початкове значення взаємної кореляційної функції дорівнює середньому значенню добутку випадкових процесів.

7.3. Спектральна щільність стаціонарних випадкових процесів

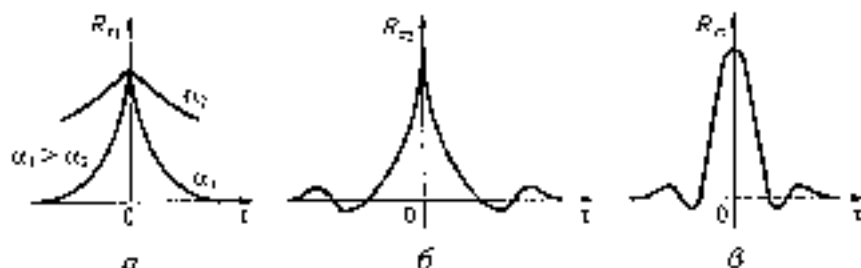


Рис. 7.3

Якщо середні значення процесів m_1 і m_2 відрізняються від нуля, то

$$R_{12}(\infty) = m_1 m_2.$$

Для не зв'язаних один з одним випадкових процесів

$$R_{12}(\tau) = 0.$$

Цим позначається такий вираз: *процеси незв'язані або не корельовані, що означає, чи є між ними статистичний (імовірнісний) зв'язок, чи немає*.

7.3

Спектральна щільність стаціонарних випадкових процесів

Поняття про спектральну щільність пов'язано з розкладом кривої стаціонарного випадкового процесу на гармонічні складові.

Спектральна щільність $S_x(\omega)$ — це частотна функція, яка характеризує спектральний (частотний) склад процесу. Вона є частотною характеристикою для середніх значень квадратів амплітуд гармонік, на які розкладається вхідний процес.

Спектральна щільність дає можливість використовувати частотні характеристики САК для дослідження якості процесу регулювання у разі випадкових дій.

Формально спектральну щільність можна визначити як зображення Фур'є кореляційної функції

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (7.21)$$

Згідно зі зворотним перетворенням Фур'є

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (7.22)$$

Замінивши в (7.21) τ на $-\tau$, ω на $-\omega$ і врахувавши парність кореляційної функції $R_x(\tau)$, дістаємо

$$S_x(\omega) = S_x(-\omega),$$

тобто спектральна щільність є парною функцією частоти.

Оскільки спектральна щільність і кореляційна функція є парними дійсними функціями, формули (7.21) і (7.22) зводяться до простішого вигляду:

$$S_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau; \quad (7.23)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (7.24)$$

Зв'язок між $S_x(\omega)$ і $R_x(\tau)$ такий, що чим ширше графік кореляційної функції $R_x(\tau)$, тим вузьчий графік спектральної щільності і навпаки.

Взаємна спектральна щільність двох статистично зв'язаних випадкових стаціонарних процесів визначається за формулою

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (7.25)$$

при цьому

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (7.26)$$

Спектральні щільності випадкових процесів, кореляційні функції яких мають вигляд (7.17)–(7.19), визначаються відповідно за формулами

$$S_{\varepsilon_1}(\omega) = D_{\varepsilon_1} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2};$$

$$S_{\varepsilon_2}(\omega) = D_{\varepsilon_2} \frac{2\alpha(\beta^2 + \omega^2)}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4};$$

$$S_{\varepsilon_3}(\omega) = D_{\varepsilon_3} \frac{(\alpha + \gamma\omega_0)\beta^2 + (\alpha - \gamma\omega_0)\omega^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4},$$

де $\beta^2 = \alpha^2 + \omega_0^2$.

Графіки спектральних щільностей $S_{\varepsilon_1}(\omega)$ і $S_{\varepsilon_2}(\omega)$ зображено на рис. 7.4. Крива 2 на рис. 7.4, б відповідає меншим значенням β і більшим значенням α порівняно з кривою 1.

Випадковий процес, який має однакові значення спектральної щільності для будь-яких частот від $-\infty$ до $+\infty$, називається *білим шумом*. Усі частоти для білого шуму однаково ймовірні, спектральна щільність і кореляційна функція мають вигляд

$$S_{\varepsilon}(\omega) = N = \text{const},$$

$$R_{\varepsilon}(\tau) = \frac{1}{2\pi} N \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega = N \delta(\tau),$$

де $\delta(\tau)$ — дельта-функція. Отже, кореляційна функція білого шуму $R_{\varepsilon}(\tau)$ дорівнює нулю для всіх $\tau \neq 0$, тобто становить імпульсну функцію.

Випадковий процес зі сталою спектральною щільністю фізично нереалізований, оскільки йому відповідають нескінченно великі диспер-

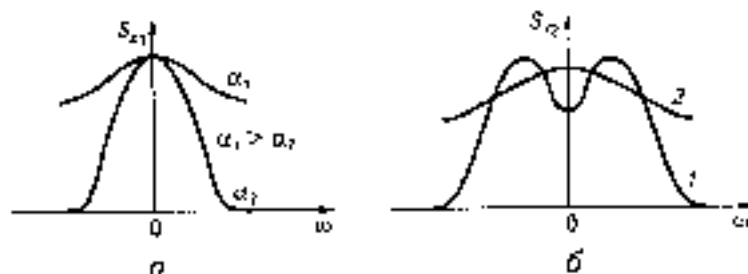


Рис. 7.4

створити середній квадрат $\langle D_x = \langle x^2 \rangle_{\text{ср}} = R_x(0) = +\infty \rangle$, отже, нескінченно велика потужність.

Щоб отримати фізично реальний процес, розглянемо випадок білого шуму з обмеженою спектральною щільністю

$$S_x = N \text{ при } |\omega| \leq \omega_c,$$

$$S_x = 0 \text{ при } |\omega| > \omega_c,$$

де ω_c — смуга частот для спектральної щільності. Кореляційна функція такого процесу

$$R_x(\tau) = \frac{N}{\pi} \sin \omega_c \tau.$$

При розглядуванні складувальних систем із випадковим входним сигналом часто виокремлюють його вхідний сигнал (кутову швидкість зламаної осі) змичають з якимось графіком (рис. 7.5), який нагадується типовим. Швидкість зберігає сталі значення протягом деяких інтервалів часу та стрибкоподібно переходить від одного значення швидкості до іншого.

Для такого сигналу математичне сподівання

$$\Omega_0 = \Omega_{\text{ср}} = 0,$$

а середній квадрат швидкості — десь пореєт

$$\langle \Omega^2 \rangle_{\text{ср}} = D_0 \neq 0,$$

де

$$D_0 = M\{\Omega(t)\Omega(t + \tau)\}.$$

Кореляційна функція визначається за формулою

$$R_x(\tau) = D_0 e^{-\mu|\tau|},$$

де μ — середня кількість змін швидкості упродовж однієї секунди.

Спектральна щільність

$$S_x(\omega) = \frac{2D_0/\mu}{\mu^2 + \omega^2}.$$

Формулу спектральної щільності застосовано для кутової швидкості. Не для змогу застосовувати цей вираз для обчислення динамічної похибки складувальної системи

7.4

Проходження стаціонарного випадкового сигналу через лінійну САК

Якість системи, до якої прикладено випадкові дії, не можна повністю охарактеризувати показниками, за якими оцінюють якість систем за детермінованих дій. Зокрема, такі показники, як похибка інтегрування задання та тривалість переходного процесу в разі збурень.

Розглянемо лінійну систему з входним сигналом $x(t)$, до якої прикладено вхідну дію $g(t)$. Якщо $g(t)$ є випадковою функцією, то й вихідний сигнал $y(t)$, і похибка $\varepsilon(t) = g(t) - x(t)$ також будуть випадковими функціями. Якість роботи динамічної системи у разі випадкових дій звичайно оцінюється середньоквадратичним відхиленням

$$M\{\varepsilon^2(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varepsilon^2(t) dt, \quad (7.27)$$

тобто середнім значенням квадрата похибки.

Згідно з виразами (7.12) і (7.27)

$$M\{\varepsilon^2(t)\} = R_\varepsilon(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega) d\omega, \quad (7.28)$$

тобто середньоквадратичне відхилення визначається кореляційною функцією або спектральною щільністю похибки $\varepsilon(t)$. Проте, звичайно відомі статистичні характеристики (кореляційна функція та спектральна щільність) вхідного сигналу, а не самої похибки. Тому необхідно визначити статистичні характеристики вихідного сигналу за відомими характеристиками вхідного.

Нехай вхідний сигнал $g(t)$ з відомими кореляційною функцією $R_g(\tau)$ та спектральною щільністю $S_g(\omega)$ подається на вхід лінійної системи з частотною характеристикою $W(j\omega)$. У цьому разі відомі спектральна щільність вхідної та вихідної величини дорівнюють добутку спектральної щільності вхідної величини на частотну характеристику системи

$$S_y(\omega) = S_g(\omega) |W(j\omega)|^2. \quad (7.29)$$

з спектральною щільністю вихідної величини — добутку квадрата модуля частотної характеристики системи та спектральної щільності вхідної дії

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) \quad (7.30)$$

Знаючи спектральну щільність, за формулами (7.22) або (7.24) визначаємо кореляційні функції $R_x(\tau)$ і $R_y(\tau)$.

Як приклад розглянемо реакцію лінійної системи на вхідну дію $g(t)$ типу білого шуму, спектральна щільність якого $S_x(\omega) = 1$. Згідно з виразом (7.29) дістаємо

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2$$

і, використовуючи (7.26), लिшемо

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega = w(\tau).$$

Отже, якщо на лінійну систему діє сигнал типу білого шуму, то вихідна спектральна щільність вихідної і вхідної величин дорівнює частотній характеристиці системи, а вихідна кореляційна функція — імпульсній перехідній характеристиці.

Часто розглядається випадковий процес, який не має постійної скінченної (центрованої). Для такого процесу $m_x = 0$ і

$$D_x = M\{x^2(t)\} = R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega$$

або, з урахуванням (7.30),

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \quad (7.31)$$

Ця формула є основою для дослідження випадкових процесів у САК. При її використанні доводиться мати справу з лінійним виразом

$$\frac{|C(j\omega)|^2}{|B(j\omega)|^2}, \quad (7.32)$$

де $C(j\omega)$ і $B(j\omega)$ — істинні влі комплексної змінної $j\omega$

Вважатимемо, що найвищий ступінь знаменника дорівнює n . Тоді в реальній системі найвищий ступінь чисельника буде не вищий за $n - 1$. Для зручності інтегрування вираз (7.32) подаємо у вигляді

$$\frac{|C(j\omega)|^2}{|B(j\omega)|^2} = \frac{C(j\omega)C(-j\omega)}{B(j\omega)B(-j\omega)},$$

де

$$B(j\omega) = b_n(j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + b_0;$$

$$C(j\omega) = c_n(j\omega)^{n-1} + c_{n-1}(j\omega)^{n-2} + \dots + c_0.$$

Отже, обчислення дисперсії за формулою (7.31) можна звести до визначення інтеграла

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(j\omega)C(-j\omega)}{B(j\omega)B(-j\omega)} d\omega.$$

Інтеграл такого вигляду обчислено і подано в літературі з теорії автоматичного керування.

7.5

Розрахунок точності САК за середньоквадратичною похибкою

Якщо на вхід САК (рис. 7.6, а) надходить випадковий стаціонарний вхідний сигнал, то середньоквадратичне значення похибки згідно з виразами (7.28) і (7.30) визначається за формулою

$$\begin{aligned} M\{\varepsilon^2(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varepsilon}(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{\varepsilon}(j\omega)|^2 S_{\eta}(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (7.33)$$

де $W_{\varepsilon}(j\omega) = \frac{1}{1 + W(j\omega)}$ — комплексна частотна функція системи відносно похибки

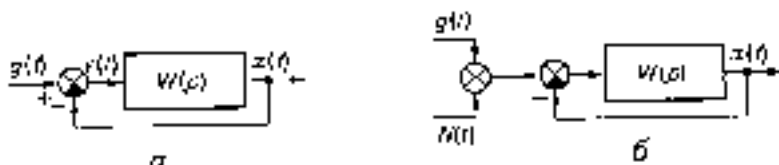


Рис. 7.6

Вираз (7.33) надає можливість визначити середній квадрат помилки системи за відомого спектрального щільності вхідного сигналу.

□ **Приклад 7.3.** Передаточна функція розглянутої слідкувальної системи

$$W(p) = \frac{K}{p(Tp + 1)}.$$

На вхід системи підводиться стаціонарний випадковий сигнал $g(t)$, спектральна щільність якого

$$N_g(\omega) = D \cdot \frac{2\mu}{\mu^2 + \omega^2}.$$

Треба визначити середньоквадратичну помилку.

Розв'язання. Записуємо передаточну функцію системи відносно помилки.

$$W_e(p) = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{Tp^2 + p + K}{Tp^2 + p + K}.$$

Середньоквадратична помилка обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} M(e^2(t)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_e(j\omega)|^2 \frac{D \cdot 2\mu}{\mu^2 + \omega^2} d\omega = \\ &= 2\mu D \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + \mu^2} \left| \frac{T(j\omega)^2 + j\omega + K}{T(j\omega)^2 + j\omega + K} \right|^2 d\omega \end{aligned}$$

Застосуємо лінійне перетворення змін у виразі

$$\begin{aligned} &\frac{|T(j\omega)^2 + j\omega|^2}{|T(j\omega)^2 + j\omega + K|^2 (\omega^2 + \mu^2)^2} = \\ &= \frac{|T(j\omega)^2 + j\omega|^2}{(T^2\omega^4 + (T\mu + K^2)\omega^2 + K^2)} \cdot \frac{C(j\omega)C(-j\omega)}{B(j\omega)B(-j\omega)}, \end{aligned}$$

де

$$C(j\omega) = c_0(j\omega)^2 + c_1(j\omega) + c_2;$$

$$B(j\omega) = b_2(j\omega)^2 + b_1(j\omega) + b_0; j\omega = s;$$

$$c_0 = T; c_1 = 1; c_2 = 0; b_2 = T; b_1 = T\mu + 1; b_0 = \mu + K; b_1 - b_0 = K\mu$$

Запишемо вираз для середньоквадратичного помилки

$$M\{\varepsilon^2(t)\} = 2\pi D_s \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(j\omega)C(-j\omega)}{B(j\omega)B(-j\omega)} d\omega = 2\pi D_s I_1.$$

Інтеграл I_1 є табличним:

$$I_1 = \frac{c_2^2 b_0 b_1 + (c_1^2 - 2c_0 c_2) b_1 b_2 + c_0^2 b_2 b_1}{2b_1 b_2 (b_1 - b_2 + b_1 b_2)}.$$

Підставляючи значення коефіцієнтів, отримаємо

$$I_1 = \frac{1 + T(\mu + K)}{2(T\mu^2 + \mu + K)}$$

і

$$M\{\varepsilon^2(t)\} = \frac{\pi D_s (1 + T\mu + TK)}{T\mu^2 + \mu + K}.$$

Розглянемо випадок, коли на вхід складувальної системи надходять задавача дія $g(t)$ і перешкода $N(t)$, причому $g(t)$ і $N(t)$ — випадкові стаціонарні функції, спектральні щільності яких $S_g(\omega)$ і $S_N(\omega)$ відомі. Структурну схему САК для цього випадку показано на рис. 7.6, б.

Середньоквадратична помилка

$$M\{\varepsilon^2(t)\} = M\{\varepsilon_g^2(t)\} + M\{\varepsilon_N^2(t)\} \quad (7.34)$$

у цьому разі є сумою двох складових. Перша з них зумовлена неточним відтворенням вхідного сигналу, а друга — перешкодою.

Призначенням складувальної системи є відтворення вхідного (корисного) сигналу $g(t)$. В ідеальному випадку бажана величина $x_d(t)$ на виході системи дорівнює корисному сигналу $g(t)$. Помилка $\varepsilon(t)$ системи становить відхилення дійсного значення вихідної величини від бажаного.

$$\varepsilon(t) = x_n(t) - x(t)$$

Структурну схему, з якої видно, як створюється відхилення, показано на рис. 7.7, а, де

$$W_1(p) = \frac{W(p)}{1 - W(p)}.$$

Перетворимо цю структурну схему до вигляду, зображеного на рис. 7.7, б. За структурною схемою на рис. 7.7, а запишемо передаточну функцію відносно похибки, що утворюється перешкодою,

$$W_2(p) = W'(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}$$

і відносно корисного сигналу

$$W_3(p) = 1 - W_1(p) = \frac{1}{1 + W(p)}.$$

Якщо вхідний сигнал є перешкодою похоронювання, то середньоквадратична похибка, згідно з (7.31) і (7.34), обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} M\{\varepsilon^2(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_2(j\omega)|^2 S_{\varepsilon}(\omega) d\omega + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_3(j\omega)|^2 S_{\varepsilon}(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (7.35)$$

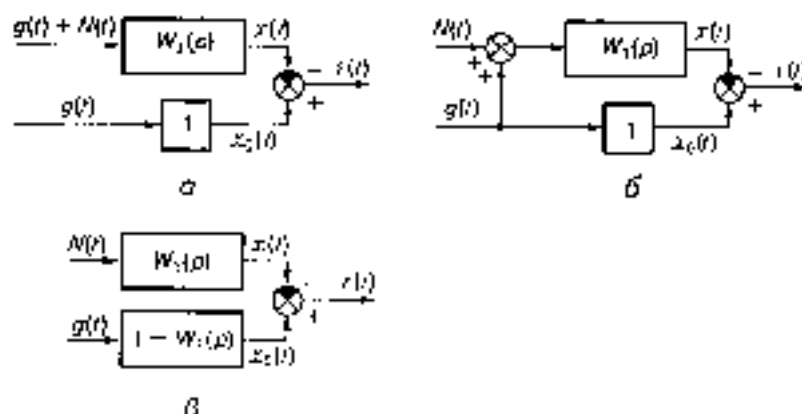


Рис. 7.7

Якщо корисний сигнал і перешкода корельовані, то середньо-квадратична похибка визначається за складнішою формулою:

$$M\{\varepsilon^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ |W_{\varepsilon}(j\omega)|^2 S_{\varepsilon}(\omega) + W_{\varepsilon}(-j\omega) S_{xy}(\omega) \times \\ \times W_{\varepsilon}(j\omega) - W_{\varepsilon}(j\omega) S_{yx}(\omega) W_{\varepsilon}(-j\omega) + |W_{\varepsilon}(j\omega)|^2 S_x(\omega) \} d\omega, \quad (7.36)$$

де $S_{xy}(\omega)$, $S_{yx}(\omega)$ — взяті спектрали щільності корисного сигналу та перешкоди.

7.6

Синтез лінійних САК за мінімумом середньоквадратичної похибки

Задача синтезу систем, що працюють при випадкових діях, звичайно розв'язується за критерієм мінімуму середньоквадратичної похибки.

У найпростішому випадку структурна схема та частинні її параметри вважаються заданими, а характеристики зовнішніх дій — маючими. Задача полягає у визначенні невідомих параметрів, які забезпечують мінімум середньоквадратичної похибки.

Для розв'язання задачі необхідно передусім виадити вираз середньоквадратичної похибки $M\{\varepsilon^2(t)\}$, використовуючи, наприклад, табличну інтеграли I_{ω} . В результаті дістанемо середній квадрат похибки як функцію невідомих параметрів:

$$M\{\varepsilon^2(t)\} = f(\alpha, \beta, \gamma, \dots).$$

Цю функцію необхідно дослідити на мінімум у просторі невідомих параметрів і визначити параметри $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, які забезпечують мінімум функції f .

Складніше визначити передаточну функцію замкнутої системи $W_{\varepsilon}(p)$, яка забезпечує мінімум середньоквадратичної похибки. Цю задачу розв'язав Н. Вінер за таких умов:

- на вхід системи надходить два сигнали — корисний $g(t)$ і перешкода $N(t)$;

- обидва сигнали є випадковими процесами з відомими шкелів-
нісними характеристиками;
- шукана оптимальна система є лінійною;
- критерій якості — мінімум середньоквадратичної похибки.

Розв'язок цієї задачі дає такий вираз комплексної передаточної функції замкнутої системи:

$$W_{\text{за}}(j\omega) = \frac{1}{2\pi\psi(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{\psi\psi}(\omega)}{\psi(-j\omega)} e^{s\tau} d\omega \quad (7.37)$$

У цьому виразі $\psi(j\omega)\psi(-j\omega) = |\psi(j\omega)|^2 = S_{\psi\psi}(\omega)$ — спектральна щільність вхідного сигналу $m(t) = g(t) + N(t)$; $S_{\psi\psi}(\omega)$ — взаємна спектральна щільність бажаного значення шкідливого $x_2(t)$ і вхідного $m(t)$ сигналів.

В окремому випадку, коли $x_1(t) = g(t)$,

$$S_{\psi\psi}(\omega) = S_{\psi g}(\omega) = S_g(\omega) + S_{\psi g}(\omega)$$

У цьому разі передаточну функцію $W_{\text{за}}(j\omega)$ можна повести у простішому вигляді:

$$W_{\text{за}}(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\psi(j\omega)} \quad (7.38)$$

де

$$B(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} d\tau \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{\psi\psi}(\omega)}{\psi(-j\omega)} e^{s\tau} d\omega.$$

Функцію $B(j\omega)$ можна визначити й без інтегрування. Занешимо розклад виразу $S_{\psi\psi}(\omega)/\psi(-j\omega)$ на прості дроби:

$$\frac{S_{\psi\psi}(\omega)}{\psi(-j\omega)} = \sum_{i=1}^r \frac{a_i}{\omega - \eta_i} + \sum_{j=1}^s \frac{b_j}{\omega + \alpha_j} + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\omega - \gamma_k}$$

У цьому виразі η_i — полюси $S_{\psi\psi}(\omega)$, що розміщуються у верхній півплощині комплексної площини коренів, тобто мають додатну уявну частину; $(-\alpha_j)$ — полюси $S_{\psi\psi}(\omega)$, що лежать у нижній півплощині; γ_k — нулі функції $\psi(-j\omega)$. Ці нулі містяться у нижній півплощині, оскільки нулі, розміщені у верхній півплощині, належать функції $\psi(j\omega)$.

Із загального розкладу візьмемо тільки ту суму, яка містить полюси у верхній півплощині. Це и буде $B(j\omega)$, тобто

$$B(j\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{j\omega - p_i}.$$

Значення функції $B^*(j\omega)$ можна знайти за спектральною щільністю $S_u(\omega)$.

Теоретичний мінімум середньоквадратичної похибки при реалізації бажаної передаточної функції замкнутої системи

$$M\{\varepsilon^2\}_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (S_u(\omega) - |B(j\omega)|^2) d\omega.$$

Контрольні запитання та завдання

1. Наведіть основні характеристики безперервних випадкових величин.
2. Що таке випадковий процес? Який випадковий процес називається стаціонарним?
3. Назвіть ймовірнісні характеристики стаціонарного випадкового процесу та наведіть формули для їхнього визначення.
4. Які властивості має кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу?
5. Що таке ергодична властивість?
6. Що таке спектральна щільність? Який зв'язок існує між спектральною щільністю та кореляційною функцією?
7. Як визначити статистичні характеристики вихідного сигналу лінійної САК за відомими характеристиками вхідного сигналу?
8. Як визначити середньоквадратичну похибку спількувальної системи, на вхід якої надходить стаціонарний випадковий сигнал із відомою спектральною щільністю?
9. Як визначити середньоквадратичну похибку за умови, що на вхід системи надходить задовільний для її переходу?
10. Наведіть формулу для знаходження комплексної частотної функції замкнутої системи, що забезпечує мінімум середньоквадратичної похибки, і дайте пояснення щодо її застосування.

8.1

Загальні відомості

Нелінійними називаються САК, математичне описання яких не задовольняє умови лінійності. Полягають ці умови в тому, що при зміні зовнішньої дії на ланку або систему в її різні характер переходного процесу не змінюється, а змінюється лише масштаб вихідної величини в α разів. Крім того, реакція ланки або системи на декілька одночасно прикладених дій дорівнює сумі реакцій на кожну з цих дій, прикладених окремо. Якщо САК містить хоча б одну нелінійну ланку, то в цілому вона є нелінійною.

Нелінійні ланки описуються нелінійними рівняннями. Особливою нелінійних рівнянь є залежність коефіцієнтів рівнянь від координат системи або їхніх похідних, а також наявність у рівняннях добутків деяких координат чи їхніх похідних.

Усі реальні системи автоматичного керування електроприводами нелінійні. Пояснюється це тим, що основним елементом електропривода є електрична машина, яка містить кошту феромагнітними матеріалами. Рівняння, що описують динамічні процеси в електричній машині, нелінійні, бо індуктивність є функцією струму. ЕРС внаслідок насичення магнітної системи нелінійно залежить від струму збудження, омір обмоток якоря та збудження залежить від температури тощо. Крім того, в електроприводах використовуються підсилювачі з насиченням, елементи механічних передач із люфтами і сухим тертям та інші нелінійні елементи.

Теорію лінійних САК можна застосовувати для аналізу та синтезу реальних систем електропривода лише за досить малих відхилень від режиму, що досліджується. В цьому разі реальна нелінійна система лінеаризується методами, викладеними в гл. 2. Проте існує значна кількість САК, у яких нелінійні ланки застосовуються з метою забез-

печення таких властивостей, що неможливо досягти в лінійних системах. До таких явищ належать релейні елементи і логічні перемикальні пристрої, які діють зможу змінювати структуру САК залежно від деяких її координат, ланки із зоною нечутливості, підсилювачі з насиченням, що забезпечують обмеження координат, тощо.

Задачі аналізу та синтезу нелінійних САК набагато складніші за аналогічні задачі для лінійних систем. Це пояснюється великою різноманітністю та складністю динамічних процесів у нелінійних системах. Стійкість нелінійних систем на відміну від лінійних залежить від величини та місця прикладання зовнішньої дії, характер переходного процесу змінюється при змінюванні величини зовнішньої дії, в нелінійних системах спостерігаються режими, які не існують в лінійних системах, зокрема режим автоколивань. Усе це потребує застосування спеціальних точних і наближених методів аналізу та синтезу нелінійних систем.

8.2

Типові нелінійності

Нелінійні ланки САК дуже різноманітні. Нелінійні характеристики деяких із них за обмеженого діапазону зміни вхідного сигналу майже не відрізняються від лінійних. Такі нелінійності називають *слабкими*, або *несуттєвими*. Після лінеаризації цих нелінійностей САК зводять до лінійних і для їх дослідження використовують методи теорії лінійних САК. Проте є нелінійні елементи, характеристики яких не можна замінити лінійними. Вони падають САК якісніх певних властивостей і, як правило, описуються розривними або близькими до них функціями. Такі нелінійності називають *сильними*.

Характеристики суттєво нелінійних елементів часто ідеалізують, тобто реальну нелінійну характеристику замінюють кількома лінійними ділянками, кожну з яких описується своїм рівнянням. У точках переходу від однієї ділянки до іншої спостерігається розрив похідної, тобто похідна має різні значення при підході до точки розриву зліва і справа. Якщо ідеалізувати суттєво нелінійні характеристики, то їх можна звести до обмеженої кількості типологій. Розглянемо найбільш розповсюджені з них. При цьому вважаємо, що нелінійності безінерційні,

тобто не створюють суттєвого запізнення. Такі нелінійності описуються звичайними функціональними залежностями між вхідною і вихідною змінними, які називаються *статичними характеристиками безінерційних нелінійних ланок*. У загальному випадку вони мають вигляд

$$u = \varphi(x),$$

де u, x — вихідна і вхідна змінні; φ — нелінійна функція.

Характеристика із зоною нечутливості. Такі характеристики (рис. 8.1. а) мають елементи, в яких вихідний сигнал відсутній при змінюванні вхідного сигналу в деякому інтервалі, типово по праворуч і ліворуч від нуля. Цей інтервал позначається *зоною нечутливості*.

Характеристика на рис. 8.1. а кусково-лінійна. Математично кожна лінійна ділянка описується окремо

$$u = \begin{cases} k(x + c) & \text{при } x < -c; \\ 0 & \text{при } -c \leq x \leq c; \\ k(x - c) & \text{при } x > c, \end{cases} \quad (8.1)$$

де $k = \tan \alpha$.

Зона нечутливості для цієї характеристики становить $2c$.

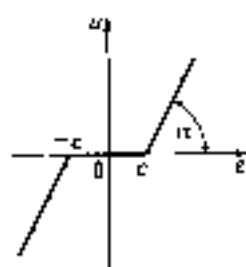
Рівнянням характеристики із зоною нечутливості можна описати залежність швидкості із двигуна постійного струму з не залежним збудженням від напруги на якорі U_a за умови, що до вала двигуна прикладено реактивний момент статичного навантаження M_c . Зона нечутливості зумовлена тим, що швидкість двигуна дорівнює нулю, якщо його момент M менший за момент статичного навантаження. Момент двигуна пропорційний струму якоря: $M = kI_a$. Струм якоря зі швидкості, що дорівнює нулю, обчислюється за формулою

$$I_a = U_a / R_{a\tau},$$

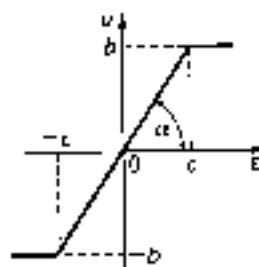
де $R_{a\tau}$ — опір якорного кола двигуна.

Двигун починає обертатися при $M = M_c$, тобто при $kI_a = M_c$, то є для характеристики $u = f(U_a)$ положення зони нечутливості

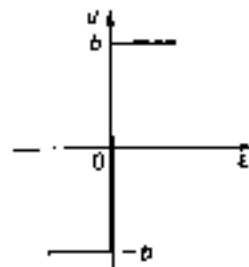
$$c = U_a = \frac{M_c}{k} R_{a\tau}.$$



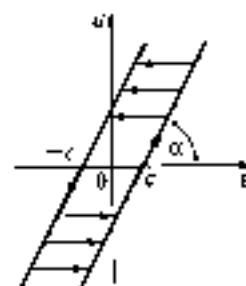
a



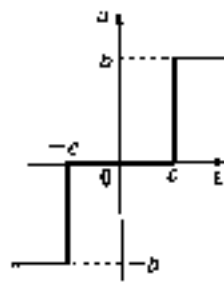
б



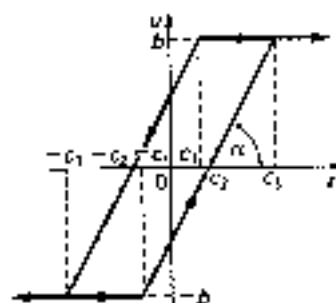
в



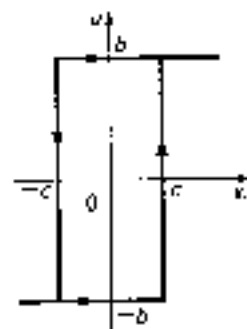
г



д



е



е

Рис. 8.1

Пропорційна частина характеристики описується рівнянням

$$\omega = \frac{1}{k} \left(U_{\pm} \pm \frac{M}{k} R_{\text{н.п.}} \right),$$

де знак «мінус» відповідає додатній напрузі на жорі, «плюс» — від'ємній.

Наявність зони нечутливості знижує чутливість системи, бо система не реагує на сигнали, модуль яких менше ε . Тому вона часто є небажаною. Але іноді зону нечутливості вводять навмисно, коли необхідно усунути підвищену чутливість системи до перешкоди.

Характеристика із зоною насичення. Вплив цієї характеристики зображено на рис. 8.1, б. За малих вхідних сигналів вихідний сигнал пропорційний вхідному, за великих — настає насичення, тобто вихідний сигнал сягає максимального рівня і далі не змінюється.

Математично характеристика описується так:

$$u = \begin{cases} -b & \text{при } x < -c; \\ kx & \text{при } -c \leq x \leq c; \\ b & \text{при } x > c. \end{cases} \quad (8.2)$$

Рівняннями характеристики із зоною насичення можна описати залежності вихідної величини від вхідної для білапості тирів підключення, тиристорних перетворювачів та інших елементів електропривода.

Релейна характеристика. Ця характеристика (рис. 8.1, в) відрізняється стрибкоподібним змінюванням вихідного сигналу при переході вхідного сигналу через деякий рівень. Для ідеального реле цей рівень дорівнює нулю, тобто для стрибкоподібного змінювання вихідного сигналу достатньо змінити знак вхідного сигналу.

Математично характеристика ідеального реле описується так:

$$u = \begin{cases} -b & \text{при } x < 0; \\ b & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (8.3)$$

або

$$u = b \operatorname{sign} x.$$

Неоднозначні характеристики (характеристики з люфтом або мерехтливим ходом). Особливістю цих характеристик є залежність вихідної величини не тільки від вхідної величини в даний момент ча-

су, а й від напрямку її змінюваності (зростає вона чи зменшується). Тому для математичного описування таких характеристик використуються не тільки самі входні сигнали, а й їхні похідні, знак яких відповість напрямку змінюваності входнього сигналу.

Неоднозначну характеристику зображено на рис. 8.1, з. Математично вона описується рівнястю

$$u = \begin{cases} k(\varepsilon - c) & \text{при } d\varepsilon/dt > 0; \\ k(\varepsilon + c) & \text{при } d\varepsilon/dt < 0; \\ \text{const} & \text{при } |k\varepsilon - u| < c \end{cases} \quad (8.4)$$

або

$$u = k(\varepsilon - c \operatorname{sign} d(\varepsilon t));$$

$$u = \text{const при } |k\varepsilon - u| < c.$$

Комбіновані нелінійні характеристики. Ці характеристики поєднують властивості кількох типів нелінійностей. Характеристика, зображена на рис. 8.1, д, поєднує властивості характеристики із заданою нечутливістю та релейної і математично описується так

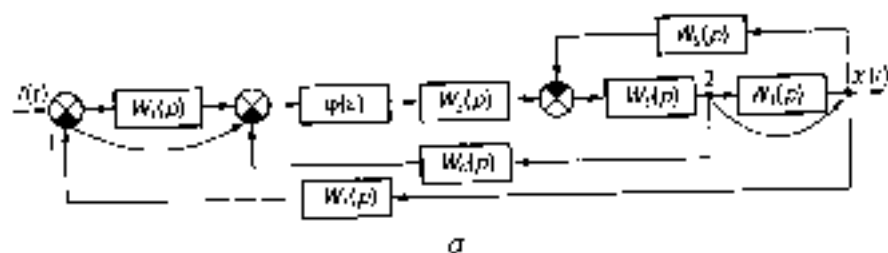
$$u = \begin{cases} -b & \text{при } \varepsilon < -c, \\ 0 & \text{при } -c \leq \varepsilon \leq c, \\ b & \text{при } \varepsilon > c. \end{cases} \quad (8.5)$$

Характеристика, наведена на рис. 8.1, е, поєднує властивості неоднозначної і характеристики із заданою насиченням. Її математичний опис має вигляд

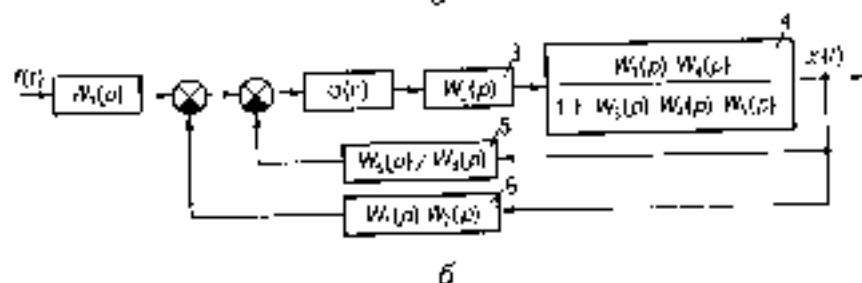
$$\begin{aligned} & -b & \text{при } \varepsilon < -c_1; \\ & k(\varepsilon - c_1) & \text{при } -c_1 < \varepsilon < c_1; \frac{d\varepsilon}{dt} > 0; \\ & b & \text{при } \varepsilon > c_1; \end{aligned} \quad ;$$

$$\left. \begin{aligned} & b & \text{при } \varepsilon > c_1; \\ & k(\varepsilon + c_1) & \text{при } c_1 \leq \varepsilon \leq c_1; \frac{d\varepsilon}{dt} < 0 \\ & -b & \text{при } \varepsilon < -c_1. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

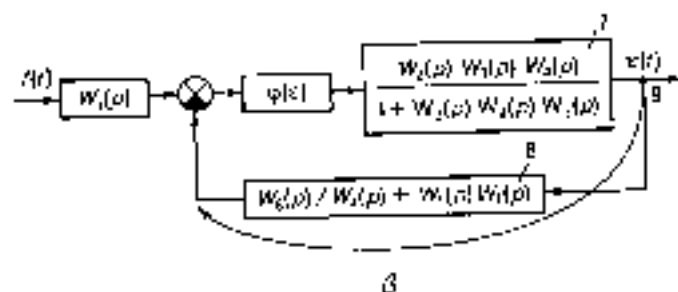
Характеристику реального релейного елемента зображено на рис. 8.1, з. Вона поєднує властивості ідеальної релейної та неоднозначної характеристик і математично описується так



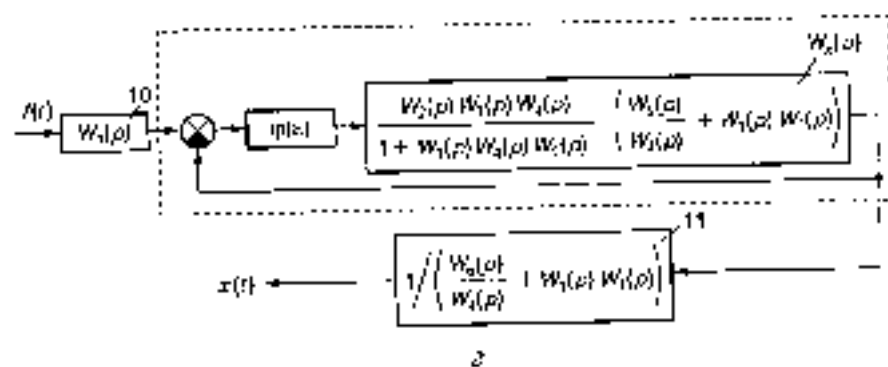
a



б



в



г

Рис. 8.3

творення переносимо вузол 9 через ланку 8 . В результаті дістанемо структурну схему, зображену на рис. 8.3, z .

На вході та виході найпростішої структурної схеми (на рис. 8.3 з її обведено штриховою лінією) є лінійні ланки 10 і 11 . Проте вони не впливають на стійкість і більш лінійніми режими замкнутого контуру, до складу якого належить нелінійна ланка.

До найпростішої можна звести структурні схеми, що містять кілька безперервних нелінійних ланок, з'єднаних послідовно, паралельно або у вигляді ланки, охопленої зворотним зв'язком. Для цього треба замінити ці ланки однією (див. т. 1, § 3, п. 3.12).

Рівняння динаміки найпростішої нелінійної САК можна дістати за структурною схемою, наведеною на рис. 8.2. Рівняння нелінійної ланки з урахуванням невідомих нелінійностей запишемо у вигляді

$$u(t) = \varphi[c(t)]. \quad (8.8)$$

Переходячи до зображень Лапласа за нульових початкових умов, дістанемо зображення рівняння лінійної частини

$$Y(s) = W_0(s)U(s) \quad (8.9)$$

і нелінійної ланки

$$U(s) = L[\varphi[c(t)]] = \int_0^{\infty} \varphi[c(t)]e^{-st} dt \quad (8.10)$$

Умови замикання системи

$$c(t) = f(t) - x(t) \quad (8.11)$$

або

$$C(s) = F(s) - X(s) \quad (8.12)$$

Замінивши $c(t)$ в (8.10) його значенням за формулою (8.11) і підставивши знайдене значення $U(s)$ в (8.9), дістанемо зображення рівняння відносно вихідної величини

$$X(s) = W_0(s) L[\varphi[f(t) - x(t)]]. \quad (8.13)$$

Зображення рішення відносно подібної можна дістати з (8.12), якщо $X(s)$ вищачити з формули (8.9) і замінити $U(s)$ відносно до виразу (8.10). Тоді

$$E(s) = F(s) - W_0(s) L[\varphi[c(t)]]. \quad (8.14)$$

Використовуючи теорему лінійності та зворотня перетворення Лапласа, перейдемо від зображень (8.13) і (8.14) до оригіналів:

$$x(t) = \int_0^t w_1(t-\tau) \varphi[f(\tau) - x(\tau)] k d\tau, \quad (8.15)$$

$$e(t) = f(t) - \int_0^t w_2(t-\tau) \varphi[x(\tau)] k d\tau. \quad (8.16)$$

Інтегральні рівняння (8.15) і (8.16) є нелінійними. Загальних методів розв'язування таких рівнянь не існує. Розроблюються і широко застосовуються різні методи дослідження нелінійних САК, які мають не загальний характер, а орієнтовані на певний клас нелінійностей або на певні структури САК. Значно розширює можливості аналізу та синтезу нелінійних САК застосування персональних комп'ютерів і сучасного математичного забезпечення.

- **Приклад 8.1.** Дати математичне описання слідкувального електропривода постійного струму, функціональну схему якого зображено на рис. 8.4. Вхідним сигналом є кут широкотактової осі КВ. Цей сигнал задається рівнянням і може інтерпретуватися за довільним законом $u_{\text{KB}}(t)$. Вихідним сигналом є кут повороту u_{BK} виконавчої осі ВВ об'єкта керування ОК. Кут розбіжності керуючої і виконавчої осей вимірюється парною системою ВС і ВС, перетворюючи цей фазовий кут в напругу U_B пропорційну йому напругу, підключається підсилювачем А і подається на вхід безінерційного тиристорного перетворювача УМ, під якого живиться лінійне коло ланцюга М з незалежним збудженням (ЛМ обмотка збудження динувна). Динун з'єднується з об'єктом керування за допомогою редуктора Г.

Розв'язання. Вважати, що всі елементи електропривода є лінійними, крім редуктора, який має лійфат. Запишемо рівняння лінійних елементів електропривода викріюваними пристрій

$$B_{\text{KB}} - G_{\text{KB}} = \delta.$$

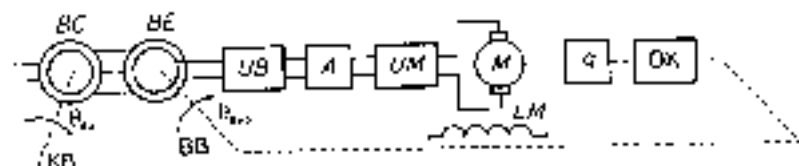


Рис. 8.4

фазочутливий підсилювач UB

$$\delta k_{1n} = u_{4n};$$

підсилювач напруги A

$$u_4 k_n = u_1;$$

тиристорний перетворювач UM

$$u k_{11} = u_2.$$

У цих рівняннях k_{11} , k_n , k_{1n} — коефіцієнти передачі фазочутливого підсилювача, підсилювача напруги, тиристорного перетворювача, u_1 , u_2 — їхні вихідні напруги.

Двигун постійного струму з незалежним збудженням описується рівняннями

$$L_a \frac{di_a}{dt} + r_a i_a + \omega i_a = u_{a1}, \quad (8.17)$$

$$M - M_a = J \frac{d\omega}{dt}, \quad (8.18)$$

$$\omega = \dot{\varphi}, \quad (8.19)$$

$$e i_a = M, \quad (8.20)$$

де L_a , r_a — індуктивність і активний опір акірного кола; i_a , ω — струм якоря, ЕРС і швидкість двигуна; e — коефіцієнт пропорційності між ЕРС і швидкістю, а також між моментом і струмом якоря за незмінної швидкості збудження; M — момент статичного навантаження, приведений до вала двигуна, J — сумарний момент інерції електропривода, приведений до вала двигуна.

Рівняння (8.17) складено за другим законом Кірхгофа для кола якоря, а рівняння (8.18) є виразом закону збереження моментів на валу двигуна.

Рівняння (8.17), враховуючи (8.19), запишемо у такому вигляді.

$$\frac{L_a}{r_a} \frac{di_a}{dt} + i_a = \frac{1}{c_a} (u_1 - u_2), \quad (8.21)$$

а рівняння (8.18), з врахуванням (8.20),

$$\frac{J r_a}{e^2} \frac{d\omega}{dt} = i_a - i_0, \quad (8.22)$$

де $i_0 = M_a/c$.

Вводячи електромагнітну $T_e = L_a/r_a$ і електромеханічну $T_m = J r_a/c^2$ сталі часу і використовуючи оператор $p = d/dt$, запишемо рівняння (8.21) і (8.22) у вигляді

$$(T_r p + 1) i_s = \frac{1}{r_s} (\omega_s - i_s); \quad (8.23)$$

$$T_r p i_s = \frac{r_s}{c} (i_s - i_r). \quad (8.24)$$

Редуктор із дрифтом описується рівнянням

$$\dot{\theta}_{\text{др}} = \frac{1}{q} \int \omega dt \quad (8.25)$$

або

$$\dot{\theta}_{\text{др}} = \omega q p \quad (8.26)$$

(q — передаточне число редуктора) і рівнянням (8.4) неавтономної нелинійної характеристики (рис. 8.1, ρ). У цих рівняннях $\rho = 0_{\text{вх}}$ і $r = 0_{\text{вих}}$ — кути повороту вхідної і вихідної осей редуктора; $2c = 2r$ — величина дрифта. З урахуванням таких елементів рівняння (8.4) мають вигляд

$$\dot{\theta}_{\text{др}} = \begin{cases} 0_{\text{вх}} - c, & \text{при } \rho \theta_{\text{вх}} > 0; \\ 0_{\text{вх}} + c, & \text{при } \rho \theta_{\text{вх}} < 0; \\ \text{const} & \text{при } |\theta_{\text{вх}} - \theta_{\text{вх}}^*| < c. \end{cases} \quad (8.27)$$

Отже, за наявності дрифта швидкість вихідного явля об'єкта керування від час змін напрямку обертання дорівнює нулю, тобто три кути виміряних об'єкт періодично змінюються на час, необхідний для вибігання дрифту в редукторі.

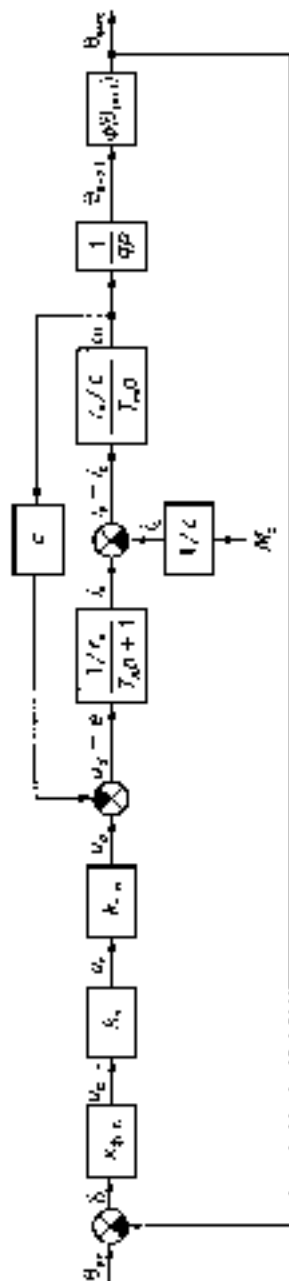
Рівняння, що описують елементи електричного електротрикова, відповідає структурній схемі, зображеної на рис. 8.5, а. Цю схему можна звести до найпростішої. Порядок зведення поданий на рис. 8.5, б–д. При перетвореннях структурної схеми вважається, що $M_s = 0$. У цьому разі ланки, що описують двигун, замінюються однією ланкою з передаточним функцією

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_s T_s p^2 + T_s p + 1},$$

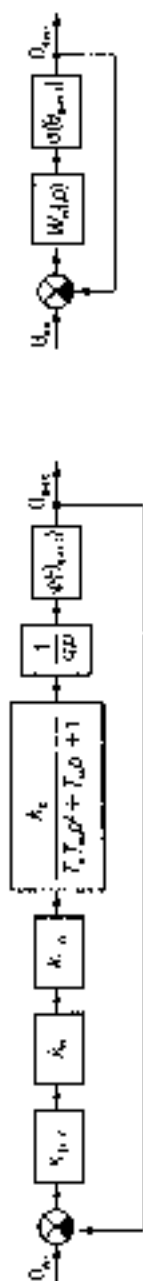
($k_1 = 1/c$ — коефіцієнт передачі двигуна) і структурна схема матиме вигляд, показаний на рис. 8.5, б.

Визначивши передаточну функцію лінійної частини системи

$$W_2(p) = \frac{k_{\text{вх}} k_1 k_2}{q p (T_s T_s p^2 + T_s p + 1)},$$

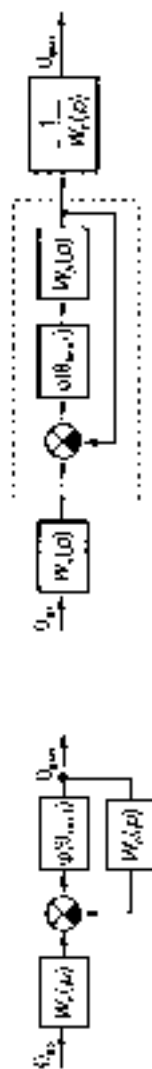


a



b

б



c

с

дисипативну структуру схеми, наведену на рис. 8.5, в. Після перетворення суматора через ланку $W_d(s)$ маємо структуру схеми, зображену на рис. 8.5, г, а після перенесення нуля через ланку $W_d(s)$ — схему, зображену на рис. 8.5, д.

Виконано математичне описання можна вважати задовільним, якщо момент термії об'єкта керування $J_{\text{д}}$ приведення до кінця зв'язки, становить певну частину заданої моменту термії ефектної зв'язки. Якщо ця умова не виконується, то слід врахувувати, що електромагнітні сталі існу $T_{\text{дн}}$ (при збудженні звору) і $T_{\text{дв}}$ (при збудженні звору) невідомі. Значення $T_{\text{дн}}$ менше за $T_{\text{дв}}$ на величину $J_d R_d / c^2$.

8.4

Стійкість та особливості динаміки нелинійних систем

На відміну від лінійних систем стійкість нелинійних залежить не тільки від власних параметрів системи, а й від величини зовнішніх дій та місця їх прикладання. Тому не можна розглядати стійкість або нестійкість нелинійної системи взагалі, а розглядати лише стійкість або нестійкість різних режимів роботи системи при різних за величиною діях.

Специфічним динамічним режимом нелинійних систем є режим автоколивань. Цей режим неможливий у лінійних системах.

Автоколивання — це стійкі незгасаючі періодичні коливання, що виникають у нелинійних системах за відсутності зовнішніх періодичних дій. Амплітуда і частота автоколивань визначаються лише власними параметрами системи.

Основні особливості динаміки нелинійних систем можна розглянути на прикладі системи другого порядку, використавши найпростіший варіант простору станів, а саме — двовимірний простір або площину станів (фазову площину). За координати фазової площини приймають відхилення x вихідної величини від її значення, що відповідає установленим режиму системи, і похідну $y = dx/dt$ цього відхилення. Установленим режиму системи другого порядку відповідає початок координат. Якщо будь-яка дія виводить систему з установленого режиму, то зображуюча точка опиняється у довільному місці фазової площини. Під час перехідного процесу змінюється вихідна величина x та її похідна y , тому зображуюча точка рухається у фазовій площині

по фазовій траєкторії. Початкове положення зображеної точки відображає початковим умовам вільного руху системи. Сукупність фазових траєкторій, що відповідають різним початковим станам системи, називається *фазовим портретом*. Фазовий портрет дає повне уявлення про динаміку системи.

Динаміка системи другого порядку описується рівнянням

$$d^2 x/dt^2 = f(x, dx/dt), \quad (8.28)$$

де f — нелінійна функція.

Враховуючи, що $dx/dt = y$, рівняння (8.28) запишемо у вигляді двох рівнянь,

$$dx/dt = y, \quad (8.29)$$

$$dy/dt = f(x, y). \quad (8.30)$$

Виключимо з них рівняння час, розділивши рівняння (8.30) на (8.29). Тоді дістанемо рівняння першого порядку

$$dy/dx = f(x, y)/y, \quad (8.31)$$

розв'язок якого $y(x)$ дає рівняння фазової траєкторії.

Зв'язок між перехідним процесом $x(t)$, фазовою траєкторією $y(x)$ пояснюється графіками для згаслого коливального процесу (рис. 8.6). Однаковими інтегралами $a, b, \dots, f$ позначено точки на графіку перехідного процесу (рис. 8.6, а) і фазовій траєкторії (рис. 8.6, б),

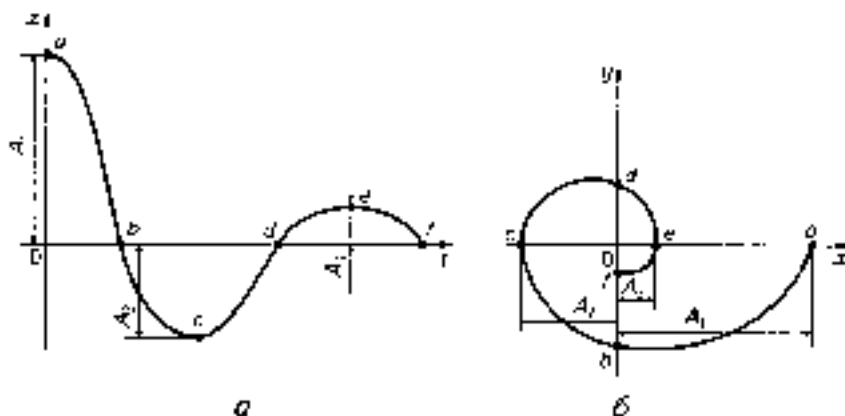


Рис. 8.6

що відповідають однаковим станам системи. Напрямок руху зображуваної точки при зростанні часу показано стрілкою.

Фазові траєкторії мають такі властивості. У певній певній фазовій площині $y = dx/dt > 0$, тому зображує точка рухається в бік зростання x (дієти направо). у нижній півплощині, де $y < 0$ — у бік зменшення x (стрілка наліво). У точці перетину фазової траєкторії з віссю x ($y = 0$), тому звідси (8.31) $dy/dx = \infty$. Звідси випливає, що дотична до фазової траєкторії у точці її перетину з віссю x перпендикулярна до цієї осі.

Рівняння (8.31) однозначно визначає дотичну до фазової траєкторії в усіх точках, крім тих, для яких одночасно виконуються умови

$$f(x, y) = dy/dt = 0 \quad \text{і} \quad y = dx/dt = 0.$$

У цих точках $dy/dx = 0/0$, тобто не існує певного напрямку дотичної до фазової траєкторії, і, отже, з них може виходити безліч фазових траєкторій. Такі точки називають *особливими*. В них координати фазових координат дорівнюють нулю, тому особливі точки є точками рівноваги системи.

Метод фазової площини розроблений для дослідження неавтономних систем, проте багато особливостей дозволяють застосувати його до порівняти зовнішнього впливу розглянути наприклад, вільної системи другого порядку.

Вільний рух лінійної системи другого порядку описується рівнянням

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0.$$

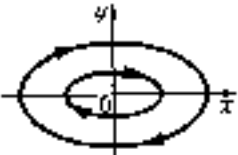
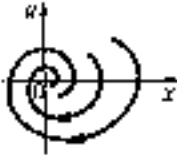
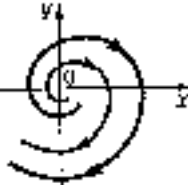
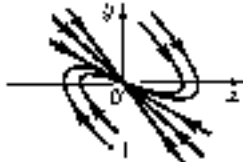
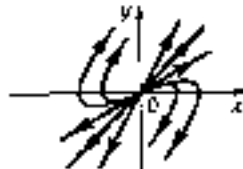
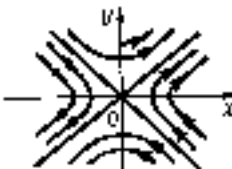
Розв'язки цього рівняння для різних видів коренів характеристичного рівняння

$$p^2 + a_1 p + a_2 = 0$$

функції $y = dx/dt$ і фазові траєкторії $y(x)$, а також назви особливих точок подано в табл. 8.1

Фазові портрети, подібні наведенням у табл. 8.1, властиві й неавтономним системам із несуттєвими нелінійностями. Суттєві нелінійності зумовлюють те, що фазові портрети можуть стати якісно іншими. Приклади фазових портретів, властивих тільки нелінійним системам, зображено на рис. 8.7.

Корені характеристичного рівняння	Розв'язок $x(t)$
Уявні $p_{1,2} = \pm j\beta$	$x = A \sin(\beta t + \varphi), \quad \beta = \sqrt{a_2}$
Комплексні з від'ємною дійсною частиною $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$	$x = Ae^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi),$ $\alpha = a_1/2; \quad \beta = \sqrt{a_2 - (a_1/2)^2}$
Комплексні з додатною дійсною частиною $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$	$x = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi)$
Дійсні від'ємні $p_1 = -\alpha_1, p_2 = -\alpha_2$	$x = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$
Дійсні додатні $p_1 = \alpha_1, p_2 = \alpha_2$	$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$
Дійсні різних знаків $p_1 = \alpha_1, p_2 = -\alpha_2$	$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$

Розв'язок $y = dx/dt$	Фазовий портрет	Особливі точки
$y = \beta A \cos(\beta t + \varphi)$		Центр
$y = \gamma A e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \varphi + \delta)$ $\gamma = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$; $\delta = \arctan \frac{a_1}{b_1}$		Стійкий фокус
$y = \gamma A e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi + \delta)$		Нестійкий фокус
$y = -\alpha_1 C_1 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_2 C_2 e^{-\alpha_2 t}$		Стійкий вузол
$y = \alpha_1 C_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 C_2 e^{\alpha_2 t}$		Нестійкий вузол
$y = \alpha_1 C_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 C_2 e^{-\alpha_2 t}$		Сідло

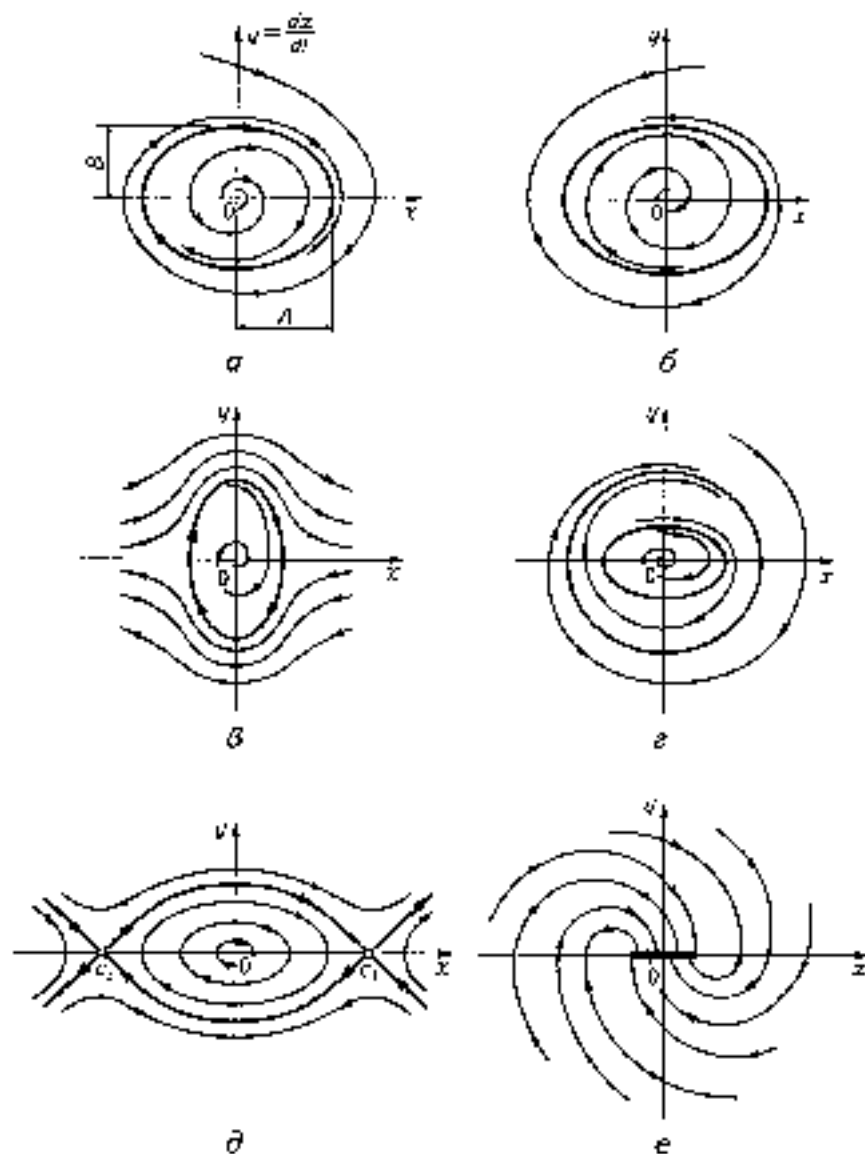


Рис. 8.7

Фазовий портрет, зображений на рис. 8.7, а, характеризує динаміку системи, нестійкої у малому (особлива точка — *нестійкий фокус*). Усталеним режимом цієї системи є автоколивання. Прикладом такої системи може бути система, лінійний аналог якої за малих відхилень нестійкий. У системі спостерігається розбіжний коливальний процес, проте внаслідок наявності окремих елементів системи амплітуда коливань не зростає нескінченно, а встановлюється на деякому незмінному рівні, тобто в системі виникає режим автоколивань. Такому режиму відповідає замкнута траєкторія на фазовій площині. Ця траєкторія називається *стійким граничним циклом*.

Стойкий граничний цикл становить ілюстраційний для ТАК тип *особливих ліній* на фазовій площині. Фазові траєкторії, що починаються всередині й зовні стійкого граничного циклу, з часом асимптотично наближаються до нього.

Якщо фазові траєкторії, близькі до граничного циклу, з часом віддаляються від нього, то граничний цикл буде *нестійким*. Приклад фазового портрета з *нестійким граничним циклом* наведено на рис. 8.7, б. Він відповідає системі, стійкій у малому і нестійкій у великому. Нестійкий граничний цикл визначає межу початкових умов, до якої система зберігає стійкість. Він також становить особливу лінію на фазовій площині.

Нестійкий граничний цикл може розділяти якостю різні перехідні процеси, наприклад затухаючий коливальний і розбіжний докритичний. Відповідний фазовий портрет зображено на рис. 8.7, в.

Система може мати кілька граничних циклів, що відповідають одній і тій самій особливій точці. У цьому разі стійкі і нестійкі цикли чергуються (рис. 8.7, г). Системі з таким фазовим портретом є системою з жорстким режимом збудження коливань. Для виникнення коливань, що відповідають стійкому циклу, необхідно таке початкове відхилення, за якого зображуюча точка буде поза межами нестійкого циклу. За менших відхилень коливання згаснуть.

Фазовий портрет на рис. 8.7, д відповідає випадку, коли за малих відхилень полілінійна система поведеться як лінійна, що перебуває на межі стійкості (характеристичне рівняння має уявні корені). За великих відхилень стійкість системи порушується, і перехідний процес, а також фазові траєкторії, що йому відповідають, стануть зовсім іншими. Крім особливої точки O типу *центра* з'являються два сідла C_1 і C_2 . Лінія, що проходить через особливі точки типу сідла і розділяє фазову площину на зони, які відповідають якостю різним перехідним процесам, називається *сепаратрисою*.

У системах із зоною нечутливості або з сухим тертям існує область зона застою, а на фазовій площині замість особливої точки – *особлива лінія*. Фазовий портрет, що відповідає неасимптотично стійкій системі, зображено на рис. 8.7. є.

Отже, динамічні процеси у нелінійних системах суттєво відрізняються від процесів у лінійних: значно ширше трактується поняття про стійкість, у тій самій системі залежно від початкових відхилення можуть спостерігатися якісно різні перехідні процеси тощо. В цілому за своїми властивостями нелінійні системи значно багатші за лінійні.

8.5

Дослідження нелінійних систем методом фазової площини

Метод фазової площини належить до точних методів дослідження нелінійних систем. Найповніше цей метод розроблено для систем другого порядку. Сукупність фазових траєкторій (фазовий портрет), що відповідають різним початковим положенням зображуючої точки, як указувалося раніше, дає повне уявлення про динаміку нелінійної системи. Тому дослідження нелінійних систем методом фазової площини по суті зводиться до побудови фазового портрета й аналізу за його допомогою динамічних режимів системи.

Як зазначалося раніше, рівняння фазової траєкторії $y = f(\tau)$ є розв'язком рівняння (8.31) першого порядку. Спосіб розв'язування цього рівняння залежить від типу характеристик нелінійної ланки. Задаванням методом розв'язування є чисельне інтегрування за допомогою ЕОМ. Для кусково-лінійних нелінійних характеристик у деяких випадках розв'язок рівняння (8.31) може бути знайдено аналітично для окремих лінійних ділянок нелінійної характеристики. Кожна лінійна ділянка нелінійної характеристики описується своїм рівнянням вигляду (8.31) і, отже, для кожної ділянки отримуємо різні рівняння фазових траєкторій. При цьому на фазовому портреті з'являються так звані *лінії переломлення*, що розділяють фазову площину на зони з різними фазовими траєкторіями.

Якщо нелинійну систему зведено до найпростішої (див. рис 8.2, а) і розглядається вільний рух системи ($f(t) = 0$), то $v(t) = -x(t)$, $dx/dt = -dx/dt$ і рівняння ліній перемикання виписуються безпосередньо за математичним описанням нелинійної ланки. Так, для нелинійних характеристик на рис. 8.1, а, б, в рівняння ліній перемикання мають вигляд $x_1 = c$; $x_2 = -c$; для характеристики на рис. 8.1, е — $x = 0$; для характеристики на рис. 8.1, г — $y = 0$; для характеристики на рис. 8.1, е є чотири лінії перемикання: $x_1 = -c_1$; $x_2 = c_1$ при $y > 0$ і $x_3 = c_2$; $x_4 = -c_2$ при $y < 0$, для характеристики на рис. 8.1, є — дві лінії перемикання: $x = c$ при $y > 0$ і $x = -c$ при $y < 0$.

Якщо на фазовій площині є лінії перемикання, то при розрахунку фазових траєкторій початкові значення x і y для кожної ділянки визначаються через їх кінцеві значення на попередній ділянці.

Фазові траєкторії можна побудувати й без розв'язування рівняння (8.31), якщо скористатися методом ізоклін.

Ізокліна (ліній одногового нахилу) — це лінія, вздовж яких похили dy/dx має сталі значення. Через те, що $dy/dx = C = \text{const}$, ізокліна становить геометричне місце точок з однаковим кутом нахилу дотичних до фазових траєкторій, що проходять через ці точки. Кут α нахилу дотичних до осі абсцис визначається зі співвідношення $\tan \alpha = C$.

Рівняння ізокліни зводяться з рівняння (8.31), якщо прийняти $dy/dx = C$, тобто

$$f(x, y)y = C. \quad (8.32)$$

Це рівняння є алгебричним. Навпаки, C різних значень від $-\infty$ до $+\infty$, побудуємо сім'ю ізоклін, використавши яку, легко знайти фазові траєкторії за будь-яких початкових умов (будь-якому початковому положенні зображуючої точки).

Сім'ю ізоклін наведено на рис. 8.8. Стрілками на кожній ізокліні показано кути нахилу дотичних до фазових траєкторій. Очевидно, що вісь абсцис ($y = 0$) відповідає ізокліні $C = +\infty$ і куту $\alpha = \pm \pi/2$. Для побудови фазової траєкторії слід задати початкові умови (визначі координати зображуючої точки). Потім через точку M_1 провести довільну лінію. Нахил першої має збігатися з нахилом стрілки на ізокліні C_1 , другої — з нахилом, що відповідає суміжній ізокліні C_2 . Вважаємо, що точка M_1 лежить майже посередині відрізка, що відтинається на ізокліні C_1 лінійкою, проведенною з точки M_0 . Аналогічно відшукуються точки $M_2, M_3, \dots$ і будується фазова траєкторія.

За фазовим портретом нелинійної системи можна зробити не тільки якісну оцінку її динаміки (стійка система чи ні, коливальні

де OA — початкове (максимальне) відхилення вихідної величини від усталеного значення; OB — відхилення через час, що дорівнює півпериоду коливань.

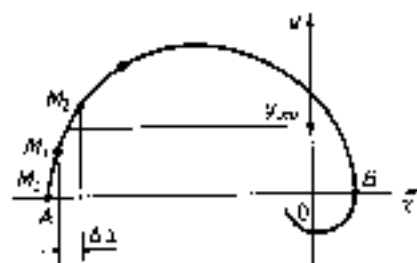


Рис. 8.9

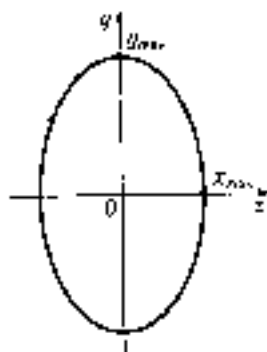


Рис. 8.10

За граничним циклом на фазовому портреті можна визначити амплітуду та частоту коливань. Якщо реальний граничний цикл наближено замінити еквівалентним еліпсом з напівосьми x_{max} і x_{min} (рис. 8.10), то параметри автоколивань можна визначити за такими формулами:

амплітуда

$$A = x_{max};$$

частота

$$\omega_s = x_{max}/x_{min};$$

період

$$T = 2\pi/\omega_s.$$

- **Приклад 8.2.** Методом фазової площини виконаємо дослідження автоколивань електропривода, функціоналу схему якого показано на рис. 8.4. Вважатимемо, що випроможнювач, переключальник і підсилювальний елемент описуються цілком нелінійною функцією $u_c = f(i)$, де $i = i_a - i_{max}$, u_c — напруга на якорі двигуна; електромагнітна сила тяги T_e дорівнює нулю і лінійна в режимі холостого ходу.

Розв'язання. Якщо прийняти, що $T_e = 0$, то передаточна функція двигуна

$$W_d(p) = \frac{\Delta\omega(p)}{\Delta u_c(p)} = \frac{k_d}{T_d p + 1},$$

де k_1 — коефіцієнт передачи двигуна; T_u — електромеханічна стала часу електродвигуна.

Редуктор, вхідною величиною якого є швидкість ω_1 , а вихідною — кутом повороту $\theta_{\text{вх}}$, описується передаточною функцією

$$W_p(p) = \frac{\Delta\theta_{\text{вх}}(p)}{\Delta\omega_1(p)} = \frac{q}{p},$$

де q — передаточне число редуктора.

Структурну схему електродвигуна показано на рис. 8.11. Її зображено у вигляді, зручному для математичного описання — системою рівнянь у звичайній формі Коши:

$$\omega_1/dt = -\frac{1}{T_u} \omega_1 + \frac{q(k_1 k_2)}{T_u} x_1, \quad (8.33)$$

$$dx_1/dt = q\omega_1. \quad (8.34)$$

Ці рівняння складені за умови, що $\Delta\theta_{\text{вх}} = 0$ (закінчили досліджувати відхилення рух системи).

Для побудови фазової траєкторії $y = f(x)$ необхідно розв'язати систему рівнянь (8.33), (8.34) і визначити $y = \theta_{\text{вх}}$ та dx_1/dt . Розрахунки для двох типів збалансованих характеристик $\varphi(\varepsilon)$ виконуємо на ЕОМ.

Перший випадок. Характеристика $\varphi(\varepsilon)$ має вигляд характеристики із зоною відхилення (див. рис. 8.1, б). Стандартну програму розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь:

Якщо $|x_1| \leq c$, то $\varphi(\varepsilon) = -k_2 x_1$, де k_2 — коефіцієнт передачі керування, пов'язаний з параметрами пристрою на лінійній частині характеристики.

2) якщо $x_1 > c$, то рівняння (8.33) має вигляд

$$\frac{d\omega_1}{dt} = -\frac{1}{T_u} \omega_1 - \frac{k_2 k_1 c}{T_u}; \quad (8.35)$$

3) якщо $x_1 < -c$, то рівняння (8.33) має вигляд

$$\frac{d\omega_1}{dt} = -\frac{1}{T_u} \omega_1 + \frac{k_2 k_1 c}{T_u}. \quad (8.36)$$

Розрахунок фазової траєкторії виконано для таких параметрів електродвигуна: $T_u = 0,1$ с; $k_1 = 1,5$ ВБ/с; $k_2 = 400$; $c = 0,5$ рад; $q = 0,1$. Початкові умови: $\omega_1 = 0$, $x_1 = -1$ рад; $x_2 = 0$.

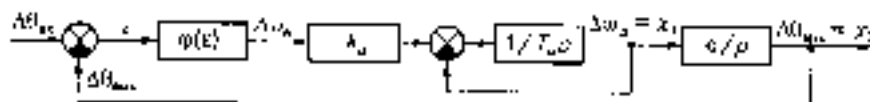


Рис. 8.11

Результат розрахунку подано у вигляді фазової траєкторії на рис. 8.12. Ця траєкторія має вигляд спіралі, що стягується до початку координат. Отже, система етиків і перехідний процес має вигляд затухаючих коливань, перерегулювання є дорівнює 43 %.

Другий випадок. Характеристика $\psi(\varepsilon)$ має вигляд характеристики реального релейного елемента (рис. 8.1, є). У цьому разі стандартну програму розв'язування системи рівнянь слід доповнити умовами:

1) якщо $x_1 < 0$ і $x_2 \geq -c$ або $x_1 > 0$ і $x_2 \geq c$, то

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{T_u} x_1 - \frac{bk}{T_u};$$

2) якщо $x_1 < 0$ і $x_2 < -c$ або $x_1 > 0$ і $x_2 < c$, то

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{T_u} x_1 + \frac{bk}{T_u}.$$

На умови записані з урахуванням рівнянь (8.7), якщо $dx_1/dt = -x_1$ і $x_2 = -x_1$. Розрахунок виконано для тих самих умов, що и у попередньому випадку, крім того, прийнято $b = 100$ В, $c = 0,25$ рад.

Розрахунок фазової траєкторії наведено на рис. 8.13. Фазовий портрет має стійкий граничний цикл, отже, установився режим системи є режим автоколивань з амплітудою $A = 0,39$ рад, частотою $\omega_0 = 21$ с⁻¹ і періодом $T = 0,3$ с.

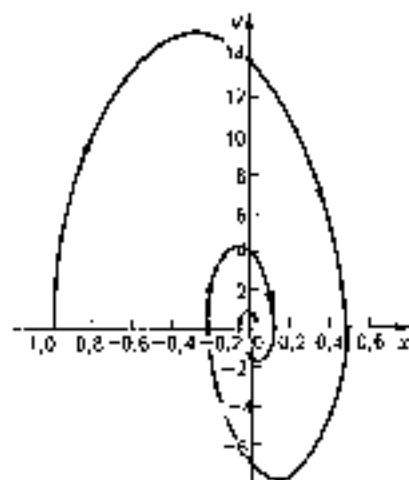


Рис. 8.12

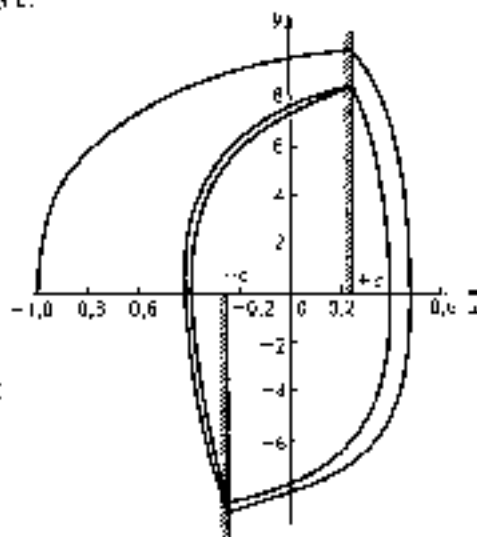


Рис. 8.13

8.6

Метод Ляпунова

Теорема першого методу Ляпунова сформульована в п. 4.1. Вона надає можливість використувати методи лінійної теорії для дослідження реальних нелінійних систем. Природно, що цей висновок справедливий тільки для систем, що містять несуттєві нелінійності. Для систем із суттєвими нелінійностями перший метод Ляпунова застосовувати не можна.

Перш ніж сформулювати теорему другого (прямого) методу Ляпунова введемо такі поняття.

Функція $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *знакосталою* в деякій зоні, якщо вона зберігає один і той самий знак в усіх точках цієї зони навколо початку координат, зі винятком деяких точок, в яких вона дорівнює нулю. Знакостала функція, що дорівнює нулю тільки в початку координат, називається *знаковизначеною* (безумовно-додатною або безумовно-від'ємною). Функція називається *знакозмінною*, якщо вона в деякій зоні навколо початку координат може мати різні знаки.

Рівняння вільного руху системи поданої в нормальній формі Коші

$$\dot{x}_k / dt = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (8.37)$$

де x_i — змінні стану (координати) системи.

Будь-яку функцію $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що тотожно перебірається на нуль при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, називаємо *функцією Ляпунова*. Похідна похідна за часом від цієї функції має вигляд

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}. \quad (8.38)$$

Після цих попередніх зауважень сформулюємо теорему Ляпунова про стійкість нелінійних систем: *система, що описується рівняннями (8.37), стійка, якщо можна знайти функцію Ляпунова V , похідна якої dV/dt відносно до рівнянь системи від'ємна і має знак, протилежний знаку функції V , або тотожно дорівнює нулю. Якщо похідна dV/dt знаковизначена, то система асимптотично стійка.*

Теорема Ляпунова можна дати досить наочну геометричну інтерпретацію. Візьмемо, наприклад, знаковизначену додатну функцію

$V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і надаватимемо їй сталі значення $V = 0, C_1, C_2, \dots$, що збільшуються. Кожному рівнянню $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_i$ відповідає замкнута поверхня у n -вимірному просторі станів даної системи. Поверхня, що відповідає значенню C_i , цілком перебуває всередині поверхні C_{i+1} , якщо $C_{i+1} > C_i$. Ці поверхні зображено на рис. 8.14. Для наочності простір прийнято тривимірним. Якщо зображувача точка в

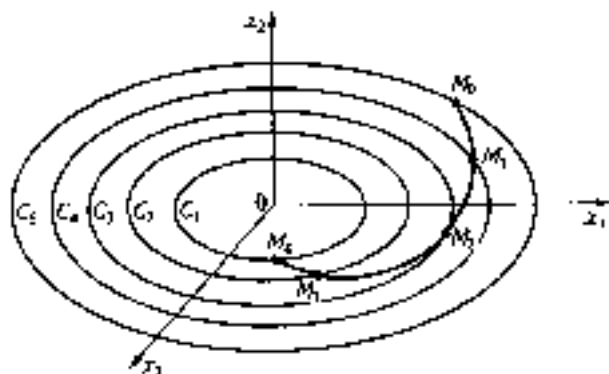


Рис. 8.14

просторі станів рухається так, що переходить з поверхні, яка відповідає більшому C_i , на поверхню з меншим C_i , тобто наближується до початку координат, то система стійка. Але якщо зображувача точка рухається таким чином, то визначено-допоміжна функція V зменшується з часом, тобто її повна похідна dV/dt буде від'ємною. Отже, для стійкої системи функція V і її повна похідна мають протилежні знаки.

Дослідження стійкості методом Ляпунова проводять у такому порядку.

1. Записують рівняння вільного руху системи в нормальній формі Коші.

2. Вибирають функцію Ляпунова.

3. Визначають похідну dV/dt за формулою (8.38), в якій похідні dx_i/dt замінюють функціями $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, тобто дістають похідну dV/dt як функцію координат системи і її параметрів.

4. Визначають межі зміни координат системи і її параметрів, у яких похідна dV/dt залишається знаквизначеною, тобто знаходять умови стійкості.

Складність застосування прямого методу Ляпунова полягає в тому, що немає загальних рекомендацій щодо визначення функції Ляпунова. Для заданих у формі (8.37) нелінійних рівнянь системи можна вибрати кілька різних варіантів функції V , оскільки необхідною умовою є тільки знак визначеності функції V і її похідної. За різних варіантів функції V створюють різні умови стійкості тієї самої системи. Теорема Ляпунова дає достатні умови стійкості, тобто при їх виконанні система обов'язково буде стійкою, але ці умови можуть не охоплювати всю зону стійкості системи. Навиконання умов теореми Ляпунова для вибраної функції V ще не доводить нестійкості системи, бо, власне кажучи, невідомо, чи є інші функції V , для яких умови теореми виконувались.

Для попередньо лінеаризованої нелінійної системи О.М. Ляпунов запропонував знаходити функцію V у вигляді квадратичної форми з невизначеними коефіцієнтами.

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j. \quad (8.39)$$

Коефіцієнти a_{ij} визначають з умови

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = -A \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad (8.40)$$

де A — будь-яка стала величина. Для цього з виразу (8.39) знаходять частинні похідні dV/dx_j , а похідні dx_j/dt беруть з лінеаризованих рівнянь руху вигляду (8.37). Ці похідні підставляють у формулу (8.40), прирівнюють коефіцієнти при однакових членах $x_i x_j$ у лівій і правій частинах і дістають систему алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів a_{ij} .

Для нелінійних систем, що містять одну безперерйну нелінійність $\varphi(\varepsilon)$, А. І. Лур'є запропонував вибрати функцію V у вигляді

$$V = D + A \int_0^{\varepsilon} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (8.41)$$

де D — квадратична форма координат системи; A — стала величина.

□ **Приклад 8.3.** Визначити умови стійкості системи з структурною схемою якої наведено на рис. 8.11 (див. приклад 8.2), за умови, що нелінійність $\varphi(\varepsilon)$ є неперервною однозначною.

Розв'язання. Враховуючи, що $\dot{c} = -x_1$, запишемо рівняння (4.33), (4.34) у вигляді

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{T_u} x_1 - \frac{\varphi(x_2)k_2}{T_u}, \quad \frac{dx_2}{dt} = qx_1$$

Функцію Ляпунова візьмемо згаданим вище додаточно у формі Яурт:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + A \int_1^2 \varphi(x_2) dx_2$$

Знайдемо повну похідну цієї функції

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} = x_1 \left(-\frac{1}{T_u} x_1 - \frac{\varphi(x_2)k_2}{T_u} \right) + A \varphi(x_2) qx_1 = \\ &= -\frac{1}{T_u} x_1^2 - \frac{k_2}{T_u} \varphi(x_2) x_1 + A q \varphi(x_2) x_1. \end{aligned}$$

Прийнявши $A = k_2 / T_u q$, отримаємо

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{T_u} x_1^2 < 0$$

Знак похідної dV/dt прилежний знаку функції V , отже, система асимптотично стійка за таких обмежень на вигляд нелинійної характеристики $\varphi(x_2)$, які було прийнято при дослідженні стійкості:

1) характеристика має бути непарною, тобто при $c = -x_2$ $\varphi(-c) = -\varphi(x_2)$;

2) характеристика повинна розміщуватися в першому та третьому квадрантах, щоб інтеграл $\int_1^2 \varphi(x_2) dx_2$ був додатним.

Крім теореми про стійкість, О. М. Ляпунов сформулював теорему, що дає достатні умови нестійкості нелинійної системи. Якщо при заданих у вигляді (4.37) рівняннях системи похідна від якої-небудь функції Ляпунова $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ буде знакозначеною, причому сама функція V в якій-небудь зоні, що прилягає до початку координат, має знак, однаковий зі знаком похідної, то система нестійка.

8.7

Абсолютна стійкість.**Критерій В.-М. Попова**

Абсолютна стійкість означає асимптотичну стійкість нелінійної системи у цілому (тобто відносно всього простору станів системи) за умови, що задані не конкретну нелінійність, а деякий клас нелінійностей M . Поняття абсолютної стійкості можна застосовувати до класу стаціонарних нелінійностей, яким є множина $M[k_1, k_2]$ усіх кусково-безперервних функцій, графіки яких знаходяться в секторі $S[k_1, k_2]$ між лініями $u = k_1\varepsilon$ і $u = k_2\varepsilon$ (рис. 8.15). Ці нелінійності мають задовольняти такі умови:

$\varphi(\varepsilon)$ — безперервна функція;

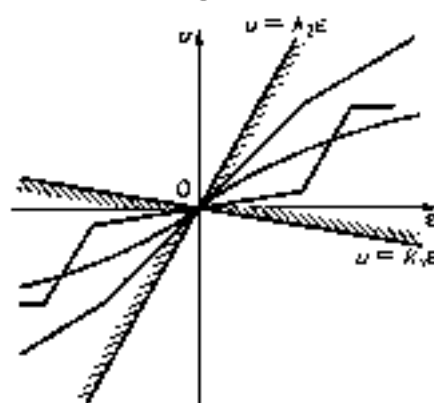
$$\varphi(0) = 0; \quad \varepsilon\varphi(\varepsilon) > 0 \text{ при } \varepsilon \neq 0,$$

$$k_1 \leq \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq k_2 \text{ при } \varepsilon \neq 0;$$

$$\int_0^\infty \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \pm \infty$$

Абсолютна стійкість означає стійкість у цілому для всіх нелінійностей заданого класу.

Одним із критеріїв абсолютної стійкості є критерій В.-М. Попова.

**Рис. 8.15**

У практичних задачах цей критерій найчастіше застосовується до однозначних нелінійностей, характеристики яких містяться в секторі $S[0, k]$. У цьому випадку для абсолютної стійкості нелінійної системи, зведеної до найпростішої, тобто для такої, що складається з нелінійної ланки $\varphi(\varepsilon)$ і лінійної частини з передаточною функцією $W_p(p)$, достатньо, щоб для деякого дійсного числа $q (-\infty < q < \infty)$ і всіх дійсних ω , у тому числі $\omega = \pm \infty$, виконувалась така нерівність

$$\operatorname{Re}\left[(1+q\omega)W_+(j\omega)\right] + \frac{1}{k} > 0 \quad (8.42)$$

і лівійна система, в якій з лівійною ланку замінено лінійною $\rho = c \cdot s$, де $c \leq k$, була стійкою.

Частотну характеристику лінійної частини системи позамо у вигляді

$$W_+(j\omega) = U_+(\omega) + jV_+(\omega),$$

підставимо значення $W_+(j\omega)$ у лівій доданок нерівності (8.42) і виділимо дійсну частину

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\{(1+q\omega)[U_+(\omega) + jV_+(\omega)]\} = \\ & = \operatorname{Re}[U_+(\omega) - jq\omega U_+(\omega) + jV_+(\omega) - q\omega V_+(\omega)] = \\ & = U_+(\omega) - q\omega V_+(\omega). \end{aligned}$$

З урахуванням цього виразу нерівність (8.42) запишемо у вигляді

$$U_+(\omega) - q\omega V_+(\omega) + 1/k > 0$$

або

$$X - qY + 1/k > 0, \quad (8.43)$$

де

$$X = U_+(\omega) = \operatorname{Re}\{W_+(j\omega)\},$$

$$Y = \omega V_+(\omega) = \omega \operatorname{Im}\{W_+(j\omega)\}.$$

Рівняння (8.43) є рівнянням прямої, що проходить у площині X, Y через точку з абсцисою $-1/k$ на дійсній осі X і має кутовий коефіцієнт $1/q$. Ця лінія називається *прямою Ноллова*.

Введемо поняття *видозміненної (модифікованої) частотної характеристики лінійної частини системи або кривої Ноллова*. Вираз цієї характеристики

$$W_+^*(j\omega) = U_+(\omega) + j\omega V_+(\omega)$$

відрізняється від звичайної амплітудно-фазової характеристики $W_+(j\omega)$ тільки тим, що уявна частина множить на ω . Якщо прийняти, що n — порядок полінома знаменника передаточної функції $W_+(p)$, а m — порядок полінома чисельника, то при $n - m > 1$ видозмінена характеристика $W_+^*(j\omega)$ має такий самий вигляд, що й характеристика $W_+(j\omega)$, лише масштаб уявної частини збільшується у

в разів, а при $n - m = 1$ характеристика $W_{\Sigma}^*(j\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ закінчується на від'ємній частині уявної осі.

Після введення поняття про пряму і криву П'юпова сформулюємо умови виконання нерівності (8.42) або умови абсолютної стійкості: *нелінійна система абсолютно стійка, якщо в площині $W_{\Sigma}^*(j\omega) = X + jY$ можна провести пряму П'юпова так, щоб крива П'юпова була праворуч від неї.*

Для однозначних нелінійних характеристик $-\infty < q < +\infty$, тобто пряму П'юпова можна проводити з будь-яким кутовим коефіцієнтом — як додатним, так і від'ємним. Для неоднозначних характеристик із від'ємним гістерезисом (рис. 8.16, а) $0 \leq q \leq \infty$ і кутовий коефіцієнт прямої П'юпова має бути додатним, а для неоднозначних характеристик із додатним гістерезисом (рис. 8.16, б) $-\infty < q < 0$ і кутовий коефіцієнт прямої П'юпова має бути від'ємним.

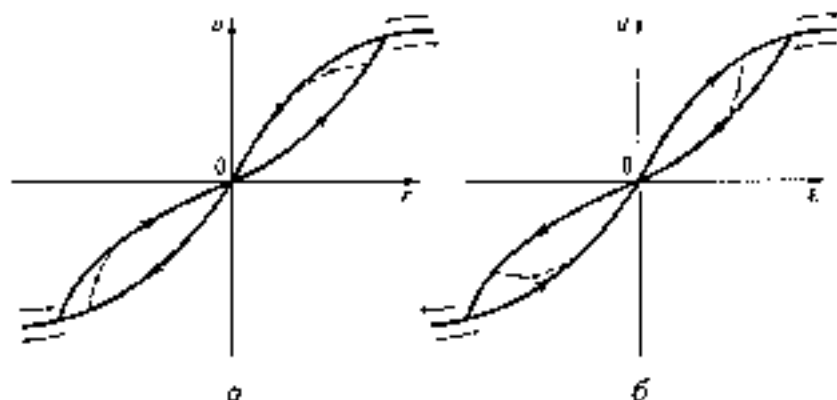


Рис. 8.16

Для визначення абсолютної стійкості нелінійної системи необхідно побудувати відокремлену частотну характеристику $W_{\Sigma}^*(j\omega)$ лінійної частини системи, визначити k з умови $0 \leq \varphi(k)/\omega \leq k$ і через точку з координатами $(-1/k, j0)$ провести пряму з кутовим коефіцієнтом, що визначається типом нелінійності, так, щоб характеристика $W_{\Sigma}^*(j\omega)$ знаходилася праворуч від неї (рис. 8.17). Якщо таку пряму провести не можна, то абсолютна стійкість у досліджуваній системі неможлива (рис. 8.18).

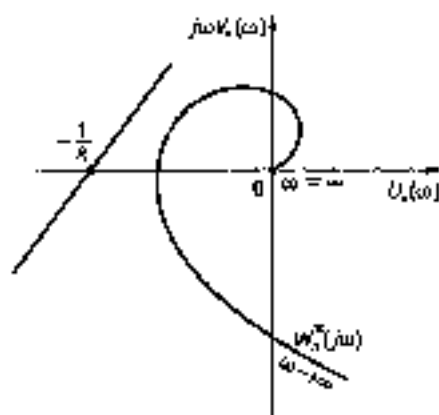


Рис. 8.17

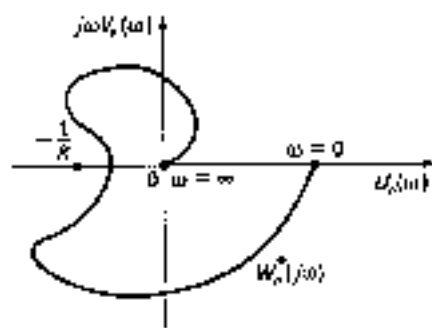


Рис. 8.18

Таке формулювання критерію абсолютної стійкості є справедливим для систем зі стійкою лінійною частиною. Проте цей критерій можна використовувати також і тоді, коли лінійна частина системи нестійка. У цьому разі лінеаризована система, яку дістають при заміні нелінійного елемента $\varphi(\varepsilon)$ лінійним k_ε , за довгих малюх k буде нестійкою. Якщо існують такі значення k_* , для яких при $\varphi(\varepsilon)/\varepsilon \geq k_*$ лінеаризована система стійка, то для використання критерію Найтова надійність характеристики нелінійного елемента сектора S $[0, k]$ треба замінити належністю сектора S $[k_*, k]$, тобто прийняти

$$k_* < \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} < k.$$

Крім того, слід виконати еквівалентні перетворення вихідної лінійної системи (рис. 8.19, а) так, як зображено на рис. 8.19, б. Ланка з коефіцієнтом передачі -1 показує, що зворотний зв'язок у системі є від'ємним. У схему введено дві фіктивні ланки з коефіцієнтами передачі k_* . Схема залишається еквівалентною вихідній, бо вихідні сигнали фіктивних ланок взаємно компенсуються на виході лінійної частини системи. Перевіримо, чи існує таке значення $k_* < k$, за якого лінійна частина системи, охоплена жорстким від'ємним зворотним зв'язком, буде стійкою. Якщо таке значення k_* не існує, то відповідь на запитання про абсолютну стійкість однозначна — абсолютна стійкість системи неможлива.

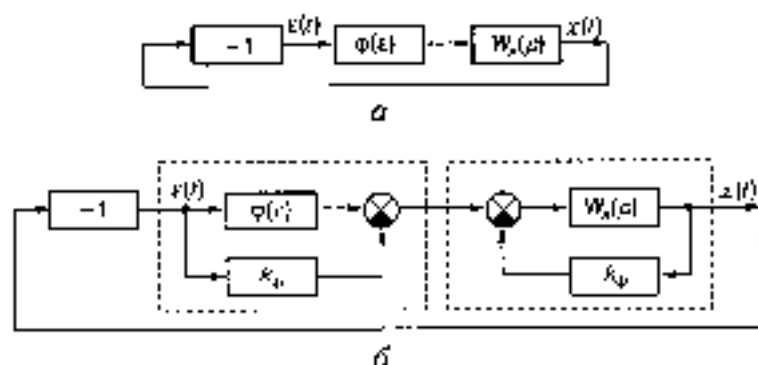


Рис. 8.19

Вважаємо, що значення k_{ϕ} за якого забезпечується стійкість лінійної частини системи, існує. Тоді після перегортання структурної схеми вістанемо лінійну частину системи з передаточною функцією

$$W'_{\phi}(p) = \frac{W(p)}{1 + k_{\phi}W(p)} \quad (8.44)$$

і нелінійну ланку з характеристикою

$$\varphi_{\phi}(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon) - k_{\phi}\varepsilon.$$

Оскільки

$$\frac{\varphi_{\phi}(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} - k_{\phi},$$

то з нерівності

$$0 \leq \varphi(\varepsilon)/\varepsilon \leq k$$

випливає нерівність

$$0 \leq \varphi_{\phi}(\varepsilon)/\varepsilon \leq k - k_{\phi},$$

тобто характеристика незатлорюваної нелінійної ланки належить сектору $S[0, k - k_{\phi}]$. У цьому разі нерівність (8.42) має вигляд

$$\operatorname{Re}\{(1 + qj\omega)W'_{\phi}(j\omega)\} + \frac{1}{k - k_{\phi}} > 0 \quad (8.45)$$

і критерій абсолютної стійкості формулюється так: система абсолютно-но стійка, якщо через точку з координатами $(-1/(k - k_{\phi}), j0)$ можна

провести пряму Попова так, щоб відповідна характеристика перетворення лінійної частини $W_{\text{ли}}'(j\omega)$ знаходилась праворуч від неї.

Аналогічно можна розглянути випадок, коли характеристика не лінійної ланки належить довільному сектору $S[k_1, k_2]$ (див. рис. 8.15). Цей варіант також можна звести до нелінійної характеристики, що належить сектору $S[0, k]$, якщо прийняти $k_0 = k_1$. Тоді характеристика перетвореної нелінійної ланки

$$\varphi_{\text{нов}}(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon) - k_1 \varepsilon$$

знаходитиметься в секторі $S[0, k_2 - k_1]$, а лінійна частина матиме передаточну функцію

$$W_{\text{нов}}(p) = \frac{W_{\text{ли}}(p)}{1 + k_1 W_{\text{ли}}(p)}. \quad (8.46)$$

Критерій Попова можна поширити також на системи, в яких передаточна функція лінійної частини $W_{\text{ли}}(p)$ має кілька чисто уявних або нульових полюсів, причому решта полюсів — дійсні. У цьому разі формулювання критерію стійкості збігається з формулюванням критерію для систем зі стійкою лінійною частиною, але доповнюється такими двома умовами:

- має забезпечуватися *сприятельна стійкість*, тобто стійкість лінійної системи з передаточною функцією $k W_{\text{ли}}(p)$ при $k \rightarrow 0$;
- характеристика нелінійної ланки не повинна дотикатися до осі абсцис, тобто має розташовуватися в секторі $S[\delta, k]$, де δ — нескінченно мала величина.

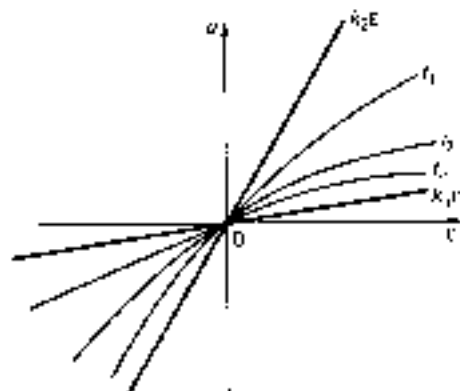


Рис. 8.20

Критерій Попова можна поширити також і на випадок нестационарної нелінійної характеристики $\varphi(\varepsilon, t)$. Якщо прийняти, що ця характеристика знаходиться в секторі $S[k_1, k_2]$ за будь-якого t (рис. 8.20), тобто

$$k_1 \leq \frac{\varphi(\varepsilon, t)}{\varepsilon} \leq k_2, \quad \varphi(0, t) = 0,$$

то цей випадок можна звести до варіанта зі стаціонарною лінійною характеристикою, що лежить у секторі $S[k_1, k_2]$. Відмінність полягає в тому, що умова абсолютної стійкості для нестационарної нелінійної характеристики має вигляд нерівності (8.45), в якій слід прийняти $q = 0$, тобто

$$\operatorname{Re}[W'_{\text{неліній}}(j\omega)] + \frac{1}{k_2 - k_1} > 0. \quad (8.47)$$

Для перевірки цієї нерівності треба побудувати звичайну, а не визначену характеристику $W'_{\text{неліній}}(j\omega)$. Крім того, пряму П'юнова слід проводити через точку з координатами $(-1/(k_2 - k_1), j0)$ паралельно уявній осі, тому що при $q = 0$ і $k = k_2 - k_1$ рівняння прямої П'юнова

$$x = -\frac{1}{k_2 - k_1}.$$

Все раніше розглянуто має відношення до абсолютної стійкості стану рівноваги системи в точці $x = 0$. Проте критерій П'юнова можна застосовувати також для дослідження абсолютної стійкості будь-яких динамічних процесів. Якщо характеристики нелінійної ланки знаходяться в секторі $S[k_1, k_2]$, то похідна нелінійної характеристики має належати тому самому сектору $S[k_1, k_2]$, тобто

$$k_1 < \frac{\partial \varphi(c)}{\partial c} < k_2.$$

Стійкість динамічних процесів перевіряється так само, як і для нестационарної нелінійності.

Отже, критерій П'юнова дає достатні, але не необхідні умови стійкості. Тому визначена за цим критерієм зона стійкості може виявитися більш «вузькою», ніж дійсна, і, як наслідок цього, до регулятора ставитимуться необґрунтовано жорсткі вимоги.

8.8

Метод точкового перетворення

Для оцінки динаміки нелінійних систем, зокрема для виявлення факту існування автоколивань і визначення їхніх параметрів, можна застосувати метод точкових перетворень, розвинутий в теорії автоматичного керування О.О. Анд

ривними. Для цього методу досить просто. Нехай, наприклад, фазовий портрет деякої нелінійної системи має вигляд, зображений на рис. 8.21. Припустимо, що в деякий момент часу зображуюча точка займає положення $x_0^{(1)}$ на додатній півосі Ox . Після обходу навколо початку координат зображуюча точка займе нове положення $x_1^{(1)}$. Якщо точка займала положення $x_1^{(2)}$, то після обходу початку координат дістанемо нову точку $x_1^{(2)}$ і т. д. Оскільки через кожну точку півосі Ox можна провести одну й тільки одну фазову

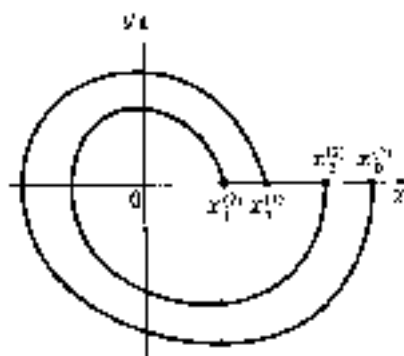


Рис. 8.21

траєкторію, то обходу зображуючої точки навколо початку координат відповідає перехід кожної точки півосі Ox у деяку іншу точку тієї самої півосі. Інакше кажучи, відбувається точкове перетворення півосі Ox самої в себе. Це перетворення описується функцією $x_1 = f(x_0)$, графік якої називається *діаграмою точкового перетворення*.

Діаграма точкового перетворення дає змогу досліджувати характер можливих динамічних режимів у системі. Нехай, наприклад, графік функції $x_1 = f(x_0)$ має вигляд, зображений на рис. 8.22. На ньому проведено бісектрису кута, яка відповідає функції $x_1 = x_0$. Очевидно, що точки перетину функцій $x_1 = f(x_0)$ і $x = x_0$ відповідають замкнутим фазовим траєкторіям (граничним циклам) на фазовій площині, тому що початкові і кінцеві положення зображуючої точки після обходу початку координат збігаються. Частини кривої $x_1 = f(x_0)$, які знаходяться нижче бісектриси, відповідають спіральним фазовим траєкторіям, що наближуються до початку координат, оскільки наступна координата зображуючої точки

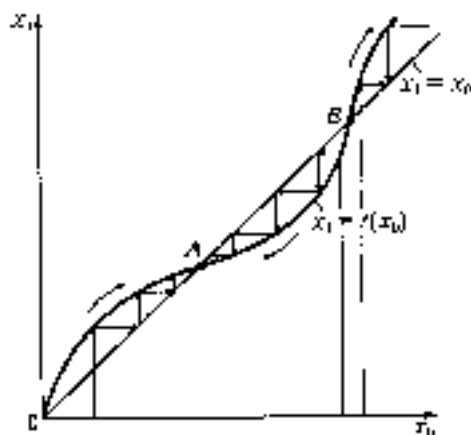


Рис. 8.22

менша за попередню. Аналогічно частинам кривої $x_1 = f(x_0)$, які містяться вище бісектриси, відповідають спіральні фазові траєкторії, що відшаршуються від початку координат.

Крива $x_1 = f(x_0)$ і бісектриса на рис. 8.22 мають дві точки перетину A і B , тобто фазовий портрет має два граничних цикли. Наявності автоколивань у системі відповідає стійкий граничний цикл. Аналізуючи діаграму точкового перетворення, можна вивести, що стійкому граничному циклу відповідає така точка перетину кривої $x_1 = f(x_0)$ з бісектрисою, в якій крива $x_1 = f(x_0)$ має менший нахил до осі абсцис, ніж пряма $x_1 = x_0$, а нестійкому — більший. Отже, точка A відповідає стійкому граничному циклу, тобто наявності автоколивань у системі, а точка B — нестійкому. Якщо крива $x_1 = f(x_0)$ і пряма $x_1 = x_0$ не мають точки перетину, то граничного циклу не існує і автоколивання в системі неможливі.

Точки перетворення на обов'язково здійснювати відносно діагональної прямої осі абсцис. Якщо на фазовій площині є лінії перемикання, то доцільніше виконувати перетворення точок якої-небудь лінії перемикання. Якщо фазовий портрет симетричний відносно якої-небудь осі координат, то достатньо виконати точкове перетворення для половини оберту зображуючої точки навколо початку координат, тобто перевернути точки площини або лінії перемикання на додатній лінійній площині у відповідні точки ліній перемикання або ліній осей на від'ємній лінійній площині.

Метод точкових перетворень можна використовувати для визначення впливу змін параметрів системи на характер перехідних процесів. Нехай, наприклад, при різних значеннях якого-небудь параметра системи складемо діаграми точкових перетворень, що зображені на рис. 8.23.

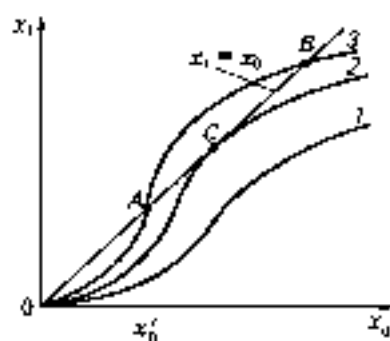


Рис. 8.23

Діаграма 1 відповідає системі, стійкій у цілому, діаграма 2 — системі, стійкій у частині, в якій за достатньо великих відхилень ($x_0 > x_0^*$) виникають автоколивання (точка A відповідає нестійкому граничному циклу, точка B — стійкому). Діаграма 3 дотикається до бісектриси в точці C . Вона відповідає значенням параметрів, для яких система перебуває на межі між якісно різними динамічними властивостями. Такі значення параметрів називаються *бифуркаційними*.

8.9

Метод гармонічної лінеаризації

На відміну від розглянутих раніше точних методів дослідження нелінійних систем *метод гармонічної лінеаризації (гармонічного балансу)* є принципово наближеним. Ідею цього методу в 1934 р. запропонували М.М. Крилов і М.М. Боголюбов. До дослідження систем автоматичного керування цей метод застосували Л.С. Гольдфарб і Є.П. Попов.

Метод гармонічної лінеаризації використовується для дослідження автоколивань у нелінійних системах високого порядку, а також для оцінки якості перехідних процесів.

Для пояснення суті гармонічної лінеаризації розглянемо проходження гармонічного сигналу

$$x = a \sin \omega t \quad (8.48)$$

через нелінійну ланку (рис. 8.24). На виході нелінійної ланки в загальному випадку створюється періодичний сигнал

$$u = \varphi(a \sin \omega t),$$

який можна розкласти в ряд Фур'є:

$$u = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t); \quad (8.49)$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \sin \omega t) d(\omega t); \quad (8.50)$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \sin \omega t) \sin k\omega t d(\omega t), \quad (8.51)$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \sin \omega t) \cos k\omega t d(\omega t). \quad (8.52)$$

Прийнявши $A_0 = 0$, що справедливо для нелінійних характеристик, симетричних відносно початку координат, вираз (8.49) запишемо у вигляді

$$u = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + \text{вищі гармоніки}. \quad (8.53)$$

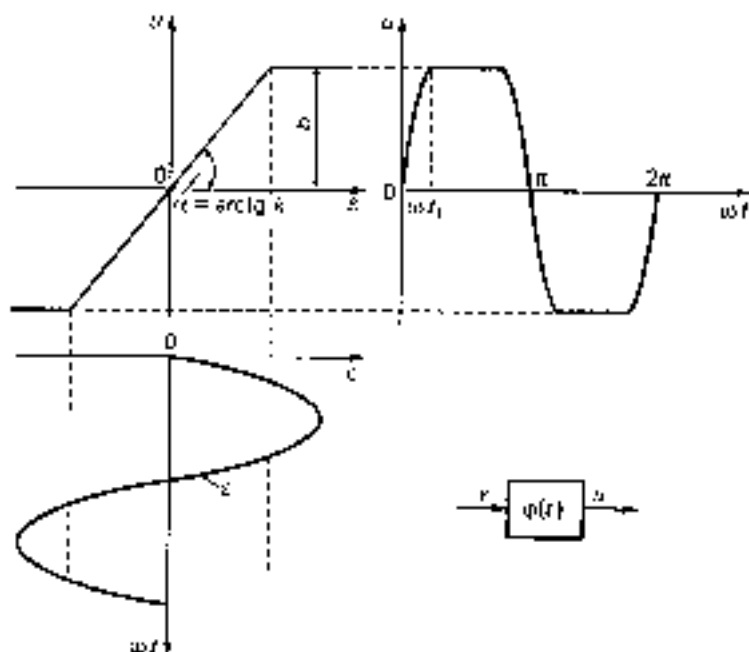


Рис. 8.24

Якщо врахувати, що з (8.48) випливає

$$\sin \omega t = c/a; \cos \omega t = p/c/a,$$

то вираз (8.53) можна записати у вигляді

$$u = \frac{A_1}{a} c + \frac{B_1}{a} \frac{p}{\omega} + \text{вищі гармоніки}$$

або

$$u = k_1 c + \frac{k_1'}{\omega} p + \text{вищі гармоніки}, \quad (8.54)$$

де $k_1 = A_1/a$ і $k_1' = B_1/a$ — *коефіцієнти гармонічної лінеаризації*. Ці коефіцієнти згідно з виразами (8.51) і (8.52) є функціями амплітуди a . Отже, нелінійна функція $y = \varphi(c)$ при $c = a \sin \omega t$ замінюється виразом (8.54), який з точністю до вищих гармонік є лінійним. Ця операція і називається *гармонічною лінеаризацією*.

Гармонічна лінеаризація по суті є наближенням. Вона ґрунтується на таких припущеннях:

- у системі існують автоколивання;
- коливання на вході нелінійної ланки є синусоїдальними, тобто лінійна частина системи виводить функції фільтра основної гармоніки; це припущення прийнято називати *гратуловим фільтром*.

Виходячи з цих припущень, розглянемо нелінійну систему, що складається з лінійної частини $W_1(p)$ і нелінійної ланки $\varphi(\varepsilon)$ (рис. 8.25). При дослідженні автоколивань приймається $f(t) = 0$. Тоді, якщо прийняті припущення є справедливими, сигнал на виході лінійної частини системи буде гармонічним:

$$x = x_0 + A \sin \omega_0 t,$$

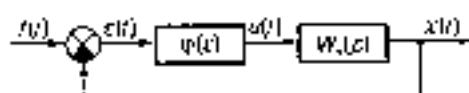


Рис. 8.25

де A і ω_0 — амплітуда і частота автоколивань; x_0 — постійна складова, що з'являється у разі, коли характеристика нелінійної ланки несиметрична відносно початку координат, тобто спостерігається ефект відпрямлення відносно гармонічного сигналу. Для симетричних характеристик нелінійної ланки $x_0 = 0$. Такий самий сигнал, але з протилежним знаком або з фазовим зсувом π надходить на вхід нелінійної ланки. На її виході, а отже, на вході лінійної частини системи згідно з виразом (8.49) будуть сигнали не тільки основної гармоніки ($k = 1$), а й решти кратних гармонік. Для лінійних систем справедливим є принцип накладення, тому можна розглядати цю кожну гармоніку на лінійну частину незалежно від інших. Внаслідок цього на виході системи утворюються періодичні коливання, які містять той самий спектр частот, що й сигнал на вході лінійної частини. Проте амплітуди кожної з гармонік будуть різними згідно з амплітудно-частотною характеристикою лінійної частини системи.

Розглянемо амплітудно-частотну характеристику, зображену на рис. 8.26. З характеристики видно, що амплітуда першої гармоніки значно перевищує амплітуди інших

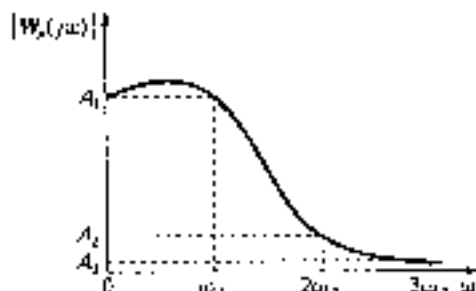


Рис. 8.26

гармонік, тобто лінійна частина системи виконує функцію фільтра нижніх частот (гіпотеза фільтра підтверджується). У цьому разі вищими гармоніками можна знехтувати і зважати, що коливання на виході лінійної частини, а отже, і на виході нелінійної ланки є гармонічними. Тоді рівняння (8.54) нелінійної ланки буде лінійним

$$u = k_1 \varepsilon + \frac{k_1'}{\omega} p\varepsilon. \quad (8.55)$$

Цьому рівнянню відповідає передаточна функція

$$W_{\text{нл}}(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = k_1 + \frac{k_1'}{\omega} p. \quad (8.56)$$

Передаточна функція $W_{\text{нл}}(p)$ є передаточною функцією еквівалентної лінійної ланки або *гармонічною передаточною функцією* нелінійної ланки.

Для неспарних однозначних нелінійних характеристик розклад у ряд Фур'є не має косинусів, тобто $B_1 = 0$ і $k_1' = 0$. Тому передаточна функція гранично спрощується:

$$W_{\text{нл}}(p) = k_1. \quad (8.57)$$

Коефіцієнт k_1 визначає гармонічну складову вихідного сигналу, яка збігається за фазою з вхідним сигналом, а коефіцієнт k_1' — складову, що зсувута за фазою на кут $\pi/2$.

Коефіцієнт k_1' не дорівнює нулю, якщо характеристики нелінійної ланки є неоднозначними. Для неоднозначних характеристик із від'ємним гістерезисом (див. рис. 8.1, з, е, є) коефіцієнт k_1' від'ємний, тобто визначає складову вихідного сигналу, що запізнюється за фазою на кут $\pi/2$. Пояснюється це тим, що у разі зміни знака вхідного сигналу вихідний сигнал переходить з однієї гілки неоднозначної характеристики на іншу і тим самим створює запізнювання вихідного сигналу відносно вхідного.

Розглянемо випадок, коли гармонічний сигнал на вході нелінійної ланки містить постійну складову, тобто

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + a \sin \omega t \quad (8.58)$$

Це можливо, якщо до системи прикладена постійна зовнішня дія або якщо характеристика нелінійної ланки несиметрична відносно початку координат.

Із виразу (8.58) випливає

$$a \sin \omega t = \varepsilon - \varepsilon_0,$$

$$\sin \omega t = (\varepsilon - \varepsilon_n) / a,$$

$$\cos \omega t = \frac{\rho(\varepsilon - \varepsilon_n)}{a\omega},$$

тому вираз (8.49) для першої гармоніки

$$\begin{aligned} u &= A_0 + A_1 \frac{\varepsilon - \varepsilon_n}{a} + B_1 \frac{\rho(\varepsilon - \varepsilon_n)}{a\omega} = \\ &= A_0 + \left(\frac{A_1}{a} + \frac{B_1}{a} \frac{\rho}{\omega} \right) (\varepsilon - \varepsilon_n) = \\ &= k_{10} \varepsilon_n + \left(k_r + k'_r \frac{\rho}{\omega} \right) (\varepsilon - \varepsilon_n). \end{aligned} \quad (8.59)$$

Вираз (8.59), крім коефіцієнтів k_r і k'_r , містить коефіцієнт $k_{10} = A_1/\varepsilon_n$, який є коефіцієнтом передачі постійної складової.

Рівняння (8.59) лінійне. Йому відповідає структурна схема, зображена на рис. 8.27, а. Схема має дві паралельні ланки. Ланка з передаточною функцією k_{10} передає постійну складову, а з передаточною функцією $k_r + k'_r \rho/\omega$ пропускає тільки синусоїдальну складову вхідного сигналу. Вихідний сигнал u становить суму постійної складової $k_{10} \varepsilon_n$ і синусоїдального сигналу:

$$(k_r + k'_r \rho/\omega) a \sin \omega t = (k_r + k'_r \rho/\omega) (\varepsilon - \varepsilon_n).$$

Якщо причиною виникнення постійної складової є не зовнішній дія, а несиметричність характеристики нелинійної ланки відносно початку координат (ефект випрямлення), то нелинійну ланку не можна подавати у вигляді структурної схеми, зображеної на рис. 8.27, а, бо в цьому разі постійна складова A_1 на виході нелинійної ланки не дорівнює нулю навіть при $\varepsilon_n = 0$, тобто коефіцієнт k_{10} не має сенсу. У цьому разі нелинійну ланку слід подавати у вигляді структурної схеми, наведеної на рис. 8.27, б, де постійна складова A_0 розглядається як деяка зовнішня дія.

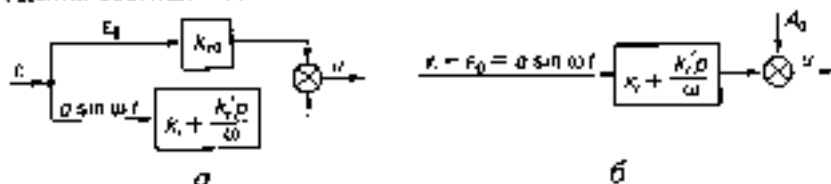


Рис. 8.27

Постійну складову та коефіцієнти гармонічної лінеаризації можна визначити за формулами (8.50), (8.51) і (8.52).

- **Приклад 8.4.** Визначити коефіцієнти гармонічної лінеаризації для нелінійної ланки, яка має характеристику із зоною насичення (див. рис. 8.24).

Розв'язання. Синус та косинус ланки $\varphi(a \sin \omega t)$ є непарними періодичними функціями, тому ряд Фур'є не має константи і вільного члена, тобто $A_0 = 0$ і $B_0 = 0$; отже, $k_{0,0} = 0$ і $k_{0,1} = 0$.

Визначимо коефіцієнти $k_1 = A_1/a$. При обчисленні коефіцієнта A_1 за формулою (8.51) скористаємося тим, що інтеграл від 0 до 2π можна дістати як чотири інтеграли від 0 до $\pi/2$, тобто

$$k_1 = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} \varphi(a \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t). \quad (8.60)$$

Нелінійна функція $\varphi(a \sin \omega t)$ відома з рис. 8.24 в інтервалі від 0 до ωt_1 має вигляд

$$\varphi(a \sin \omega t) = ka \sin \omega t,$$

а в інтервалі від ωt_1 до $\pi/2$ —

$$\varphi(a \sin \omega t) = b.$$

Тому інтеграл (8.60) можна подати у вигляді суми двох інтегралів

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{4}{\pi a} \int_0^{\omega t_1} ka \sin \omega t \sin \omega t d(\omega t) + \frac{4}{\pi a} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} b \sin \omega t d(\omega t) = \\ &= \frac{4k}{\pi} \int_0^{\omega t_1} \sin^2 \omega t d(\omega t) + \frac{4b}{\pi a} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} \sin \omega t d(\omega t) = \\ &= \frac{4k}{\pi} \left[\frac{1}{2} \omega t - \frac{1}{4} \sin 2\omega t \right]_0^{\omega t_1} + \frac{4b}{\pi a} \cos \omega t \Big|_{\omega t_1}^{\pi/2}. \end{aligned}$$

При обчисленні інтегралів врахуємо, що згідно з графіком функції $\varphi(a \sin \omega t)$ на рис. 8.24

$$\omega t_1 = \arcsin \frac{b}{ak}$$

Крім того, виконаємо такі заміни:

$$\sin 2\omega t = 2 \sin \omega t \sqrt{1 - \sin^2 \omega t},$$

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t}.$$

Тоді маємо

$$k_r = \frac{4k}{\pi} \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{b}{ak} - \frac{1}{2} \frac{b}{ak} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2 k^2}} \right) + \frac{4b}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2 k^2}} =$$

$$= \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{ak} + \frac{b}{ak} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2 k^2}} \right).$$

Цей вираз справедливий при $a > bk$. При $a < bk$, коли зона навантаження не досягається, $k_r = k$.

Графік залежності коефіцієнта k_r від амплітуди a подано на рис. 8.28, а.

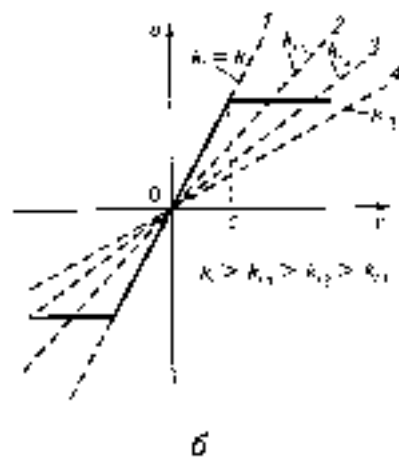
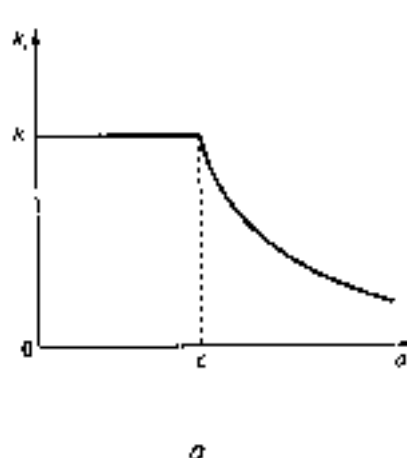


Рис. 8.28

При виконанні гармонічної лінеаризації, звичайно, немає необхідності визначати коефіцієнти k_1 і k_r . Для типових нелинійних ідейні значення можна знайти у більшості підручників з теорії автоматичного керування. Формули для визначення коефіцієнтів гармонічної лінеаризації типових нелинійних ланок подано також у табл. 8.2.

Отже, гармонічна лінеаризація надає можливість описувати суттєво нелінійні ланки лінійними рівняннями. Проте слід мати на увазі, що гармонічна лінеаризація нелінійних залежностей принципово відрізняється від звичайної лінеаризації, яку було розглянуто раніше

Таблиця 8.2

Рисунк, на якому наведено характеристику нелінійної ланки	Коефіцієнт гармонічної лінеаризації	
	k_1	k_2
8.1, а	$k - \frac{2k}{\pi} \left[\arcsin \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} \right]$ при $a > c$	0
8.1, б	$\frac{2k}{\pi} \left[\arcsin \frac{b}{ak} + \frac{b}{ak} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2 k^2}} \right]$ при $a > bk$	0
8.1, в	$4bc/\pi a$	0
8.1, г	$\frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2c}{a} \right) + 2 \left(1 - \frac{2c}{a} \right) \sqrt{\frac{c}{a} \left(1 - \frac{c}{a} \right)} \right]$ при $a > c$	$-\frac{4kc}{\pi a} \left(1 - \frac{c}{a} \right)$ при $a > c$
8.1, д	$\frac{4b}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$ при $a > c$	0
8.1, е	$\frac{k}{\pi} \left[\arcsin \frac{c_1}{a} + \frac{c_1}{a} \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{a^2}} + \arcsin \frac{c_2}{a} + \frac{c_2}{a} \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{a^2}} \right]$ при $a > c_1$	$-\frac{k(c_1^2 + c_2^2)}{\pi a^2}$ при $a > c_1$
8.1, є	$\frac{4b}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$ при $a > c$	$-\frac{4bc}{\pi a^2}$ при $a > c$

(див. гл. 2, п. 2.6). Коли виконується змичайна лінеаризація, то нелінійна характеристика поблизу точки лінеаризації замінюється прямою лінією, яка має сталий коефіцієнт нахилу k , що не залежить від вхідної та вихідної величин ланки. Якщо виконується гармонічна лінеаризація, то нелінійна характеристика замінюється прямою лінією з коефіцієнтом нахилу k_1 , величина якого залежить від амплітуди вхідного сигналу. Наприклад, з графіка $k_1(a)$ (рис. 8.28, а) видно, що при $a < c$ коефіцієнт $k_1 = k$ і лінеаризована характеристика збігається з лінійною частиною характеристики ланки з пасивним (характеристика 1 на рис. 8.28, б). Якщо амплітуда зростає, то коефіцієнт k_1 зменшується і лінеаризована характеристика набуває ви-

глибину характеристик 2, 3 і т. д. При $\sigma \rightarrow \infty$ коефіцієнт k , прямує до нуля. Пояснюється це тим, що при зростанні амплітуди вхідного сигналу амплітуда вихідного сигналу внаслідок насичення залишається незмінною, тобто коефіцієнт передачі ланки безперервно зменшується.

Отже, гармонічна лінеаризація замінює нелінійну ланку не на звичайну лінійну ланку, а на таку, коефіцієнт передачі якої є функцією амплітуди (а в загальному випадку й частоти) вхідного сигналу. Тільки для режиму автоколивань, коли $\omega = A = \cos \omega t$ і $\omega_0 = \omega$, $A = \cos \omega t$ і ω_0 — амплітуда і частота автоколивань), коефіцієнти гармонічної лінеаризації є сталими величинами. Ця істотна особливість лінеаризованих ланок з коефіцієнтами k , і k' є тією важливою обставиною, яка надає можливість використовувати методи лінійної теорії для дослідження суттєво нелінійних систем автоматичного керування.

8.10

Дослідження автоколивань методом гармонічної лінеаризації

Розглянемо спочатку випадок, коли зовнішня дія $f(t) = 0$ і характеристика нелінійної ланки симетрична відносно початку координат. Постійна складова в цьому разі відсутня і автоколивання мають вигляд:

$$x = A \sin \omega_c t.$$

Після гармонічної лінеаризації структурна схема системи матиме вигляд, зображений на рис. 8.29. Приймаючи

$$W_{\Sigma}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)},$$

$$W_{\Sigma}(A) = k_1 + \frac{k'_1}{\omega_c} p,$$

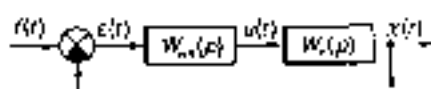


Рис. 8.29

запишемо диференціальне рівняння системи з урахуванням

$$\left[Q(p) + R(p) \left(k_1 + \frac{k'_1}{\omega_c} p \right) \right] x(t) = 0. \quad (8.61)$$

Коефіцієнти k_i і k'_i у загальному випадку залежать від амплітуди і частоти ω_c автоколивань. Для режиму автоколивань, коли $A = \text{const}$ і $\omega_c = \text{const}$, рівняння (8.61) є лінійним зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язок рівняння (8.61) у вигляді $x = A \sin \omega_c t$ можливий лише тоді, коли характеристичне рівняння замкнутої системи

$$Q(p) \cdot R(p) \left(k_r + \frac{k'_r p}{\omega_c} \right) = 0 \quad (8.62)$$

має пару суто уявних коренів $p_{1,2} = \pm j\omega_c$ за умови, що решта коренів мають від'ємні дійсні частини. При цьому лінійна частина системи повинна бути стійкою або нейтральною, тобто поліном $Q(p)$ може мати корені з від'ємними дійсними частинними або нульові корені і не повинен мати коренів з додатними дійсними частинними або чисто уявних коренів. Перелічені умови відповідають знаходженню гармонічно лінеаризованої системи на межі стійкості. Тому при визначенні періодичного розв'язку, тобто частоти ω_c і амплітуди A автоколивань, можна користуватися відомими критеріями стійкості лінійних систем, приймаючи, що в режимі автоколивань система перебуває на межі стійкості, яка відповідає незатухаючим коливанням.

Так, умови знаходження системи на межі стійкості за критерієм Гурвіца

$$\Delta_{n-1} = 0, \quad (8.63)$$

де Δ_{n-1} — передостанній мінор визначника Гурвіца

За критерієм Найквіста ця умова має вигляд

$$W'_{n-1}(j\omega)W_n(j\omega) = -1 \quad (8.64)$$

За критерієм Михайлова межа колиальної стійкості відповідає проходженню вектора Михайлова через початок координат комплексної площини, тобто

$$D(j\omega) = 0. \quad (8.65)$$

У рівняннях (8.63), (8.64) і (8.65) входять коефіцієнти k_i і k'_i , які є функціями амплітуди або амплітуди і частоти. Тому використання цих рівнянь дає змогу знайти значення амплітуди та частоти.

Вибір критерію стійкості для визначення A і ω_c залежить від типу нелінійності та конкретної схеми системи. Наприклад, якщо лінеаризована передаточна функція нелінійної ланки $W_n(p)$ дорівнює k_n , причому k_n є функцією тільки амплітуди, то для визначення параметрів

трів автоколивань доцільно застосувати критерій Найквіста в логарифмічній формі. У цьому разі ЛАХ залежить від k , і, отже, від амплітуди A , а ЛФХ визначається лише передаточною функцією лінійної частини системи $W_{\text{лн}}(p)$ і не залежить від $W_{\text{нл}}(p)$.

Для визначення амплітуди автоколивань достатньо побудувати серію характеристик $L(\omega)$ для різних значень A . Ці характеристики будуть паралельними одна одній (рис. 8.30). Шуканим значенням амплітуди A буде таке, за якого на частоті зрізу $\varphi(\omega) = -\pi$. Для характеристик на рис. 8.30 $A = A_1$, $\omega_{\text{а}} = \omega_{11}$.

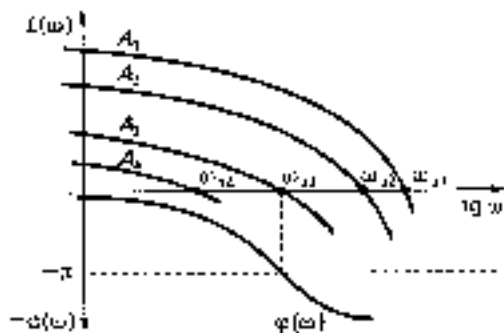


Рис. 8.30

Найповніше розроблено методи визначення частоти й амплітуди автоколивань, я основу яких покладено критерії Найквіста (метод Гольцфарба) і Михайлова (метод Попова).

Метод Гольцфарба. За цим методом можна визначити параметри автоколивань для систем з одним нелінійним елементом, коефіцієнти гармонічної лінійзації якого є функціями лише амплітуди. У цьому разі рівняння (8.64) запишеться так:

$$W'_{\text{лн}}(A)W_A(j\omega) = -1. \quad (8.66)$$

Це рівняння розв'язується графічно. Якщо його показати у вигляді

$$W_A(j\omega) = -1/W'_{\text{лн}}(A), \quad (8.67)$$

то очевидно, що для його розв'язання необхідно побудувати дві характеристики: АФХ лінійної частини системи $W_A(j\omega)$ і від'ємну обернену характеристику нелінійної ланки $-1/W'_{\text{лн}}(A)$. Характеристики необхідно будувати в тій самій системі координат, і масштаби на цих координатах мають бути однаковими. Якщо побудовані криві не перетинаються, то розв'язку рівняння (8.66) не існує і автоколивання у системі відсутні. Якщо ж ці криві перетинаються (рис. 8.31, а), то рівняння (8.66) має розв'язок і автоколивання можливі.

Стійкість або нестійкість автоколивань можна досліджувати, аналізуючи точки перетину M і N , яким відповідають граничні цикли на

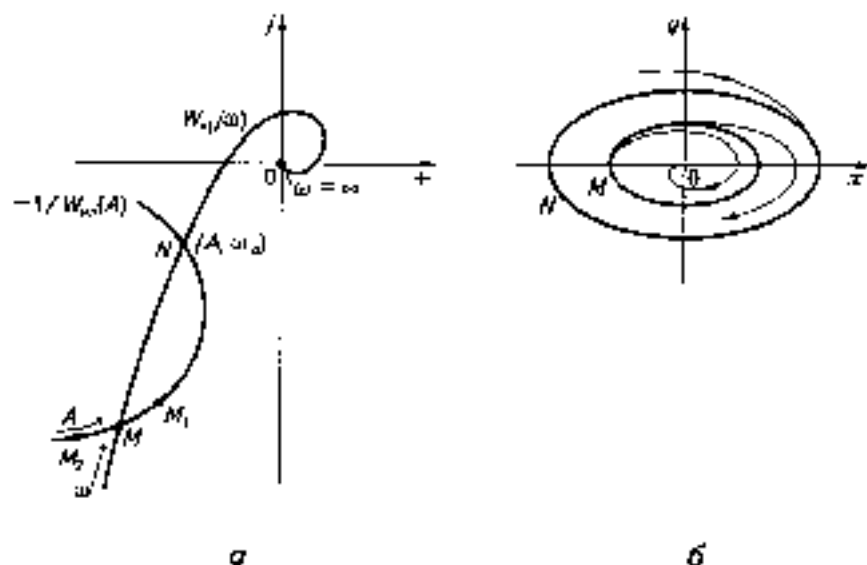


Рис. 8.31

фазовій площині (рис. 8.31, б). Цикл M має меншу амплітуду, цикл N — більшу.

Для перевірки стійкості граничних циклів можна скористатися критерієм Найквіста. Лінійна система перебуває на межі стійкості, якщо АФХ розімкнутої системи проходить через критичну точку з координатами $(-1, j0)$, тобто рівняння, що відповідає незатухаючим коливанням,

$$1 + W(j\omega) = 0.$$

Для нелінійної системи це рівняння має вигляд

$$1 + W_*(j\omega)W_n(A) = 0,$$

тому критичними точками для АФХ будуть точки $-1/W_n(A)$, які належать від'ємній зворотній характеристиці нелінійної ланки. Охоплення чи неохоплення цих точок амплітудно-фазовою характеристикою свідчатиме про стійкість або нестійкість руху, що відповідає граничному циклу.

Розглянемо граничний цикл, що відповідає точці перетину M . Припустимо, що амплітуда трохи більша, ніж у точці M , і змичення

функції $-1/W_{\text{нл}}(A)$ визначається точкою M_1 . АФХ лінійної частини охоплює цю точку. Отже, рух нестійкий і амплітуда зростатиме. Якщо амплітуда стане трохи меншою, ніж у точці M (точка M_2), то АФХ не охоплюватиме цю точку, рух буде стійким, амплітуда зменшуватиметься. Це означає, що граничний цикл M нестійкий, оскільки в обох випадках фазові траєкторії віддаляються від нього. Якщо так само розглянути точку N , то можна дійти висновку, що вона відповідає стійкому граничному циклові. Отже, можна сформулювати таке правило визначення стійкості коливань: *якщо точка на кривій $-1/W_{\text{нл}}(A)$, що відповідає зростаючій амплітуді, не охоплюється АФХ лінійної частини системи, то коливання стійкі, а якщо охоплюється — то нестійкі*. За цим правилом точка M відповідає нестійким коливанням, а точка N — стійким. Знайшовши точку N , визначимо параметри автоколивань: амплітуду A (за характеристикою нелинійного елемента) і частоту ω_2 (за АФХ лінійної частини системи). Після знаходження параметрів автоколивань слід перевірити гіпотезу фільтра (див. п. 8.9).

Якщо характеристики $W_2(j\omega)$ і $-1/W_{\text{нл}}(A)$ не перетинаються, то автоколивання неможливі, а система може бути стійкою або нестійкою. Якщо АФХ лінійної частини не охоплює характеристику нелинійного елемента, то система стійка, інакше охоплює — нестійка.

Використовуючи графіки $W_2(j\omega)$ і $-1/W_{\text{нл}}(A)$ досліджуємо вплив на частоту і амплітуду можливих автоколивань параметрів нелинійної ланки і лінійної частини системи. Зміна параметрів лінійної частини деформує частотну характеристику $W_2(j\omega)$, а нелинійної ланки — характеристику $-1/W_{\text{нл}}(A)$.

- **Приклад 8.5.** Визначити методом Гольдфарба амплітуду та частоту автоколивань вихідної координати електричного електропривода, розглянутого в прикладі 8.2. Структурну схему системи зображено на рис. 8.11. Параметри електропривода: $k_2 = 1.5 \text{ л/В} \cdot \text{с}$; $T_m = 0.1 \text{ с}$; $q = 0.1$. Характеристика $\phi(\varepsilon)$ є характеристикою реального релейного елемента (див. рис. 8.1, в) з такими параметрами $b = 100 \text{ В}$; $c = 0.25 \text{ рад}$.

Розв'язання. Передаточна функція лінійної частини системи відносно до структурної схеми, наведеної на рис. 8.11,

$$W_2(p) = \frac{k_2 q}{p(T_m p + 1)} = \frac{0.15}{p(0.1p + 1)}.$$

Передаточна функція гармонічно лінеаризованого нелинійного елемента

$$W_{\text{ex}}(A) = k_r + k_r' \frac{p}{\omega}.$$

де згідно з табл. 8.2

$$k_r = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}};$$

$$k_r' = -\frac{4bc}{\pi A^2}.$$

Підставляючи $p = j\omega$ в передаткову функцію, дістанемо

$$W_{\text{ex}}(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} - j \frac{4bc}{\pi A^2} = \frac{4bc}{\pi A^2} \left(\sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} - j \right);$$

$$\therefore \frac{1}{W_{\text{ex}}(A)} = -\frac{\pi c}{4b} \left(\sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} + j \right);$$

$$\begin{aligned} W_s(j\omega) &= \frac{k_1 q}{j\omega(j\omega T_n + 1)} = \frac{k_2 q T_n}{T_n^2 \omega^2 + 1} - j \frac{k_3 q}{T_n^2 \omega^2 + 1} = \\ &= U_1(\omega) + jU_2(\omega). \end{aligned}$$

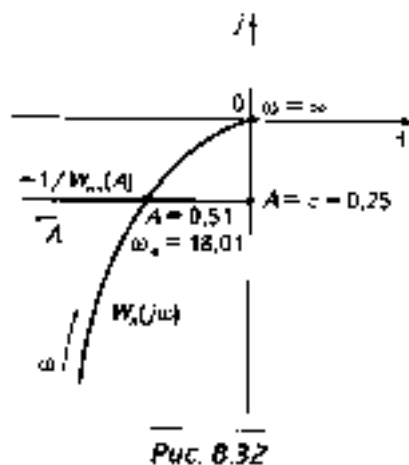


Рис. 8.32

Графіки функцій $-1/W_{\text{ex}}(A)$ і $W_s(j\omega)$ зображено на рис. 8.32. Увага частини характеристик $-1/W_{\text{ex}}(A)$ не залежить від амплітуди, тому характеристика проходить паралельно цій осі абсцис. При $A = c = 0,25$

$$-1/W_{\text{ex}}(A) = -j \frac{\pi c}{4b}.$$

У точці перетину характеристик $-1/W_{\text{ex}}(A)$ і $W_s(j\omega)$ має уявну частоту однакову, тобто

$$jU_2(\omega_*) = j \frac{\pi c}{4b}$$

або

$$\frac{k_3 q}{T_n^2 \omega_*^2 + \omega_*} = \frac{\pi c}{4b},$$

звідки

$$T_n^2 \omega_*^3 + \omega_* = 4bk_3 q / \pi c.$$

(8.68)

Після підстановки значень параметрів дістанемо рівняння

$$0,00k\omega_0^2 + m_0 - 76,4 = 0,$$

розв'язавши яке визначимо частоту автоколивань. Це рівняння має один дійсний додатний корінь 18,01, отже, $\omega_0 = 18,01 \text{ с}^{-1}$.

Амплітуду автоколивань A визначимо з умови, що при $\omega = \omega_0$ дійсна частина характеристики $-1/W_{\text{вх}}(j\omega)$ і $W'(j\omega)$ однакові, тобто

$$-\frac{\pi c}{4b} \left(\frac{A^2}{c^2} - 1 \right) = -\frac{k_0 g T_0}{T_0 m_0^2 + 1}.$$

Після підстановки значень параметрів дістанемо рівняння

$$0,00196\sqrt{16A^2 - 1} = 0,00353,$$

звідки $A = 0,51$ рад.

Коливання в системі стійкі, оскільки при зростанні амплітуди точки на характеристиці $-1/W_{\text{вх}}(j\omega)$ кривою $W_{\text{вх}}(j\omega)$ не охоплюються.

Для перевірки умови фільтра не обов'язково будувати амплітудно-частотну характеристику ланки частини. Достатньо висланих модуль характеристики

$$|W_{\text{вх}}(j\omega)| = \sqrt{W_{\text{вх}}^2(\omega) + V_{\text{вх}}^2(\omega)}$$

при $\omega = \omega_0 = 18,01 \text{ с}^{-1}$ і $\omega = 2\omega_0 = 36,03 \text{ с}^{-1}$.

Найближчою мінною гармонікою є третя, оскільки характеристика нелінійного елемента симетрична відносно початку координат і, отже, парні гармоніки відсутні.

При $\omega = \omega_0 = 18,01 \text{ с}^{-1}$ $|W_{\text{вх}}(j\omega_0)| = 0,00404$, а при $\omega = 2\omega_0$ $|W_{\text{вх}}(j2\omega_0)| = 0,000303$.

Амплітуда третьої гармоніки становить 12,5 % від амплітуди першої гармоніки, тому результат розрахунку є наближеним. Його точність можна оцінити, порівнявши з результатами прикладу 8.2

Знайдемо значення A і ω_0 — це амплітуда і частота коливань на вході нелінійної ланки. Частота автоколивань однаково для всіх координат систем, включаючи $0_{\text{вх}}$ (див. рис. 8.12). Амплітуда коливань вихідної координати згідно зі структурною схемою також дорівнює амплітуді сигналу на вході нелінійної ланки, тому $\omega_0 \sin \omega_0 t = x(t)$. Отже, частота і амплітуда коливань вихідної координати дорівнюють відповідно 18,01 с^{-1} і 0,51 рад.

Метод Гольдфарба можна поширити й на випадок, коли система має кілька нелінійних ланок. Нехай, наприклад, структурна схема системи має вигляд, зображений на рис. 8.33, де передаточні функції

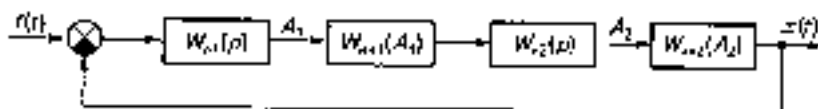


Рис. 8.33

$W_{n11}(A_1)$ і $W_{n22}(A_2)$ нелінійних ланок залежать лише від амплітуд A_1 і A_2 сигналів на їх входах.

Відповідно до структурної схеми

$$A_2 = A_1 |W_{n11}(A_1)| |W_{n22}(j\omega)|.$$

Звідси випливає, що амплітуда A_2 залежить від амплітуди A_1 і частоти ω , тобто $A_2 = A_2(A_1, \omega)$. У цьому разі рівняння (8.66) набуває вигляду

$$W_{n1}(j\omega) W_{n11}(A_1) W_{n22}(j\omega) W_{n2}(A_1, \omega) = -1 \quad (8.69)$$

Позначивши

$$W_{n1}(j\omega) W_{n22}(j\omega) = W_{n12}(j\omega)$$

і

$$W_{n11}(A_1) W_{n22}(A_1, \omega) = W_{n11}(A_1, \omega),$$

з (8.69) дістанемо рівняння

$$W_{n12}(j\omega) = -1 / W_{n11}(A_1, \omega), \quad (8.70)$$

яке відрізняється від (8.67) тим, що W_{n11} є функцією двох параметрів A_1 і ω .

Рівняння (8.70), як і (8.67), можна розв'язати графічно. Проте розв'язування ускладниться, оскільки $W_{n11}(A_1, \omega)$ залежить від двох параметрів. Тому крім характеристики $W_{n12}(j\omega)$ слід побудувати сім'ю характеристик $-1/W_{n11}(A_1)$ для різних частот ω (рис. 8.34, а) або сім'ю характеристик $-1/W_{n11}(j\omega)$ для різних значень амплітуди A_1 (рис. 8.34, б). Параметри можливих автоколивань визначаються точками перетину цих кривих, у яких збігаються точки з однаковими частотами.

Таким самим методом можна дослідити систему з одним нелінійним елементом, лінеаризована передаточна функція $W_{n12}(A_1, \omega)$ якої залежить від амплітуди та частоти.

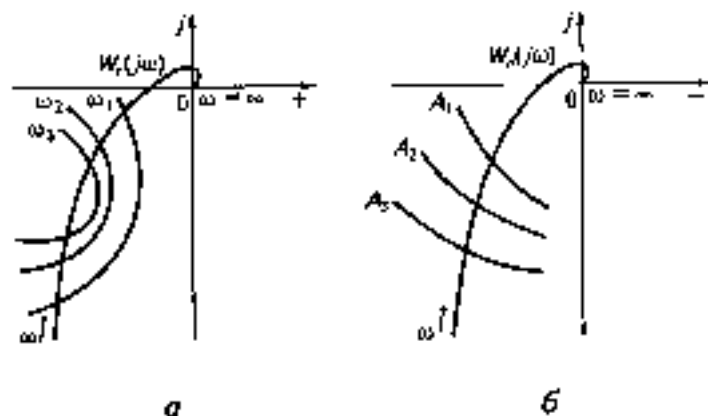


Рис. 8.34

Метод Лалова. В основу цього методу покладено критерій Михайлова, що дає змогу досліджувати системи з нелинійними ланками, лінеаризовані передаточні функції яких $W_m(j\omega, A)$ залежать не тільки від амплітуди, а й від частоти. Крім того, цим методом можна досліджувати нелинійні системи з кількома нелинійними ланками, що розділяються лінійними інерційними ланками (див. рис. 8.33).

Розглянемо структурну схему, наведену на рис. 8.29. Приймаючи, що $W_1(p) = R(p)/Q(p)$ і $W_m = W_m(A, p)$, визначимо передаточну функцію замкнутої системи

$$W_1(p) = \frac{\frac{R(p)}{Q(p)} W_m(A, p)}{1 + \frac{R(p)}{Q(p)} W_m(A, p)} = \frac{R(p) W_m(A, p)}{Q(p) + R(p) W_m(A, p)} \quad (8.71)$$

і запишемо характеристичний поліном

$$D(p) = Q(p) + R(p) W_m(A, p). \quad (8.72)$$

Межа допустимості стійкості визначається умовою (8.65), тобто

$$Q(j\omega) + R(j\omega) W_m(A, j\omega) = 0. \quad (8.73)$$

Визначивши у виразі (8.73) дійсну і уявну частинки, дістанемо

$$X(A, \omega) + jY(A, \omega) = 0 \quad (8.74)$$

Ця рівність можлива, якщо дійсна і уявна частинки дорівнюють нулю, тому рівняння (8.74) можна записати у вигляді двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} X(A, \omega) = 0; \\ Y(A, \omega) = 0. \end{cases} \quad (8.75)$$

Розв'язавши ці рівняння, знайдемо параметри автоколивань A і ω . Амплітуда і частота є додатними дійсними числами. Тому якщо в результаті розв'язування рівнянь (8.75) обидва невідомих будуть додатними дійсними числами, то автоколивання можливі. Якщо ж будь-яке невідоме буде від'ємним або уявним, то автоколивань у системі не існує.

Якщо вирази для коефіцієнтів гармонічної лінеаризації k_i і k'_i нескладні і лінійна частинка системи має невисокий порядок, то системну рівність можна розв'язати аналітично і визначити A і ω в якому вигляді.

Після визначення параметрів автоколивань необхідно перевірити їхню стійкість за допомогою нерівності

$$\left(\frac{\partial X}{\partial A} \right)_{A_0} \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} \left(\frac{\partial Y}{\partial A} \right)_{A_0} > 0. \quad (8.76)$$

В цьому виразі частинні похідні обчислюються для режиму автоколивань, тобто після визначення частинних похідних від дійсної та уявної частин $X(A, \omega)$ замість A і ω треба підставити їхні значення. Якщо при цьому нерівність (8.76) виконується, то автоколивання стійкі, в протилежному разі — нестійкі.

□ Приклад 8.6. Визначити методом Попова частоту і амплітуду автоколивань нелінійної осі слідкувального електропривода, розглянутого в прикладі 8.5.

Розв'язання. Переходимо функції лійної частини системи

$$W'(p) = \frac{k_1 q}{p(T_n p + 1)} = \frac{R(p)}{Q(p)},$$

а лінійнолінійно лінеаризованій нелинійній ланці

$$W_{\text{ли}}(A, p) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} - \frac{4bc}{\pi A^2} \frac{p}{\omega}.$$

Характеристичний поліном згідно з формулою (8.72) для системи
так:

$$D(\rho) = T_0 \rho^2 + p - k, q \left(\frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} - \frac{4bc}{\pi A^2} \frac{p}{\omega} \right).$$

Підставляючи в цей вираз $p = j\omega$, визначимо дійсну і уявну частини
полінома $D(j\omega)$ і складемо систему рівнянь вигляду (8.75):

$$D_1(j\omega) = -T_0 \omega^2 + j\omega + k, q \left(\frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} - j \frac{4bc}{\pi A^2} \frac{p}{\omega} \right);$$

$$X(A, \omega) = -T_0 \omega^2 + \frac{4k, qb}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - c^2} = 0; \quad (8.77)$$

$$Y(A, \omega) = \omega - \frac{4k, qbc}{\pi A^2} = 0. \quad (8.78)$$

З виразу (8.78) виразимо

$$A^2 = \frac{4k, qbc}{\pi \omega} \quad (8.79)$$

і підставимо в (8.77). Після поратисрень отримаємо рівняння

$$T_0^2 \omega^2 + \omega + 4k, qbc/\pi c = 0,$$

яке підгається з (8.66), визначеним у прикладі 8.5 при розв'язуванні за-
дачі методом Гольцшарфа. Розв'язок цього рівняння для частоти авто-
коливань $\omega_0 = 18,91 \text{ с}^{-1}$. Амплітуду автоколивань визначимо з виразу
(8.79) при $\omega = 18,91 \text{ с}^{-1}$:

$$A = \sqrt{\frac{4k, qbc}{\pi \omega}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,5 \cdot 0,1 \cdot 100 \cdot 0,25}{\pi \cdot 18,91}} = 0,51.$$

Стійкість періодичного розв'язку перевіримо за допомогою
теорії нерівності (8.76). Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial X}{\partial A} = \frac{4k, qb}{\pi} \frac{2c^2 - A^2}{A^3 \sqrt{A^2 - c^2}}; \quad \frac{\partial X}{\partial \omega} = -2T_0 \omega;$$

$$\frac{\partial Y}{\partial A} = \frac{4k, qbc}{\pi A^2}; \quad \frac{\partial Y}{\partial \omega} = 1.$$

При $A = 0,51$ і $\omega = 18,61$

$$\left(\frac{dX}{dA}\right)_* = -43,73, \quad \left(\frac{dX}{d\omega}\right)_* = -3,602, \quad \left(\frac{dY}{dA}\right)_* = 72,02, \quad \left(\frac{dY}{d\omega}\right)_* = 1.$$

Умова (8.76)

$$(-43,73) \cdot 1 - (-3,602) \cdot 72,02 = 215,7 > 0$$

виконується, отже, автоколивання в системі існують.

Параметри коливань вихідної осі визначають так само, як і в прикладі 8.5.

Якщо вирази для коефіцієнтів гармонічної лінеаризації досить складні, а лінійна частина системи має високий порядок, то розв'язок системи рівнянь (8.75) можна знайти графікоаналітичним способом. При цьому X і Y розглядають як прямокутні координати і будують голографію вектора Михайлова $D(j\omega)$, змінюючи частоту ω межах $0 < \omega < \infty$ для різних значень амплітуди A . Голограф вектора Михайлова, що проходить через початок координат комплексної площини, здійснює в системі рівнянь (8.75) значення частоти, за якого голограф проходить через початок координат, дорівнює частоті автоколивань, а амплітуда A , для якої побудовано цей голограф, — амплітуда автоколивань.

Практично для визначення A і ω , немає потреби будувати сім'ю голографів для великої кількості амплітуд. Звичайно достатньо побудувати два голографи для таких амплітуд A_1 і A_2 , щоб один із голографів охоплював, а інший не охоплював початок координат (рис. 8.35).

Значення A і ω , визначаються з криволінійного чотирикутника (за умови, що $A_1 > A_2$) за формулами

$$A = A_2 + \frac{bO}{ad}(A_1 - A_2);$$

$$\omega_1 = \omega_2 + \frac{cO}{cd}(\omega_2 - \omega_1).$$

Стійкість автоколивань перевіряється так. Якщо за додатного приросту амплітуди голограф вектора Михайлова відходить від стійкої системи, то й автоколивання стійкі.

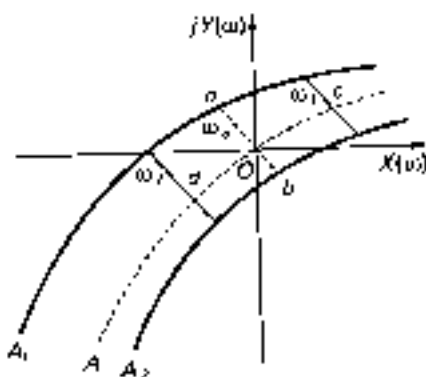


Рис. 8.35

Системи з нелінійними елементами, що мають несиметричні характеристики. Структурна схема системи у цьому разі має вигляд, зображений на рис. 8.36 (структуру нелінійної ланки подано відповідно до рис. 8.27, б). У спектрі вихідного сигналу нелінійного елемента навіть за відсутності зовнішньої дії ($f(t) = 0$) буде постійна складова A_0 , яку зображено на структурній схемі у вигляді зовнішньої дії. Величина A_0 визначається за формулою (8.50)

Рівняння для постійної складової у цьому разі

$$X_0 = A_0 W_n(0) = -\epsilon_0$$

або

$$\epsilon_0 = -A_0 W_n(0). \quad (8.80)$$

Для гармонічної складової залишається справедливою передаточно функція (8.71) і умова (8.73). Різниця полягає у тому, що в зв'язку з наявністю постійної складової значення A_0 , k_1 і k_1' будуть функціями трьох параметрів: $\epsilon_0 = -\chi_0$, A і ω , тобто рівняння (8.75) матимуть вигляд

$$X(A, \omega, \epsilon_0) = 0; \quad (8.81)$$

$$Y(A, \omega, \epsilon_0) = 0, \quad (8.82)$$

а рівняння (8.80) —

$$\epsilon_0 = -A_0(A, \omega, \epsilon_0) W_n(0). \quad (8.83)$$

Отже, для визначення трьох невідомих A , ω , ϵ_0 є система трьох рівнянь (8.81), (8.82), (8.83).

Системи з постійною зовнішньою дією. Якщо у довільній точці нелінійної системи прикладено постійну зовнішню дію F_0 , то на вході нелінійної ланки з'явиться постійна складова. Якщо характеристика нелінійного елемента симетрична відносно початку координат (непарна характеристика), то внаслідок гармонічної лінеаризації нелінійний елемент можна описати рівняннями (8.59), у якому коефіцієнти k_{10} , k_1 і k_1' є функціями трьох параметрів A , ω , ϵ_0 .

Для постійної складової справедливим є рівняння

$$\epsilon_0 = W_n(0) F_0, \quad (8.84)$$

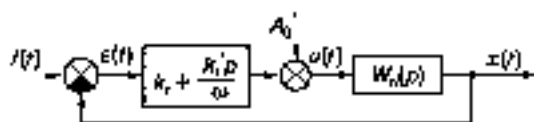


Рис. 8.36

де

$$W_{\lambda}(0) = \frac{W_{\lambda}(0)}{1 - E_{\lambda}(A, \omega, \nu_{\lambda}) W_{\lambda}(0)};$$

$W_{\lambda}(0)$ – передаточна функція частини системи між точками прикладання сигналів e_1 і E_{λ} .

Для гармонічної складової система рівнянь повністю збігається з (8.81), (8.82). Отже, і в цьому разі для визначення трьох невідомих A , ω , ν_{λ} є три рівняння (8.81), (8.82) і (8.84).

Якщо характеристика нелінійної ланки несістематична, то рівняння (8.84) слід замінити рівнянням

$$e_1 = -W_{\lambda}(0)A_{\lambda}(A, \omega, \nu_{\lambda}) + W_{\lambda}(0)E_{\lambda}. \quad (8.85)$$

Вимушені рухи, зумовлені гармонічними вхідними сигналами. При гармонічних вхідних сигналах можливі два варіанти поведінки системи. У першому припускається, що автоколивання в системі відсутні, тобто вони або принципово неможливі, або зовнішні дії такі, що режим автоколивань не виникає. У цьому разі для аналізу динаміки системи можна користуватися гармонічно лінеаризованими передаточними функціями нелінійних ланок.

Якщо ж у системі існують автоколивання і до неї прикладена зовнішня гармонічна дія, то або відбудеться «захолловання», тобто автоколивання будуть придушені і в системі зестабілізується рух з частотою зовнішньої дії, або одночасно існують музичні рухи: автоколивання і вимушені коливання.

Розглянемо спочатку вимушені рухи за відсутності автоколивань. Нехай структурна схема системи має такий, зображений на рис. 8.29, причому гармонічно лінеаризована передаточна функція $W_{\lambda}(A)$ нелінійної ланки є функцією тільки амплітуди A . Вхідний сигнал $f(t) = A_0 \sin \omega_0 t$, де A_0 , ω_0 – амплітуда і частота зовнішньої гармонічної дії.

Відповідно до структурної схеми, зображеної на рис. 8.29, сигнал на вхід нелінійної ланки

$$e(t) = \frac{1}{1 + W_{\lambda}(A)W_{\lambda}(p)} f(t). \quad (8.86)$$

Складність визначення вимушеного руху $e(t)$ за рівнянням (8.86) полягає в тому, що для його визначення треба знати передаточну функцію $W_{\lambda}(A)$, а вона, своєю чергою, залежить від A , де $A = |e|$.

Розглянемо один із можливих графічних способів вираження рівняння (8.86). Задати різні значення амплітуди A і використовувати формулу гармонічної лінеаризації конкретного нелинійного елемента, за формулою (8.86) при $p = j\omega$, розраховуємо залежність $|e| = f_1(A)$ (рис. 8.37). Точка перетину графіка цієї залежності з бісектрисою $|e| = A$ визначає амплітуду вимушених коливань A_0 .

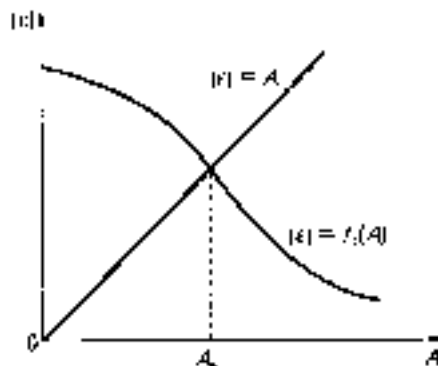


Рис. 8.37

Фазу сигналу φ можна знайти так само, як і для лінійних систем, попередньо визначивши $W_m(A)$ при $A = A_0$. Тоді

$$i + W_m(A_0)W_m(j\omega_0) = U(\omega_0) + jV(\omega_0)$$

$$\varphi = \arctg \frac{V(\omega_0)}{U(\omega_0)}.$$

Отже, сигнал x визначається повністю:

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Розглянемо тепер вимушені рухи в системі з автоколиваннями. Нехай, як і раніше, структурна схема системи має вигляд, зображений на рис. 8.29, причому

$$W_1(p) = R_1(p)/Q_1(p);$$

$$W_m = W_m(A, p) = R_2(A, p)/Q_2(A, p),$$

де A_0 — амплітуда вимушених коливань, яку треба визначити.

Зовнішня дія має вигляд $f(t) = A_0 \sin \omega_0 t$. Знаходимо розв'язок для $x(t)$ у формі

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_0 t - \varphi_0). \quad (8.87)$$

Подамо зовнішню дію $f(t)$ у такому вигляді

$$f(t) = A_0 \sin \omega_0 t = A_0 \sin [(\omega_0 t - \varphi_0) + \varphi_0] =$$

$$= A_0 \sin(\omega_0 t - \varphi_1) \cos \varphi_r + A_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_1) \sin \varphi_r. \quad (8.88)$$

З рівняння (8.87) дістанемо

$$\sin(\omega_0 t - \varphi_r) = \varepsilon(t)/A_r. \quad (8.89)$$

Здиференціювавши (8.89), визначимо

$$\cos(\omega_0 t - \varphi_r) = p\varepsilon/A_r\omega_0. \quad (8.90)$$

Підставимо значення $\sin(\omega_0 t - \varphi_r)$ і $\cos(\omega_0 t - \varphi_r)$ в (8.88), тоді

$$f(t) = (A_0 \cos \varphi_1) \varepsilon(t)/A_r + (A_0 \sin \varphi_1) p\varepsilon/A_r\omega_0. \quad (8.91)$$

Згідно зі структурною схемою, наведеною на рис. 8.29,

$$\frac{\varepsilon(t)}{f(t)} = \frac{1}{1 + W_1(p)W_{11}(A_r, p)} \approx \frac{Q_1(p)Q_2(A_r, p)}{Q_1(p)Q_2(A_r, p) + R_1(p)R_2(A_r, p)},$$

звідки

$$\varepsilon(t)[Q_1(p)Q_2(A_r, p) + R_1(p)R_2(A_r, p)] - f(t)Q_1(p)Q_2(A_r, p) = 0. \quad (8.92)$$

Після підстановки в це рівняння значення $f(t)$ за формулою (8.91) отримаємо

$$\begin{aligned} & \varepsilon(t) \cdot R_1(p)R_2(A_r, p) + Q_1(p)Q_2(A_r, p) \times \\ & \times \left[1 - \frac{A_0 \cos \varphi_r}{A_r} - \frac{pA_0 \sin \varphi_r}{A_r\omega_0} \right] = 0. \end{aligned} \quad (8.93)$$

Рівняння (8.93) є однорідним диференціальним рівнянням, коефіцієнти якого залежать від невідомих величин A_r і φ_r , а також відомих величин A_0 , ω_0 і параметрів системи.

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{aligned} P(A_r, p) &= R_1(p)R_2(A_r, p) + Q_1(p)Q_2(A_r, p) \times \\ & \times \left[1 - \frac{A_0 \cos \varphi_r}{A_r} - \frac{pA_0 \sin \varphi_r}{A_r\omega_0} \right] = 0. \end{aligned}$$

У системі встановлюються коливання з частотою ω_r , якщо це рівняння справеделиться при $p = j\omega_r$, тобто якщо виконується умова

$$R_1(j\omega_r)R_2(A_r, j\omega_r) + Q_1(j\omega_r)Q_2(A_r, j\omega_r) \times$$

$$\times \left[1 - \frac{A_1 \cos \varphi_1}{A_1} - j \frac{A_0 \sin \varphi_1}{A_1} \right] = 0. \quad (8.94)$$

Рівність (8.94) можлива, якщо дорівнюють нулю її дійсна і уявна частини. Тоді, подавши цю рівність у вигляді

$$X(A_0, \omega_0, A_1, \varphi_1) + jY(A_0, \omega_0, A_1, \varphi_1) = 0,$$

дістанемо два рівняння з двома невідомими A_1 і φ_1 .

$$X(A_0, \omega_0, A_1, \varphi_1) = 0; \quad (8.95)$$

$$Y(A_0, \omega_0, A_1, \varphi_1) = 0. \quad (8.96)$$

Якщо система рівнянь (8.95) і (8.96) має дійсні додатні розв'язки, то умови захоплення виконуються і автоколивання у системі будуть притуплені.

З рівнянь (8.95) і (8.96) можна знайти залежності A_1 і φ_1 від амплітуди A_0 і частоти ω_0 вхідного сигналу, а також від параметрів системи. Найбільший інтерес становить залежність мінімального значення амплітуди $A_{\text{пгм}}$, з якого ще виконується умова захоплення, від частоти ω_0 . Залежність $A_{\text{пгм}} = f(\omega_0)$ називається *пороговою частотною характеристикою*.

Умови захоплення дають змогу визначити, якими зовнішніми діями можна придушити небажані автоколивання і вибрати такт з них, за яких у системі встановлюються вимушені коливання з допустимими амплітудою і частотою.

Контрольні запитання та завдання

1. Що розуміють під нелінійною системою? У чому полягає принципова різниця між лінійними і нелінійними системами?
2. Перелічіть основні типи нелінійні характеристики і наведіть їх математичний опис.
3. Яка структурна схема нелінійної системи називається найпростішою? Як приклади до найпростішої структурної схеми будь-якої замкнутої нелінійної САК, що містить одну нелінійну ланку?
4. Дайте визначення таким поняттям: фазовий простір, зображуюча точка, фазова траєкторія.
5. Що таке автоколивання?
6. Як побудувати фазовий портрет нелінійної системи другого порядку?

7. Вкажіть типи особливих ліній на фазовій площині.
8. Як за фазовим портретом нелінійної системи можна визначити показники якості лінійних процесів?
9. Сформулюйте теорему Ляпунова про стійкість нелінійних систем і наведіть її геометричну інтерпретацію.
10. Як дослідити стійкість нелінійної системи методом Ляпунова?
11. Дайте визначення поняттю абсолютної стійкості.
12. Сформулюйте умови абсолютної стійкості та поясніть, як визначити абсолютну стійкість за методом Попова.
13. У чому полягає суть точкового поротворення Андронова?
14. Що означає гармонічна лінеаризація нелінійних характеристик і як вона виконується? У чому полягає принципова різниця між гармонічною і звичайною лінеаризаціями існують нелінійностей?
15. Який вигляд мають гармонічно лінеаризовані передаточні функції нелінійних ланок з однозначними неперними характеристиками, з неоднозначними неперними характеристиками, з характеристиками, несиметричними відносно початку координат?
16. Як визначити параметри автокопівання методом Гольдфарба?
17. Яким чином можна поширити метод Гольдфарба на випадок, коли в системі дві нелінійні ланки, розділені нерозривними лінійними ланками?
18. Як дослідити стійкість і автокопівання нелінійної системи методом Попова?
19. Скільки параметрів треба визначити при дослідженні автокопівання у системі з нелінійним елементом, що має несиметричну характеристику? Як скласти рівняння для визначення цих параметрів?
20. Як визначити параметри автокопівання у нелінійних системах із постійною зовнішньою дією?
21. Як визначити параметри вимушених коливань у нелінійних системах?

9.1

Оцінка якості нелінійних САК

Для оцінки якості перехідних процесів у нелінійних САК можна використовувати показники: амплітудні показники якості лійійних систем, а саме тривалість перехідного процесу (терміновість регулювання), перерегулювання або максимальне відхилення в перехідний період, коливаньності перехідного процесу. Особливість нелінійних систем виявляється в тому, що показники якості залежать від величини зовнішньої дії. Тому для повної оцінки якості необхідно виконати розрахунки перехідних процесів для всіх можливих реальних значень вхідних сигналів і збурюючих дій. Крім того, важливим є визначення умов виникнення автоколивань і обчислення їхніх параметрів.

Набагато, але досить точну оцінку якості нелінійної системи можна дістати без розрахунків перехідних процесів. Для цього, зокрема, використовується показник коливальності.

Розглянемо нелінійну систему, структурна схема якої зведена до найпростішої (див. рис. 8.2). Вона складається з лінійної частини, що має частотну передаточну функцію $W_c(j\omega)$, і нелінійної ланки з нелінійною статичною характеристикою $\phi(\varepsilon)$. Застосувавши гармонічну лінеаризацію, запишемо передаточну функцію нелінійної ланки у вигляді

$$W_{nl}(\sigma) = k_1(\sigma) + jk_2(\sigma).$$

Як і у лінійних системах, показником коливальності для гармонічно лінеаризованої системи є максимальне значення ординати амплітудної характеристики замкнутої системи M_{nl} за початкових ординат, що дорівнює одиниці, тобто

$$M = |W_c(j\omega, \pi)|_{nl}.$$

де $W_c(j\omega, \alpha)$ — частотна передаточна функція замкнутої системи.

При гармонічній лінеаризації використовуються так звані нормовані коефіцієнти $k_n(\alpha)$ і $k'_n(\alpha)$, де $\alpha = \sigma/\varepsilon$ — відносна амплітуда; ε — характерне значення ε на статичній характеристиці нелінійної ланки (див. рис. 8.1).

Значення нормованих коефіцієнтів гармонічної лінеаризації для типових нелінійних ланок, статичні характеристики яких зображено на рис. 8.1, визначаються за такими формулами:

характеристика із зоною нечутливості (див. рис. 8.1, а)

$$\begin{aligned} k_n(\alpha) &= 0 \quad \text{при} \quad \alpha < 1; \\ \left\{ k_n(\alpha) &= k_n \left[1 - \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{1}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2} \right) \right] \right. \quad \text{при} \quad \alpha \geq 1; \\ k_n &= \lg \alpha; \end{aligned} \quad (9.1)$$

характеристика із зоною насичення (див. рис. 8.1, б)

$$\begin{aligned} k_n(\alpha) &= k_n \quad \text{при} \quad \alpha < 1, \\ \left\{ k_n(\alpha) &= k_n \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{1}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2} \right) \right. \quad \text{при} \quad \alpha \geq 1; \\ k_n &= \lg \alpha; \end{aligned} \quad (9.2)$$

релейна характеристика (див. рис. 8.1, в)

$$\begin{aligned} \left\{ k_n(\alpha) &= k_n / \alpha; \right. \\ k_n &= 4b/\pi; \end{aligned} \quad (9.3)$$

характеристика з люфтом (див. рис. 8.1, г)

$$\begin{aligned} \left\{ k_n(\alpha) &= \frac{k_n}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2}{\alpha} \right) + 2 \left(1 - \frac{2}{\alpha} \right) \frac{\sqrt{\alpha - 1}}{\alpha} \right]; \right. \\ k'_n(\alpha) &= -\frac{4k_n}{\pi} \frac{\alpha - 1}{\alpha^2}; \\ k_n &= \lg \alpha; \end{aligned} \quad (9.4)$$

релейна характеристика із зниклою нечутливістю (див. рис. 8.1, d)

$$\begin{cases} k_r(\alpha) = 0 & \text{при } \alpha < 1; \\ k_r'(\alpha) = k_n \frac{2\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2} & \text{при } \alpha \geq 1; \\ k_n = 2b/\pi c & \text{при } \alpha \geq 1; \end{cases} \quad (9.5)$$

характеристика реального релейного елемента (див. рис. 8.1, e)

$$\begin{cases} k_r(\alpha) = k_n \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2}; \\ k_r'(\alpha) = -k_n/\alpha^3; \\ k_n = 4b/\pi c. \end{cases} \quad (9.6)$$

Передаточна функція нелінійної ланки при використанні нормованих коефіцієнтів гармонічної лінеаризації

$$W_{\alpha}(\alpha) = k_r(\alpha) + jk_r'(\alpha). \quad (9.7)$$

Відповідно до структурної схеми, наведеної на рис. 8.2, запишемо

$$W_s(j\omega, \alpha) = \frac{W_r(j\omega)W_n(\alpha)}{1 + W_r(j\omega)W_n(\alpha)}.$$

Якщо ввести поняття оберненої передаточної функції нелінійної ланки

$$Z(\alpha) = 1/W_n(\alpha), \quad (9.8)$$

то вираз для $W_s(j\omega, \alpha)$ можна записати так:

$$W_s(j\omega, \alpha) = \frac{W_r(j\omega)}{Z(\alpha) + W_r(j\omega)}.$$

Передаточні функції $W_s(j\omega)$ і $Z(\alpha)$ подано у вигляді суми лінійної та уявної частини:

$$\begin{aligned} W_r(j\omega) &= U(\omega) + jV(\omega); \\ Z(\alpha) &= r + jr'(\alpha). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Тоді показник керованості M запишемо у вигляді

$$M = W_1(j\omega, \alpha) = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{(r + U)^2 + (r' + V)^2}}.$$

Піднесемо в квадрат ліву і праву частини цієї рівності:

$$M^2(r + U)^2 + M^2(r' + V)^2 = U^2 + V^2;$$

$$(M^2 - 1)U^2 + (M^2 - 1)V^2 + M^2r^2 - 2M^2rU + M^2r'^2 + 2M^2r'V = 0.$$

Поділимо всі члени останньої рівності на $M^2 - 1$, а також додамо і віднімемо член $M^2/(M^2 - 1)^2$. Тоді після деяких математичних перетворень дістанемо

$$\left(U + \frac{rM^2}{M^2 - 1}\right)^2 + \left(V + \frac{r'M^2}{M^2 - 1}\right)^2 = \frac{(r^2 + r'^2)M^2}{(M^2 - 1)^2} \quad (9.10)$$

або

$$(U - U_0)^2 + (V - V_0)^2 = R^2. \quad (9.11)$$

Звідси випливає, що для заданих сталих значень M і α рівнянню (9.11) у комплексній площині відповідає коло з радіусом R і координатами центра (U_0, jV_0) . Координати центра і радіуса дістанемо безпосередньо з порівняння виразів (9.10) і (9.11). Їх можна також знайти як функції нормованих коефіцієнтів гармонічної лінеаризації, визначивши r і r' через k і k' за допомогою виразів (9.7), (9.8) і (9.9). У результаті

$$U_0 = -\frac{rM^2}{M^2 - 1} = -\frac{k_r}{k_r^2 + k_i^2} \frac{M^2}{M^2 - 1};$$

$$V_0 = -\frac{r'M^2}{M^2 - 1} = -\frac{k'_r}{k_r^2 + k_i^2} \frac{M^2}{M^2 - 1};$$

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2} \frac{M}{M^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{k_r^2 + k_i^2}} \frac{M}{M^2 - 1}$$

Якщо прийняти показник керованості незмінним ($M = \text{const}$), то для різних значень відносної амплитуди дістанемо сім'ю кіл. Заборонена зона, що відповідає бажаному показнику керованості, створюється лініями, дотичними до цих кіл (рис. 9.1, а).

У найпростішому випадку, коли нелинійна характеристика одновимірна і симетрична відносно початку координат (непарна), кое-

коэффициент k_r дорівнює нулю, отже, $r' = 0$ і $V_n = 0$. Тоді радіус кола, що відповідає $M = \cos \varphi$, обчислюється за формулою

$$R = \frac{1}{k_r} \frac{M}{M^2 - 1}.$$

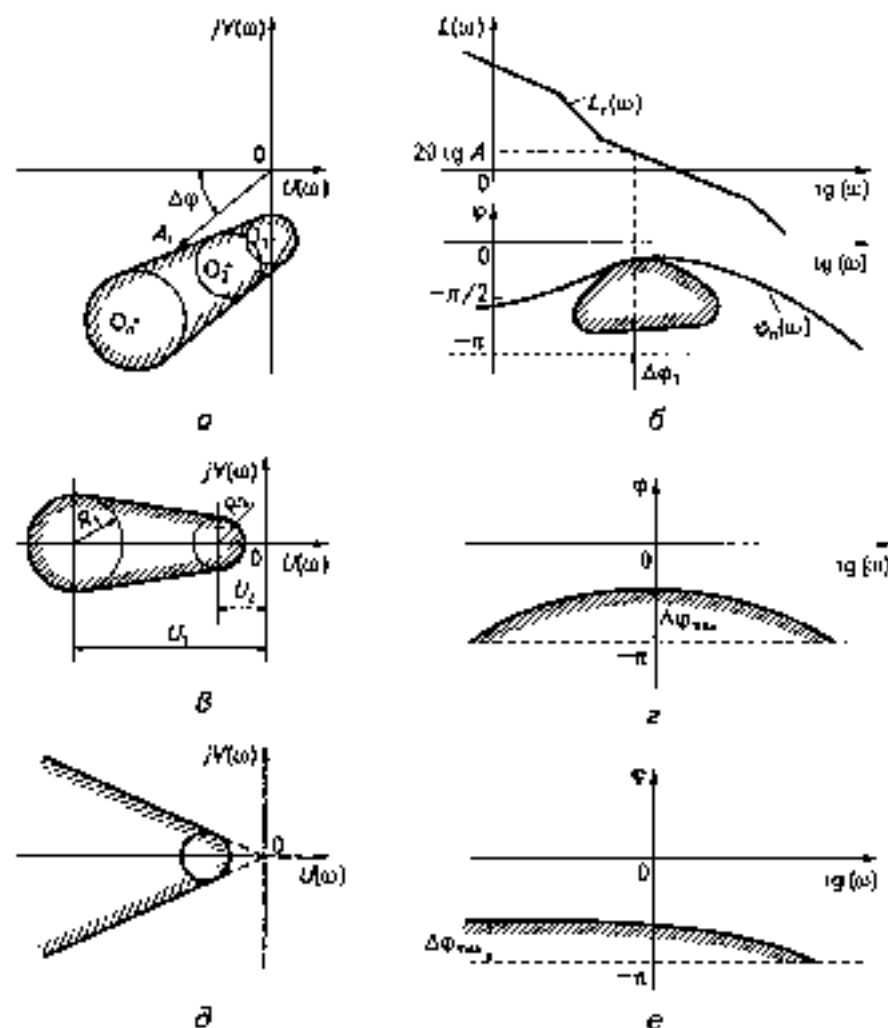


Рис. 9.1

а координатами центра $\in (U_0, j_0)$, де

$$U_0 = -\frac{1}{k_1} \frac{M^2}{M^2 - 1}.$$

Для визначення показника коливальності необхідно на площині $U(\omega), jV(\omega)$ побудувати АФХ лінійної частини $W_1(j\omega)$ і заборонені зони для різних $M = \text{const}$. Показник коливальності визначається нелінійною M -її забороненою зоною, до якої дотикається характеристика $W_1(j\omega)$, не заходячи всередину зони. Нелінійні властивості системи виявляються в розширенні та зменшенні заборонених зон для $M = \text{const}$ порівняно з лінійними системами за рахунок змінювання коефіцієнтів гармонічної лінеаризації у разі зміни амплітуди коливань на вході нелінійної ланки.

При використанні логарифмічних характеристик бувають заборонені зони для ЛФХ лінійної частини системи. Для цього спочатку будують ЛАХ лінійної частини системи $L_1(\omega)$ і заборонена зона для бажаного показника коливальності M в площині $U(\omega), jV(\omega)$. Потім задають яке-небудь значення амплітуди $A(\omega)$ і, користуючись ним жею забороненої зоною в площині $U(\omega), jV(\omega)$, визначають запас за фазою $\Delta\varphi$, що відповідає амплітуді $A(\omega)$. За амплітудою $A(\omega)$ визначають логарифмічну амплітуду $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ і для неї на графіку $\varphi(\omega)$ відкакують значення запасу за фазою $\Delta\varphi$. Послідовність побудови однієї точки забороненої зони для ЛФХ, що відповідає амплітуді A_1 , показано на рис. 9.1, а і б. Для забезпечення заданого показника коливальності ЛФХ не повинна заходити у заборонену зону.

Якщо нелінійна характеристика однозначна і непарно-симетрична, то побудова забороненої зони в комплексній і логарифмічній площинах істотно спрощується. Нехай при змінюванні амплітуди коефіцієнт $k_1(\alpha)$ змінюється в межах від $k_{1\min}(\alpha)$ до $k_{1\max}(\alpha)$. Тоді, для того щоб дістати заборонену зону, достатньо побудувати кола з радіусами

$$R_1 = \frac{1}{k_{1\min}} \frac{M^2}{M^2 - 1}; \quad R_2 = \frac{1}{k_{1\max}} \frac{M^2}{M^2 - 1}$$

і центрами в точках $(U_1, j0)$ і $(U_2, j0)$, де

$$U_1 = -\frac{1}{k_{1\min}} \frac{M^2}{M^2 - 1}, \quad U_2 = -\frac{1}{k_{1\max}} \frac{M^2}{M^2 - 1},$$

а потім провести загальні дотичні до цих кіл (рис. 9.1, в).

Якщо коефіцієнт гармонічної лінеаризації змінюється в межах $0 \leq k_r(\alpha) \leq k_{r, \max}(\alpha)$, то заборонена зона буде незамкнутою, оскільки при $k_r(\alpha) = 0$ $U_0 = \infty$ і $R = \infty$. Вона обмежується другою кола, що відповідає $k_{r, \max}$, і проведеннями до цієї дотичними через початок координат (рис. 9.1, а).

Заборонені зони для ЛФХ, що відповідають розглянутим випадкам, наведено на рис. 9.1, з і в. Для цих нелінійностей максимальний запас за фазою $\Delta\varphi_{\max}$ не залежить від значення відносної амплитуди α і становить

$$\Delta\varphi_{\max} = \arcsin \frac{1}{M}, \quad (9.12)$$

тобто визначається лише показником коливальності.

Для побудови заборонених зон на логарифмічній площині широтно-полосних парно-симетричних нелінійностей зручно користуватися кривими, наведеним на рис. 9.2, що зображують залежність запасу за фазою $\Delta\varphi$ від модуля в децибелах для різних значень показника коливальності.

Розглянута методика оцінки якості дає змогу визначити показник коливальності нелінійної системи. Її доцільно використовувати при синтезі лінійних коректуючих пристроїв у нелінійних системах (див п. 9.3). Більш повне уявлення про динаміку нелінійної системи дає *діаграма якості* Є. П. Попова. Для пояснення її суті розглянемо коливальний перехідний процес, який у першому наближенні можна описати збіжною або розбіжною синусоїдами.

У лінійних системах збіжний коливальний перехідний процес описується рівнянням $x = A_0 e^{-\xi \omega t} \sin \omega t$, де $-\xi \pm j\omega$ — пара комплексно-спряжених коренів, що визначають основну частину перехідного процесу. Для нелінійної системи, яка задовольняє умову фільтрації, можна вважати, що сигнал на виході нелінійної ланки становить

$$x = A \sin \omega t = A \sin \varphi, \quad (9.13)$$

причому показник згладження ξ і частота ω повільно змінюються з часом так, що

$$dA/dt = A\xi; \quad d\varphi/dt = \omega. \quad (9.14)$$

Оскільки змінні є A і φ , то з (9.13) дістаємо

$$\frac{dc}{dt} = A\omega \cos \omega t + \frac{dA}{dt} \sin \omega t,$$

або з урахуванням (9.14)

$$dc/dt = p\epsilon - A\omega \cos \varphi + A\xi \sin \varphi. \quad (9.15)$$

З виразу (9.15) визначимо

$$\cos \varphi = \frac{p\epsilon}{A\omega} - \frac{\xi \sin \varphi}{\omega},$$

але оскільки з (9.13) маємо

$$\sin \varphi = \epsilon/A, \quad (9.16)$$

то

$$\cos \varphi = \frac{p\epsilon}{A\omega} - \frac{\xi\epsilon}{A\omega} = (p - \xi) \frac{\epsilon}{A\omega}, \quad (9.17)$$

Згідно з виразом (8.53) сигнал на виході нелінійної ланки обчислюється за формулою

$$u = A_1 \sin \varphi + B_1 \cos \varphi,$$

або, якщо ввести коефіцієнти гармонічної лінеаризації k_1 і k'_1 ,

$$u = k_1 A \sin \varphi + k'_1 A \cos \varphi,$$

і з урахуванням (9.16) і (9.17)

$$u = F(\epsilon, p, \xi) = \left(k_1 + k'_1 \frac{p - \xi}{\omega} \right) \epsilon,$$

де

$$k_1 = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(\sin \varphi, A\omega \cos \varphi + A\xi \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi;$$

$$k'_1 = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \varphi, A\omega \cos \varphi + A\xi \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi.$$

З останніх виразів видно, що коефіцієнти гармонічної лінеаризації і передаточна функція нелінійної ланки

$$W'_{in}(A, \omega, \xi) = k_1 + k_1' \frac{p - \xi}{\omega} \quad (9.18)$$

залежать від трьох невіданих параметрів A , ω , ξ .

Розглянемо нелінійну систему, структурну схему якої наведено на рис. 9.20, приймавши $W'(p) = R(p)Q(p)$ і $W'_{in}(A, \omega, \xi)$ відповідно до виразу (9.18).

Характеристичне рівняння у цьому разі

$$D(p) - Q(p) + R(p) \left(k_1 + k_1' \frac{p - \xi}{\omega} \right) = 0.$$

Оскільки припускається, що процес збіжний або розбіжний еквівалентний, то справедливою буде підстановка $p = \xi + j\omega$, причому ξ і ω — не сталі величини, а функції, які повільно змінюються. В цьому разі комплексне характеристичне рівняння матиме вигляд

$$D(\xi + j\omega, \xi, A) = Q(\xi + j\omega) + R(\xi + j\omega)(k_1 + jk_1') = 0. \quad (9.19)$$

У рівняннях (9.19) входять три невідомі величини ξ , ω і A (від A залежать коефіцієнти k_1 і k_1'). Якщо прирівняти нулю дійсну і уявну частини рівняння (9.19), то дістанемо два рівняння, з яких знаходимо залежності $\xi = \xi(A)$ і $\omega = \omega(A)$. Потім, використовуючи рівняння (9.14) за початкових умов $t = 0$, $A = A_0$, $\varphi = \varphi_0$, знаходимо

$$t = \int_{A_0}^A \frac{dA}{A\xi(A)}; \quad (9.20)$$

$$\varphi = \int_0^t \omega(A) dt = \varphi_0. \quad (9.21)$$

З виразу (9.20) визначаємо $A(t)$, а з виразу (9.21) після підстановки $A(t)$ в $\omega(A) = \varphi(t)$. Отже, можна зліпити зміну $\varepsilon = A(t)$ як $\varphi(t)$, які визначає якість переходного процесу.

Якість перехідних процесів можна оцінити (без вилітального розв'язування, якщо скористатися діаграмою якості Попова. Припустимо, що серед параметрів системи є один, що змінюється. Звичайно — це коефіцієнт підсилення розімкнутої системи K . Тоді рівняння (9.19) можна записати у вигляді

$$D(j\omega, \xi, A, K) = X(j\omega, \xi, A, K) + jY(j\omega, \xi, A, K)$$

і, прирівнюючи до нуля дійсну і уявну частини, отримати систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} X(\omega, \xi, A, K) = 0; \\ Y(\omega, \xi, A, K) = 0. \end{cases} \quad (9.22)$$

Розв'язавши систему рівнянь (9.22) відносно ω і ξ , дістанемо

$$\xi = f_1(K, A), \quad \omega = f_2(K, A).$$

Прийнявши $\xi = \text{const}$ і $\omega = \text{const}$, на площині параметрів K, A побудуємо лінії однакових значень ω і ξ (рис. 9.3, а і б), які називають *діаграмами якості*.

При $\xi = 0$ затухання відсутнє. Це відповідає автоколиванням. Тому лінія $\xi = 0$ розділяє діаграму якості на дві зони — із затухаючими (зона $\xi < 0$) та розбіжними (зона $\xi > 0$) коливаннями.

За діаграмою якості можна визначити умови виникнення автоколивань у системі та знайти їхні параметри. Наприклад, якщо змінюється параметр $K = K_1 < K_{\text{пр}}$, то за будь-яких початкових умов за амплітудою ($A = A_0$) автоколивання неможливі і перехідний процес згасне. Дійсно, за початкових умов $A = A_0$ або $A = A_0'$ стави системи визначаються точками A' або A'' (рис. 9.3, а), які відповідають харак-

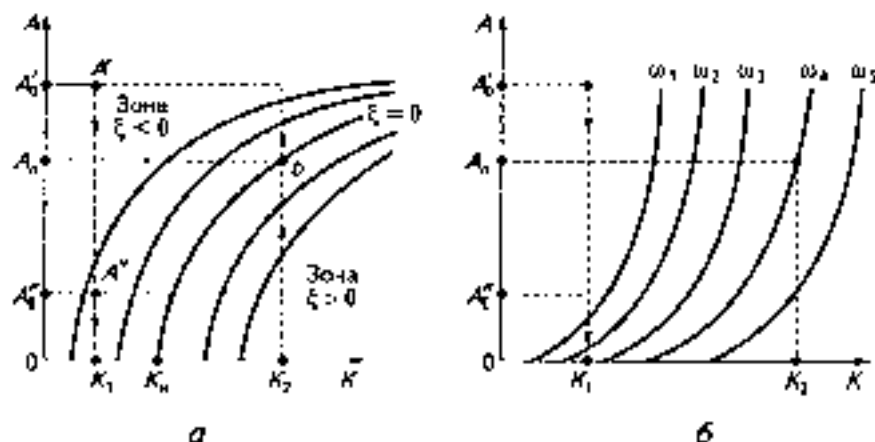


Рис. 9.3

характеристикам з $\xi < 0$. Якщо коливання затухають, то точка, що визначає стан системи, переміщується в зоні характеристик $\xi < 0$ і амплітуда зменшується до $A = 0$. Частота при цьому відповідно до рис. 9.3, б змінюється від початкової ω_0 до $\omega_2 < \omega < \omega_1$. Якщо ж змінюється параметр $K = K_2 > K_{\text{н}}$, то за початкового значення амплітуди A_0' коливання затухають, а при A_0'' — стають розбіжними, тобто в обох випадках точка, що визначає стан системи, потрапляє в точку b на характеристиці $\xi = 0$ і в системі встановлюються автоколивання з амплітудою A_n . Частота автоколивань визначається за діаграмою, наведеною на рис. 9.3, б і становить ω_2 .

Точно визначити показники якості можна розрахувавши перехідні процеси для різних входніх і збурюючих дій. Ці розрахунки виконуються на ЕОМ, причому суттєві значення має спосіб введення в ЕОМ інформації стосовно нелінійності.

Нелінійні характеристики можна задавати трьома способами: аналітичним, графічним і табличним.

Якщо нелінійність задано аналітично, то в робочу частину програми безпосередньо вводиться аналітична залежність, що описує нелінійність. При графічному або табличному способах в ЕОМ вводиться таблиця дискретних значень нелінійної залежності, а проміжні значення обчислюються за допомогою різних методів інтерполяції.

9.2

Загальні відомості про методи синтезу коректувальних пристроїв у нелинійних системах

У загальному розумінні синтез — це процес розробки САК, у ході якого за заданими показниками якості визначають оптимальний варіант структури системи та параметри її ланок. Синтез у такій загальній постановці є досить складною задачею і може мати багато розв'язків.

Синтез нелінійних систем автоматичного керування електроприводами здебільшого це має такого загального характеру. Звичайно, частина елементів електропривода (електродвигун, перетворювач та інші елементи силового кола) визначається вимогами до виробничо-

го механізму (потрібна потужність, моменти, швидкість тощо) і становить незмінювану частину системи. Синтез у цьому разі зводиться до розрахунку параметрів коректувальних пристроїв (змінюваної частини системи), які додатково вводяться в систему для забезпечення потрібних показників якості.

Корекція нелінійних систем має свої особливості порівняно з корекцією лінійних систем. Зокрема характер перехідних процесів нелінійних систем визначається не тільки їх структурою і параметрами, а й початковими умовами, а також місцем прикладання, величиною і формою зовнішніх сил. Принятними для роботи в реальних умовах є два стани нелінійних систем: статичний установився режим і злитоконстання.

Під час корекції нелінійних систем часто виникає задача підвищення частоти і зниження амплітуди автоколивань або повного їх усунення. Цю задачу в деяких випадках можна розв'язати за допомогою знання параметрів лінійної частини (див. розд. 8, п. 8.10), а також за рахунок введення лінійних коректувальних пристроїв, що змінюють у бажаному напрямку передаточну функцію лінійної частини системи.

Коректувальні пристрої в нелінійних системах можуть бути *лінійними* або *нелінійними*. Визначення виду, місця введення в систему і параметрів коректувального пристрою становить задачу синтезу.

Можливості нелінійної корекції набагато більші, ніж лінійної, бо самі лінійні системи є окремим випадком нелінійних. Одним з найбільш очевидних випадків, коли доцільно застосовувати нелінійні коректувальні ланки, є компенсація небажаних нелінійностей. Справді, в багатьох нелінійних системах можуть бути такі нелінійності, як зони нечутливості, обмеження, сузе тертя тощо. Ці нелінійності часто роблять неможливим забезпечення потрібних показників якості системи, тому виникає необхідність компенсувати їх спеціальними підібраними нелінійностями.

Іншим способом усунення негативного впливу нелінійностей є так звана вібраційна лінеаризація. Її суть полягає у згладжуванні нелінійностей за допомогою високочастотного сигналу.

Можливості нелінійної корекції далеко не вичерпуються компенсацією небажаних нелінійностей. У багатьох випадках нелінійну корекцію застосовують для того, щоб дістати потрібні нелінійні закони регулювання, що значно розширює її сферу застосування.

Є. П. Попов надав таку класифікацію нелінійних законів регулювання: функціональні, логічні, оптимізуючі, параметричні.

- *Функціональні нелінійні закони* називається закон регулювання, за якого регулювальна дія на об'єкт має вигляд нелінійної функції від відхилення регульованої величини. Нелінійне формулювання функціонального закону регулювання може бути пов'язане не тільки з зміною параметрів системи, а й зі зміною структури.

- *Логічні нелінійні закони* реалізуються не функціональними пристроями, а відносно складними, логічними, які функціонують згідно із закладеним у них критерієм.

- *Оптимізуючі нелінійні закони* призначені для забезпечення оптимальних процесів регулювання. Методи оптимізації систем передбачають, як правило, застосування нелінійних законів керування.

- *Параметричні нелінійні закони регулювання* є нелінійними функціями деяких координат, в яких задається параметрична програма.

Зараз розробляються і широко застосовуються в інженерній практиці різні методи синтезу, з допомогою яких розв'язуються окремо, хоч і досить поширені задачі синтезу коректувальних пристроїв нелінійних систем.

Це — методи компенсації нелінійностей, лінеаризація нелінійних систем високочастотним сигналом, застосування лінійних і нелінійних коректувальних пристроїв для забезпечення потрібних показників якості та ін. Далі розглядатимемо методи синтезу, що найчастіше застосовуються у проектуванні систем керування електронними кодами.

9.3

Синтез лінійних коректувальних пристроїв у нелінійних системах методом ЛАХ

Найбільш інтенсивно використовувати ЛАХ при синтезі лінійних коректувальних пристроїв у нелінійних системах, якщо внаслідок корекції необхідно забезпечити затухаючий перехідний процес із заданим показником кінтальності Най

простіше завдання синтезу розв'язується в системах з мінімально-фазовими лінійними ланками і однозначними статичними нелінійностями. При цьому слід враховувати, що у разі використання лінійних коректувальних пристроїв забезпечення певного значення показника кінливальності M або необхідного запasu за фазою $\Delta\varphi$ буде можливим лише для нелінійностей, в яких нормований коефіцієнт гармонічної лінеаризації змінюється в межах $0 \leq k_1(\alpha) \leq k_{1,\max}(\alpha)$. До таких належать нелінійності, що мають характеристики із зоною нечутливості (див. рис. 8.1, а), зоною насичення (див. рис. 8.1, б), релейну характеристику із зоною нечутливості (див. рис. 8.1, в) і деякі інші. Якщо нелінійність у системі така, що нормований коефіцієнт гармонічної лінеаризації змінюється в межах $k_{1,\min}(\alpha) \leq k_1(\alpha) \leq \infty$ або $0 < k_1(\alpha) < \infty$, то за рахунок лінійної корекції не можна дістати затухаючий перехідний процес. Так, якщо в замкнутому контурі нелінійної системи є ланка з ідеальною релейною характеристикою, для якої $0 \leq k_1(\alpha) \leq \infty$, то в системі вище другого порядку завжди встановлюються автоколивання.

Порядок синтезу лінійних коректувальних ланок у нелінійних системах зберігається таким самим, як і в лінійних, хоча нелінійні ланки дозволяють менші особливості побудови логарифмічних характеристик.

Перш ніж будувати характеристики, виконується гармонічна лінеаризація нелінійної ланки. При цьому слід скористатися приведеними нормованими коефіцієнтами гармонічної лінеаризації, тобто коефіцієнти гармонічної лінеаризації слід подати у вигляді

$$k_1(\alpha) = k_n k_{1,n}(\alpha),$$

де $k_n = \cos \varphi_c$ — коефіцієнт передачі нелінійної ланки, що визначається за формулами, наведеними в п. 9.1 для різних видів нелінійних характеристик; $k_{1,n}(\alpha)$ — приведені нормовані коефіцієнти гармонічної лінеаризації.

Коефіцієнт k_n при побудові ЛАХ відносять до лінійної частини системи і передаточну функцію розімкнутої системи записують так:

$$W(p, \alpha) = k_n k_{1,n}(\alpha) W_{\text{лн}}(p) = k_{\text{лн}}(\alpha) W_{\text{лн}}(p),$$

де $W_{\text{лн}}(p)$ — передаточна функція приведеної лінійної частини.

Приведення коефіцієнта гармонічної лінеаризації здійснюється за умови $k_{1,\max}(\alpha) = 1$. В цьому разі значно спрощується побудова забороненої зони для ЛФХ при синтезі коректувальної ланки.

Синтез лінійної коректувальної ланки виконується в такій послідовності.

1. Будується асимптотична ЛАХ приведеної лінійної частини вихідної системи за передаточною функцією $W_{\text{дн}}(p) = k_{\text{дн}} W_{\text{л}}(p)$.
2. Будується бажана ЛАХ приведеної лінійної частини згідно з рекомендаціями теорії лінійних систем. При бажанні можна вибрати типові ЛАХ 3 або 4 з табл. 6.2. ЛАХ 5 і 6, що відповідають системам з астатизмом другого порядку, вибирати не рекомендується. Спраць, якщо нелінійна характеристика така, що $0 \leq k_1(\alpha) \leq \infty$, то заборонена зона для ЛФХ має вигляд, зображений на рис. 9.1, а. В той самий час фазова характеристика астатичних систем другого порядку при зменшенні частоти наближується до $\varphi = -\pi$, тому не можна забезпечити потрібний запас за фазою за будь-яких значень показника коливальності $M < \infty$.

З теорії лінійних систем відомо, що достатній запас за фазою забезпечується в разі, якщо нахил бажаної ЛАХ на частоті зрізу становитиме -20 дБ/дек і довжина середньочастотної частини ЛАХ h дорівнюватиме $\omega_1/\omega_2 = 10$. Збільшення довжини $h_1 = \omega_1/\omega_2$ частини ЛАХ з нахилом -40 дБ/дек, що міститься ліворуч від частоти зрізу, зменшує запас за фазою. Тому на величину h_1 накладаються обмеження.

При виборі значень h і h_1 рекомендується користуватися $h, h_1(M)$ -кривими залежності h і h_1 від показника коливальності. Для типових ЛАХ 3 і 4 (див. гл. 6, табл. 6.2) це криві 3 і 4, наведені на рис. 9.4.

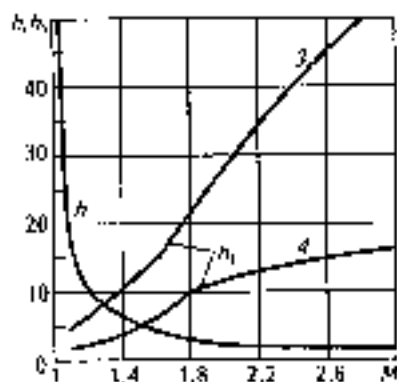


Рис. 9.4

Низькочастотна частина бажаної ЛАХ визначається згідно з вимогами щодо точності роботи системи в установившійся режимах. Вона має проходити через точку з координатами $L(\omega) = 20 \lg K, \lg \omega = 0$, де K — коефіцієнт передачі розімкнутої системи. Для нелінійних систем $K = k_{\text{дн}} k_{\text{н}}$.

3. Виходячи з бажаної ЛАХ і ЛАХ вихідної системи, визначається ЛАХ коректувальної ланки, вибирається її схема й обчислюються параметри методами, викладеними в теорії лінійних систем (див. гл. 6, п. 6.11).

4. Перевіряються результати синтезу. Для цього будується ЛФХ скорегованої системи в забороненій зоні, що відповідає бажаному показнику кочливості M . ЛФХ скорегованої системи не повинна заходити в заборонену зону.

□ **Приклад 9.1.** Виконати синтез послідовної коректувальної ланки і визначити коефіцієнт підсилення підсилювача слідкувальної системи, структурну схему якої подано на рис. 9.5, а. У системі є інерційний підсилювач зі сталою часу $T_v = 0,1$ с і нелінійною статичною характеристикою з насиченням. Параметри характеристики: $c = 0,5$ рад; $b = 100$ В. Підсилювач на структурній схемі подано у вигляді безінерційної нелінійної ланки $f(\sigma)$ і ітеріодичної ланки з передаточною функцією $k_n/(T_n p + 1)$. Дану ланку з редуктором описується передаточною функцією

$$W_r(p) = \frac{k_r}{p(T_n p + 1)}$$

з такими параметрами: $k_r = 0,15$ 1/В · с, $T_n = 0,1$ с.

Вимоги до скорегованої системи: усталена похибка за відсутності моменту навантаження має не перевищувати $\epsilon_{уст} = 0,002$ рад за максимальної швидкості змінювання заданої дії $d\theta_{zd}/dt = 0,2$ 1/с і прискорення $d^2\theta_{zd}/dt^2 = 0,1$ 1/с². Показник кочливості має не перевищувати 1,5.

Розв'язання. Спочатку визначимо коефіцієнт передачі розімкнутій системі, що забезпечує потрібну точність роботи в усталеному режимі:

$$K = \frac{d\theta_{zd}/dt}{\epsilon_{уст}} = \frac{0,2}{0,002} = 100 \text{ 1/с.}$$

Оскільки

$$K = k_n k_r k_v,$$

де k_v — коефіцієнт передачі нелінійної ланки на лінійній частині характеристики

$$k_v = \frac{b}{c} = \frac{100}{0,5} = 200 \text{ В/рад,}$$

то потрібний коефіцієнт підсилення підсилювача

$$k_n = \frac{K}{k_r k_v} = \frac{100}{200 \cdot 0,15} = 3,4.$$

Побудуємо генер. ЛАХ приведеній лінійної частини вихідної системи. Попередньо запишемо передаточну функцію розімкнутого системи, яка після гармонічної лінеаризації матиме вигляд

$$W(p, \alpha) = W_n(p)k_{\alpha}(\alpha),$$

де $W_n(p)$ — передаточна функція приведеній лінійної частини системи

$$W_n(p) = \frac{k_p k_v k}{p(T_p p + 1)(T_v p + 1)} \approx \frac{K}{p(T_p p + 1)(T_v p + 1)}; \quad (9.23)$$

$k_{\alpha}(\alpha)$ — приведений нормований коефіцієнт гармонічної лінеаризації.
Для величин ланки з наближенням згідно з (9.2)

$$k_{\alpha}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \left(\frac{1 - \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2} \right) \right].$$

ЛАХ вихідної системи $L_{\alpha}(\omega)$ будемо за передаточною функцією (9.23). Низькочастотна частина ЛАХ проходить з нахилом -20 дБ/дек через точку з координатами $L(\omega) = 20 \lg K = 20 \lg 100 = 40$ дБ; $\lg \omega = 0$. Знаходимо частоти сполучки асимптот

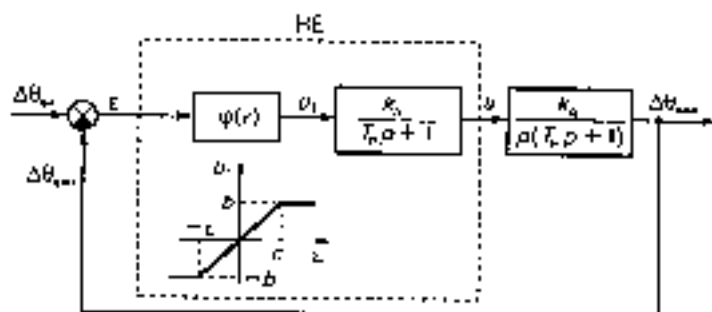
$$\omega_1 = 1/T_p = 1/0.1 = 10 \text{ с}^{-1}; \quad \lg \omega_1 = 1,$$

$$\omega_2 = 1/T_v = 1/0.01 = 100 \text{ с}^{-1}; \quad \lg \omega_2 = 2.$$

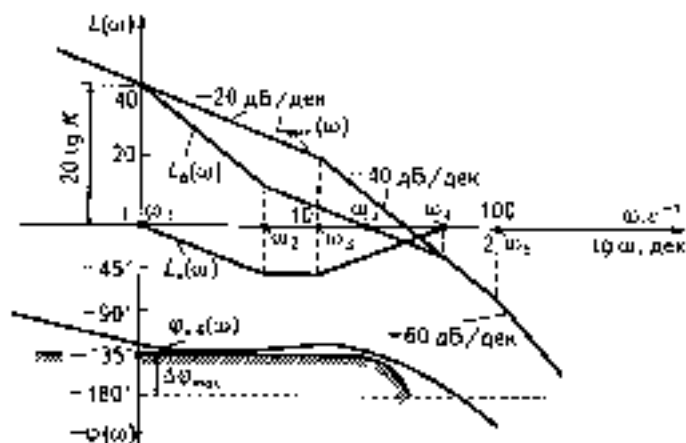
На кожній частоті сполучки нахил ЛАХ змінюється на -20 дБ/дек. Побудовану за введенням даними ЛАХ вихідної системи $L_{\alpha}(\omega)$ зображено на рис. 9.5, б.

Бажану ЛАХ $L_c(\omega)$ будемо так. Вибіримо $L_c(\omega)$ за типом 4 (див. гл. 6, табл. 6.2). Для створення коректуральної ланки протрузиємо сумішати $L_d(\omega) : L_{\alpha}(\omega)$ так, де це можливо. Високочастотну частину $L_d(\omega)$ зокремо ділянкою з нахилом -60 дБ/дек, сумістивши її з високочастотною частиною $L_{\alpha}(\omega)$. Ця частина ЛАХ міститися в зоні під'ємних децибелів ($L(\omega_2) = -20$ дБ) і практично не впливає на якість перехідного процесу. Для вибору довжини h середньочастотної частини ЛАХ з нахилом -20 дБ/дек і h_1 з нахилом -40 дБ/дек використаємо крит. h , h_1 (див. рис. 9.4). Для одного з можливих варіантів корекції можна прийняти $h = \omega_2/\omega_1 = 10$ і $h_1 = \omega_2/\omega_1 = 5$ при частотях сполучки $\omega_1 = 30 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = \omega_1/10 = 3 \text{ с}^{-1}$, $\omega_3 = \omega_2/5 = 0.6 \text{ с}^{-1}$. Згідно з кривими h , h_1 при $h = 10$ показник кінцевості M дорівнює 1.2, а при $h = 5$ за критерієм 4 — 1.5. Отже, бажаний ЛАХ $L_c(\omega)$ відносна показник кінцевості $1.2 < M < 1.5$, тобто вимоги до скорекційної системи задовольняються.

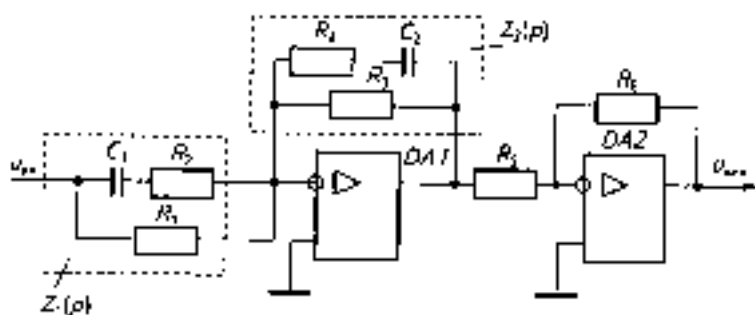
ЛАХ корекційної ланки $L_c(s)$ визначається як різниця $L_c(\omega) = L_{\alpha}(\omega)$. За ЛАХ $L_c(s)$ з вибраних параметрів коректуральної лан-



а



б



в
Рис. 9.5

зок (див. гл. 6, табл. 6.1) визначимо передаточну функцію коректуючої ланки

$$W_k(p) = \frac{(T_2 p + 1)(T_1 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}, \quad (9.24)$$

де $T_1 = 1/\omega_1 = 1$ с; $T_2 = 1/\omega_2 = 0.2$ с; $T_1 = 1/\omega_1 = 0.1$ с; $T_2 = 1/\omega_2 = 0.02$ с.

Передаточну функцію (9.24) можна реалізувати на операційному підсилювачі ОАУ (рис. 9.5, а).

Згідно з (6.31) передаточна функція операційного підсилювача

$$W_{\text{OA}}(p) = -Z_2(p)/Z_1(p).$$

Коефіцієнт підсилення операційного підсилювача A_{OA} дорівнює одиниці ($K_1 = K_0$). Він призначений тільки для зміни полярності вихідної напруги. Тому передаточна функція коректуючої ланки злинується у вигляді

$$W_k(p) = -Z_2(p)/Z_1(p).$$

де оскільки

$$Z_1(p) = \frac{R_1(R_2 C_1 p + 1)}{(R_1 + R_2)C_1 p + 1},$$

$$Z_2(p) = \frac{R_2(R_3 C_2 p + 1)}{(R_3 + R_4)C_2 p + 1},$$

то

$$W_k(p) = \frac{R_1(R_3 C_2 p + 1)[(R_1 + R_2)C_1 p + 1]}{R_2[(R_3 + R_4)C_2 p + 1](R_1 C_1 p + 1)}. \quad (9.25)$$

Порівнявши вирази (9.24) і (9.25), дістанемо такі співвідношення для обчислення параметрів схеми.

$$T_1 = (R_3 + R_4)C_2; \quad T_2 = R_3 C_2; \quad T_1 = (R_1 + R_2)C_1; \quad T_2 = R_1 C_1.$$

Крім того, оскільки при $\omega = 0$ і $\omega = \infty$ коефіцієнт передачі коректуючої ланки має дорівнювати одиниці, що випливає з вигляду $L_k(\omega)$ слід прийняти $R_1 = R_2$.

Вибіримо $C_1 = 1$ мкФ, тоді

$$R_2 = T_2/C_1 = 0.02/10^{-6} = 2 \cdot 10^4 \text{ Ом} = 20 \text{ кОм};$$

$$R_1 = T_2/C_1 = 0.1/10^{-6} = 2 \cdot 10^5 = 200 \text{ кОм};$$

$$R_3 = R_4 = 80 \text{ кОм};$$

$$C_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_1} = \frac{1 - 0,2}{8 \cdot 10^4} = 10^{-5} \Phi = 10 \text{ мкФ};$$

$$R_2 = T_2/C_2 = 0,2/10^{-5} = 2 \cdot 10^4 \text{ Ом} = 20 \text{ кОм}.$$

Для перевірки результатів синтезу побудуємо ЛФХ приведенної лінійної частини $\Phi_{r,2}(\omega)$ скорегованої системи в заборонену зону для ρ , що відповідає показнику коливаності $M = 1,5$.

Передаточна функція приведенної лінійної частини скорегованої системи за умови, що $T_1 = T_2$, матиме вигляд

$$W_{r,2}(p) = \frac{K(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_2 p + 1)}$$

Фазова характеристика $\varphi_{r,2}(\omega)$ (рис. 9.5, б) визначається за формулою

$$\varphi_{r,2}(\omega) = -90^\circ - \arctg T_1 \omega - \arctg T_1 \omega - \arctg T_2 \omega + \arctg T_2 \omega.$$

Для побудови забороненої зони знайдемо $\Delta\varphi_{r,2}$ за формулою (9.12):

$$\Delta\varphi_{r,2} = \arcsin \frac{1}{M} = \arcsin \frac{1}{1,5} = 42^\circ,$$

а криволінійну ділянку межі забороненої зони будувати за допомогою графіків, наведених на рис. 9.2.

Взявши розглянутий характеристичний $\varphi_{r,2}(\omega)$ і забороненої зони (ліній зі штрихування) свідчить, що корекція в системі забезпечує збігання перехідний процес, який крім відповіді показнику коливаності $M = 1,5$.

9.4

Корекція релейних систем

за рахунок утворення ковзних режимів

У системах з двопозиційними реальними релейними елементами одним можливим установленим во-
збуреним режимом є режим автоколивань. Точність таких систем в установлених режимі визначається відхиленням середнього значення вихідної величини при змінливості збурення і амплітудою автоколивань відносно цього середнього значення.

Залежність амплітуди автоколивань від їх частоти визначається амплітудною частотною характеристикою безперервної частини системи, яка звичайно має обмежену смугу пропускання, тобто є фільтром нижніх частот. Тому за рахунок підвищення частоти автоколивань можна згогоно зменшити їх амплітуду і, отже, підвищити точність роботи релеїної системи.

Одним із способів підвищення частоти автоколивань є створення так званого *ковзного режиму*. Для пояснення його суті розглянемо систему, структурну схему якої наведено на рис. 9.6, а. Спочатку розглянемо систему без урахування гнучкого зворотного зв'язку $k_{\text{зв}}, \rho$. Вільний рух системи при $g(t) = 0$ описується рівняннями

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = -x(t); \\ u(t) = \varphi(c); \\ T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = ku(t). \end{cases} \quad (9.26)$$

Виключивши проміжні змінні, дістанемо

$$T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -k\varphi(c). \quad (9.27)$$

Побудуємо фазовий портрет системи, використовуючи методіку, викладену в гл. 8, п. 8.4. Приймаючи $y = dx/dt$, рівняння (9.27) можна у вигляді двох рівнянь

$$\begin{cases} y = dx/dt; \\ T \frac{dy}{dt} + y = -k\varphi(x), \end{cases} \quad (9.28)$$

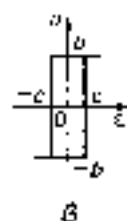
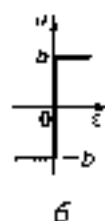
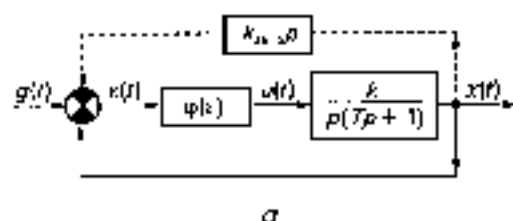


Рис. 9.6

з потім у вигляді одного диференціального рівняння фазових траєкторій

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} \left(1 + k \frac{\varphi(x)}{y} \right). \quad (9.29)$$

Розв'язок цього рівняння, тобто вигляд фазових траєкторій, залежить від типу нелінійності $\varphi(x)$. Спочатку зважимо, що характеристика нелінійного елемента має вигляд, зображений на рис. 9.6, б, тобто функція $\varphi(x)$ може набувати тільки двох значень: $\varphi(x) = b$ при $x > 0$ і $\varphi(x) = -b$ при $x < 0$. На фазовій площині буде лінія перемикання, рівняння якої $x = 0$. Оскільки $x = -x$, то ліворуч від лінії перемикання розв'язок рівняння фазових траєкторій буде розв'язком рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} \left(1 + \frac{kb}{y} \right), \quad (9.30)$$

а праворуч

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} \left(1 - \frac{kb}{y} \right). \quad (9.31)$$

Розв'язавши рівняння (9.30) і (9.31), дістанемо рівняння фазових траєкторій.

Ліворуч від лінії перемикання

$$x = -kbT \ln |y - kb| - Ty + C_1, \quad (9.32)$$

праворуч

$$x = kbT \ln |y + kb| - Ty + C_2, \quad (9.33)$$

де C_1, C_2 — сталі інтегрування, що визначаються початковими умовами. Задавши початкові умови x_0, y_0 , дістанемо

$$C_1 = x_0 + kbT \ln |y_0 - kb| + Ty_0;$$

$$C_2 = x_0 - kbT \ln |y_0 + kb| + Ty_0.$$

Фазові траєкторії, побудовані за рівняннями (9.32) і (9.33), зображено на рис. 9.7, а. Лінію перемикання позначено пунктирною

Фазовий портрет системи на рис. 9.7, а відповідає затухаючому перехідному процесу і стійкій у цілому системі. Теоретично в такій

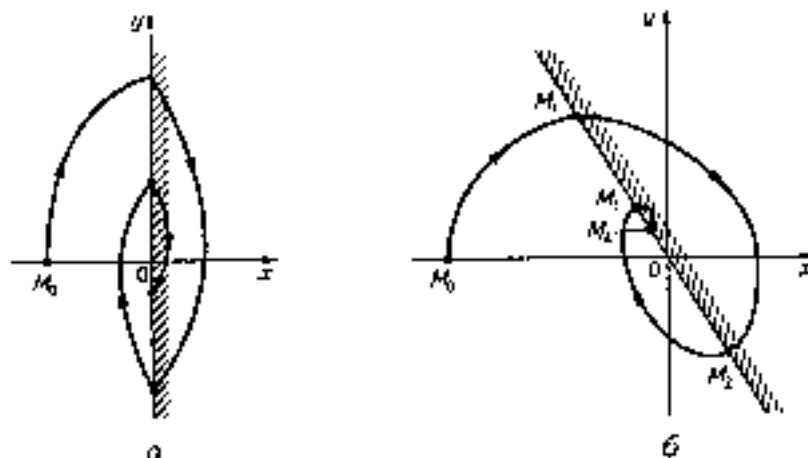


Рис. 9.7

системі в стані, що відповідає початку координат фазової площини, мають існувати автоколивання нескінченно малої амплітуди з нескінченно великою частотою.

Розглянемо, як зміниться фазовий портрет системи, якщо охопити її гнучким від'ємним зворотним зв'язком з передаточною функцією $k_{\text{н.р}}$ (див. рис. 9.6, а). У цьому разі перше рівняння системи (9.26) матиме вигляд

$$e(t) = -x(t) - k_{\text{н.р}} \frac{dx}{dt},$$

а диференціальне рівняння фазових траєкторій —

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} \left(1 + \frac{k_{\text{н.р}}}{y} \right). \quad (9.34)$$

Оскільки $\varphi(e) = -\varphi(x + k_{\text{н.р}} \nu)$, як і у попередньому випадку, може набувати тільки двох значень $+\delta$ і $-\delta$, то рівняння фазових траєкторій (9.32) і (9.33) не змінюються. Змінюється тільки лінія перемикання. Справді, перемикання відбувається при $e = -x - k_{\text{н.р}} \nu = 0$, тому рівняння лінії перемикання

$$x = -k_{\text{н.р}} y. \quad (9.35)$$

Розглянемо рух зображуючої точки по фазовій траєкторії з початкового стану, що визначається точкою M_0 (рис. 9.7, б), тобто за початкових умов $x_0 \neq 0, y_0 = 0$. Початкова точка M_0 міститься ліворуч від лінії перемикання, тому рухаємось по траєкторії, що визначається рівнянням (9.32), до перетину з лінією перемикання в точці M_1 . У цій точці реле перемикається, причому координата x зберігає попередній знак, а знак сигналу на вході релейного елемента змінюється за рахунок дії тнучкого зворотного зв'язку $k_{\text{н.з.}}$. Від точки M_1 до точки M_2 фазова траєкторія визначається рівнянням (9.33), а від точки M_2 до M_3 — рівнянням (9.32).

Нахил лінії перемикання залежить від величини $k_{\text{н.з.}}$. За досить великого значення $k_{\text{н.з.}}$ може виявитися, що лінія перемикання буде близькою до ділянки фазової траєкторії між точками M_1 і M_3 . У точці M_2 реле перемикається, після чого зображуюча точка повинна переміщуватися по траєкторії, що визначається рівнянням (9.32), але це спричиняє збільшення регулюючого сигналу на вході релейного елемента та його нове перемикання і т. д. Отже, зображуюча точка, досягнувши точки M_2 , безперервно переходить з траєкторії, що визначається рівнянням (9.32), на траєкторію, що визначається рівнянням (9.33), і навпаки, пеняче ковзаючи вздовж лінії перемикання й асимптотично наближуючись до точки рівноваги, що є початком координат фазової площини. Тому режим, що виникає після точки M_2 , називається *ковзним*.

Ковзний режим можливий на ділянці, де фазові траєкторії, що визначаються рівнянням (9.33), проходять нижче лінії перемикання. Початок цієї ділянки — це точка, в якій дотична до фазової траєкторії (9.33) збігається з лінією перемикання. Аналогічна ділянка є в четвертому квадранті при $x > 0$. Її початок — точка, в якій дотична до фазової траєкторії, що визначається рівнянням (9.32), збігається з лінією перемикання.

Знайдемо координати точок, що визначають кінці ділянки, на якій виникає ковзний режим. Для цього з (9.35) обчислимо похідну

$$dy/dx = -1/k_{\text{н.з.}}$$

і підставимо її в (9.34), приймаючи $\varphi(x - k_{\text{н.з.}}, y) = b$ для фазової траєкторії праворуч від лінії перемикання і $\varphi(x + k_{\text{н.з.}}, y) = b$ — ліворуч. Тоді дістанемо

$$-\frac{1}{k_{\text{н.з.}}} = -\frac{1}{T} \left(1 \pm \frac{kb}{y} \right).$$

звідки знайдемо шукані координати

$$\begin{cases} y = \pm \frac{k k_{\text{н.п.}} b T}{k_{\text{н.п.}} - T}; \\ x = \mp \frac{k k_{\text{н.п.}}^2 b T}{k_{\text{н.п.}} - T}. \end{cases} \quad (9.36)$$

У цих рівняннях верхній знак відповідає координати лівого кінця ділянки ковшного режиму, нижній — координати правого кінця. Для лівого кінця $y > 0$, тому ковшний режим можливий лише за умови $k_{\text{н.п.}} > T$.

З порушення фазових траєкторій, зображених на рис. 9.7, а і б, випливає, що введення гнучкого коректувального зворотного зв'язку істотно впливає на характер перехідного процесу. Коливальність перехідного процесу зменшується, при цьому кількість коливань стає скінченною, оскільки на лінії перемикання з'являється ділянка ковшного режиму. Зображують точки, потрапивши на цю ділянку, рухаються до початку координат по траєкторії $y = -1/k_{\text{н.п.}} x$, якій відповідає аперіодичний перехідний процес

$$x = x_{\text{н.п.}} e^{-\omega_{\text{н.п.}} t}. \quad (9.37)$$

Отже, спочатку коливальний перехідний процес закінчується аперіодичною ділянкою. Можливий перехідний процес і без коливань, якщо початкові умови такі, що при першому ж перетинанні лінії перемикання фазова траєкторія потрапляє на ділянку ковшного режиму.

З рівняння (9.37) видно, що на ділянці ковшного режиму в системі з ідеальним релейним елементом координати змінюються за лінійними законами і нелінійну систему можна наближено вважати лінійною системою першого порядку.

Розглянемо тепер систему з реальним релейним елементом, характеристику якого зображено на рис. 9.6, а. Функція $\Phi(s)$ і в цьому разі може набувати тільки двох значень $+b$ і $-b$, тому рівняння фазових траєкторій залишаються попередніми — (9.12) і (9.33), змінюються лише рівняння ліній перемикання. Вони матимуть вигляд $x = c$ при $y > 0$, $x = -c$ при $y < 0$.

Фазовий портрет системи без коректувального зворотного зв'язку зображено на рис. 9.8, а. На цьому портреті є стійкий граничний цикл, тобто усталеним режимом системи є режим автоколивань.

Після введення коректувального зворотного зв'язку з передаточною функцією $k_{\omega, p}$ рішення фазових траєкторій не змінюються, а рівняння ліній перемикання стають такими:

$$x = c - k_{\omega, p} y \text{ при } y > 0; \quad (9.38)$$

$$x = -c - k_{\omega, p} y \text{ при } y < 0. \quad (9.39)$$

Фазовий портрет системи зі зворотним зв'язком зображено на рис. 9.8, а. За досить сильного зворотного зв'язку також виникає коливний режим. Зображуюча точка рухається по траєкторіях (9.32) і (9.33) між лінією перемикання (9.38) і продовженням лінії перемикання (9.39). Перехідний процес закінчується встановленням автоколивань.

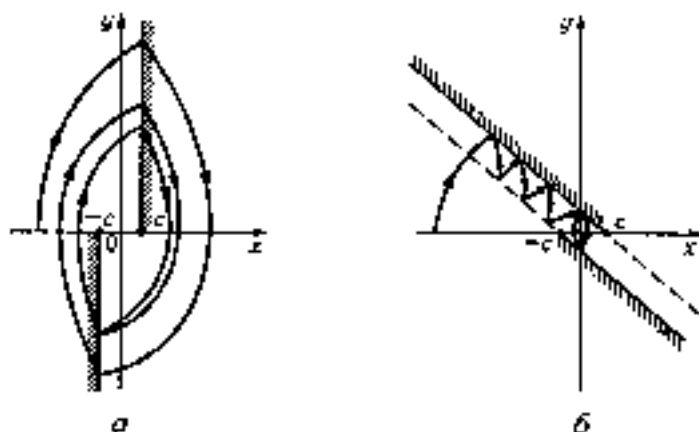


Рис. 9.8

Фізично коливний режим полягає в перемиканні реле з великою частотою, що зумовлює зменшення амплітуди автоколивань, тобто поліпшує динамічні властивості системи. При збільшенні $k_{\omega, p}$ амплітуда автоколивань зменшується до величини, що визначається шириною петлі характеристики релейного елемента.

9.5

Нелінійні коректувальні ланки

Як зазначалося раніше, можливості нелінійних коректувальних ланок значно перевищують можливості лінійних. Нелінійну корекцію можна здійснювати нелінійним змінюванням коефіцієнтів передачі ланок системи, використанням псевдоімпульсних ланок, ланок з долатним гістерезисом та іншими способами. За допомогою нелінійних коректувальних пристроїв можна розв'язувати також задачу компенсації негативного впливу небажаних нелінійностей.

Недоліком нелінійної корекції є її «вузька спеціалізація» відносно зовнішніх дій. Нелінійна корекція, що є ефективною для певного класу зовнішніх дій, може стати некорисною або навіть шкідливою при інших діях або режимах роботи системи.

Нелінійне змінювання коефіцієнта передачі системи.

Коефіцієнт передачі розімкнутої системи визначають, виходячи з потрібної точності роботи системи в ustalених режимах. Проте його величина істотно впливає і на якість перехідного процесу. В лінійних системах у разі збільшення коефіцієнта передачі звичайно погіршується якість перехідних процесів — зростає коливальність, збільшується перерегулювання, зменшується запас стійкості. Зберегти потрібну точність роботи системи в ustalеному режимі й одночасно забезпечити прийнятну якість перехідного процесу можна за рахунок нелінійного змінювання коефіцієнта передачі. Для цього слід зберегти потрібну для забезпечення заданої точності величину коефіцієнта передачі при розузгодженнях, які не перевищують допустимого похибки в ustalеному режимі. За більших розузгоджень коефіцієнт передачі можна змінювати нелінійно, якщо це забезпечує підвищення якості перехідного процесу.

Розглянемо можливість підвищення швидкодії системи при збереженні прийнятної якості перехідного процесу за рахунок нелінійного змінювання коефіцієнта передачі. В лінійних системах час перехідного процесу $t_d = k_d \pi / \omega$, залежить від частоти зрізу ЛАХ розімкнутої системи. Таке саме співвідношення можна прийняти і для гармонічно лінеаризованих нелінійних систем.

Структурну схему системи після гармонічної лінеаризації можна подати у вигляді, зображеному на рис. 9.9, а, де $k_{\text{л}}(\alpha)$ — приведений

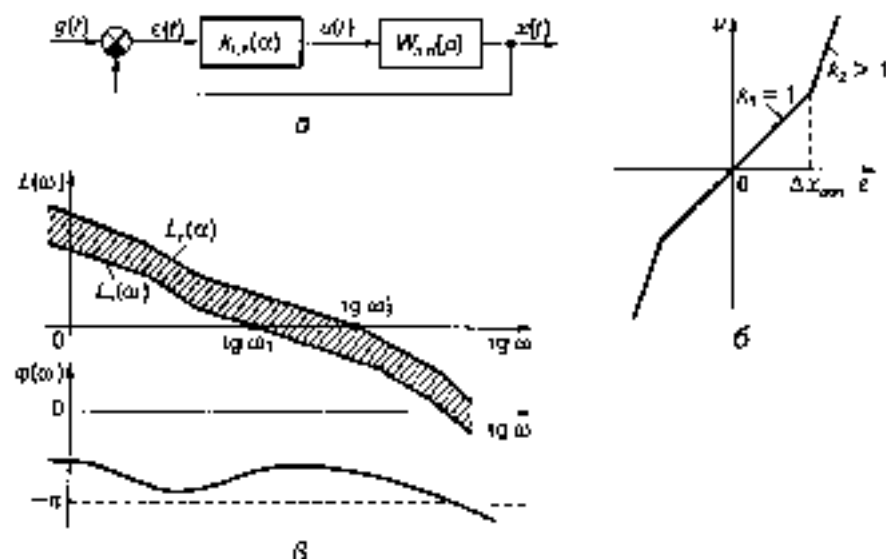


Рис. 9.9

нормований коефіцієнт гармонічної лінеаризації; $W_{2,n}(p)$ — передаточна функція приведенної лінійної частини.

Припустимо, що статична характеристика нелінійної ланки має вигляд, поданий на рис. 9.9, б. Для цієї ланки коефіцієнти гармонічної лінеаризації визначаються такими залежностями:

$$k_1(\alpha) = k_n k_{1,n}(\alpha); \quad k_{1,n} = k_1; \quad \alpha = \Delta x / \Delta x_{om};$$

$$k_2(\alpha) = 1 \quad \text{при } \alpha \leq 1; \quad (9.40)$$

$$k_{1,n}(\alpha) = k_2/k_1 - \frac{2}{\pi} (k_2/k_1 - 1) \left(\arcsin \frac{1}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2} \right) \quad \text{при } \alpha \geq 1.$$

Для збереження точності роботи системи в установившому режимі статичну характеристику нелінійної ланки при відхиленнях вихідної величини, що не перевищує Δx_{om} , замінюємо лінійною з коефіцієнтом передачі

$$k_1(\alpha) = k_n k_{1,n}(\alpha) = k_1 = 1.$$

При відхиленнях швидкої величини, що перевищують $\Delta x_{\text{доп}}$, коефіцієнт передачі нелінійної ланки зростає згідно з виразом (9.49) і прямує до k_2/k_1 .

ЛАХ гармонічно лінеаризованої розімкнутої системи

$$I(\omega, \alpha) = L_n(\omega) + L_n(\alpha),$$

де $L_n(\omega)$ — ЛАХ приведенної лінійної частини; $L_n(\alpha)$ — ЛАХ приведенної характеристичної нелінійної ланки.

ЛАХ $L_n(\omega) \approx 20 \lg |W_{\text{ном}}(j\omega)|$ залишається незмінною за будь-яких розузгодженнях, що не перевищують $|x_{\text{доп}}|$, оскільки $k_1(\alpha) = 1 = \text{const}$. ЛАХ $L_n(\alpha)$ змінюється залежно від змінювання відносної амплітуди $\alpha = \Delta x / \Delta x_{\text{доп}}$ під час перехідного процесу, тобто може розімкнуватися у заштрихованій зоні, зображеній на рис. 9.9, а, яка зверху обмежується ЛАХ, що відповідає максимально можливому значенню α . Час зросту при цьому може змінюватися в межах $\omega_1 < \omega < \omega_2$.

Збільшення частоти зросту спричинює підвищення швидкозми. Водночас через те, що $k_1(\alpha)$ для однозначних нелінійностей є дійсною величиною, нелінійна коректувальна ланка не впливає на ЛФХ системи. Тому під час перехідного процесу при збільшенні ω зменшуватиметься запас стійкості за фазою і зростатиме колиєвність. Це обмежує допустиме нелінійне зростання коефіцієнта передачі.

Очевидно, що підвищення швидкозми можливе тільки у разі використання нелінійностей, для яких $k_1(\alpha) > 1$ за відношень швидкої величини, що перевищують допустиму усталену похибку.

Крім розглянутої нелінійної ланки з коефіцієнтами $k_1 = 1$ і $k_2 > k_1$, можна використовувати ланки зі степеневими статичними характеристиками $n = k\alpha^2$, $\alpha = k\alpha^3$ та ін.

Псевдолінійні коректувальні пристрої. Нелінійні коректувальні пристрої, еквівалентні АФХ яких не залежать від амплітуди вхідного сигналу, а є функціями тільки частоти, називаються *псевдолінійними*. Особливістю цих пристроїв є відсутність жорсткого зв'язку між амплітудною і фазовою характеристиками, що дає змогу формувати ці характеристики незалежно. Це своєю чергою відкриває широкі можливості корекції САК за рахунок змінювання її частотних характеристик у бажаному напрямі.

Одну з можливих структурних схем псевдолінійного коректувального пристрою зображено на рис. 9.10. Вона складається з двох каналів. Верхній (амплітудний) канал призначений для формування амплітудної характеристики. Він складається з лінійних елементів і з

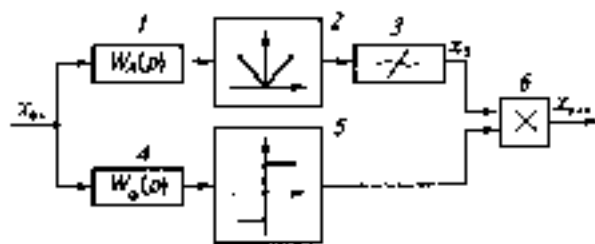


Рис. 9.10

передаточною функцією $W_A(p)$, ланки 2, що видає модуль сигналу (я електричних схемах це звичайно діодів періодичний випрямляч), і фільтра 3. Амплітуда сигналу на виході ланки $W_A(p)$ визначається її амплітудною

частотною характеристикою. Цей сигнал випрямляється та фільтрується і таким чином виключається інформація про фазу сигналу. Отже, на вході блока перемножування 6 формується випрямлений сигнал x_1 , величина якого визначається амплітудною частотною характеристикою ланки $W_A(p)$.

Нижній (фазовий) канал формує фазову характеристику. Він складається з лінійної ланки 4 з передаточною функцією $W_Ф(p)$ та ідеального релейного елемента 5. Фаза сигналу на виході ланки 4 визначається її фазовою частотною характеристикою. Релейний елемент 5 перемикається під час переходу сигналу через нуль, тобто він реагує на фазу сигналу. Амплітуда сигналу на виході релейного елемента не залежить від амплітуди вхідного сигналу, оскільки може мати лише два фіксовані рівні.

Вихідний сигнал коректувального пристрою x_{out} утворюється в результаті перемножування вихідних сигналів амплітудного і фазового каналів. Якщо вибрати лінійні ланки з відповідними передаточними функціями $W_A(p)$ і $W_Ф(p)$ то можна реалізувати коректувальний пристрій з бажаними амплітудною і фазовою характеристиками, які можна змінювати незалежно одну від одної. Наприклад, якщо необхідно знизити амплітуду на високих частотах і одночасно створити випередження за фазою, то в амплітудний канал слід ввести ланку, що послаблює високі частоти, наприклад аперіодичну з передаточною функцією

$$W_A(p) = \frac{k}{Tp + 1},$$

а у фазовий канал — елемент, що створює випередження за фазою, наприклад інтегродиференціальну ланку з передаточною функцією

$$W_{\pm}(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1},$$

де $T_1 > T_2$.

Нелінійні коректувальні пристрої з додатним гістерезисом (з двозначними випереджаючими статичними характеристиками). Нові можливості корекції динамічних властивостей САК відкриває застосування штучно створених нелінійних ланок з додатним гістерезисом. На відміну від нелінійностей з від'ємним гістерезисом у гармонічній передаточній функції

$$W_{\text{н.л.}}(p) = k_1 + \frac{k_2}{\omega} p$$

коефіцієнт гармонічної лінеаризації k_1' завжди додатний, тобто він визначає складову, що випереджає за фазою вхідний сигнал на кут $\pi/2$. Це пояснюється тим, що при зростанні вхідної величини ($dx/dt > 0$) вихідна величина змінюється відповідно до лівих віток статичної характеристики нелінійної ланки, а при зменшенні ($dx/dt < 0$) — відповідно до правих віток (рис. 9.11). Замінемо коефіцієнти гармонічної лінеаризації такої ланки (при $a > c$):

$$k_1 = \frac{4b}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}};$$

$$k_1' = 4bc/\pi a^2$$

і гармонічну передаточну функцію

$$W_{\text{н.л.}}(p) = \frac{4b}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} + \frac{4bc}{\pi a^2} \frac{p}{\omega}$$

або

$$W_{\text{н.л.}}(j\omega) = \frac{4b}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} + j \frac{4bc}{\pi a^2}.$$

Амплітудна характеристика цієї ланки

$$|W_{\text{н.л.}}(j\omega)| = 4b/\pi a$$

не залежить від частоти вхідного сигналу, а є функцією лише його амплітуди

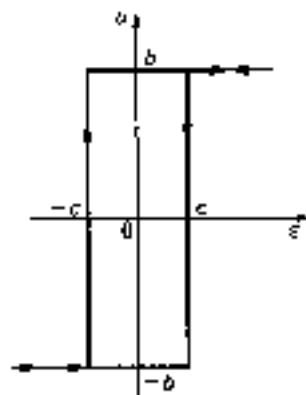


Рис. 9.11

Фазова характеристика

$$\varphi_{h,1}(\omega) = \arctg \sqrt{\frac{c^2}{a^2 - c^2}},$$

тобто релейний елемент із додатним гістерезисом створює випередження за фазою на всіх частотах, яке зменшується при зростанні амплітуди a . Якщо вибрати ширину петлі гістерезису $2c$, яка дорівнює двом амплітудам $2a$, то ланка створюватиме випередження за фазою $\pi/2$ за будь-яких частот.

Отже, нелінійні ланки з додатним гістерезисом є еквівалентними диференціювальним лінійним ланкам. Їх можна застосовувати для корекції динамічних властивостей систем із рахунок введення похилної.

9.6

Компенсація впливу нелінійностей

Нелінійні ланки можуть погіршувати якість систем, зокрема спричинявати низькочастотні коливання з великою амплітудою. Корекція систем у таких випадках може здійснюватися із рахунок компенсації небажаних нелінійностей.

Застосування компенсувальних нелінійностей. Одним із способів компенсації нелінійних статичних характеристик є вмикання нелінійної ланки, яка має спеціально підібрану характеристику. Ця ланка вмикається послідовно (рис. 9.12, *а*) або паралельно з нелінійністю, що компенсується (рис. 9.12, *б*), а також у вигляді зворотного зв'язку (рис. 9.12, *в*).

Мета компенсації полягає у визначенні такої статичної характеристики нелінійної коректувальної ланки φ_k , аби сукупна статична характеристика вихідної ланки φ_1 і коректувальної φ_k була лінійною φ_2 .

Розглянемо спочатку послідовне з'єднання компенсувальної нелінійності, яка має статичну характеристику

$$x_2 = \varphi_k(x_1), \quad (9.41)$$

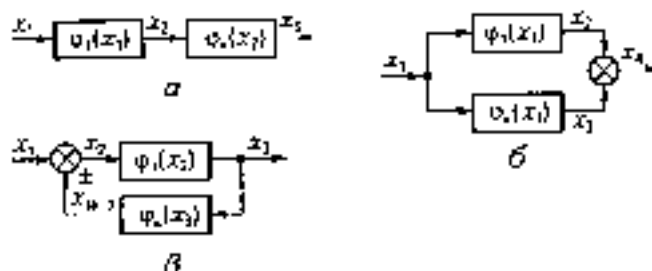


Рис. 9.12

і нелінійної ланки, статична характеристика якої

$$x_2 = \varphi_1(x_1) \quad (9.42)$$

відома.

Сукупна статична характеристика двох ланок має бути лінійною:

$$x_2 = \varphi_2(x_1) = k_c x_1, \quad (9.43)$$

де $k_c = \text{const}$.

Якщо нелінійність $\varphi_1(x_1)$ задано аналітично, то для визначення $\varphi_2(x_2)$ необхідно розв'язати нелінійне рівняння (9.42) відносно x_1 , тобто знайти зворотну нелінійну функцію $x_1 = \varphi_1^{-1}(x_2)$ і підставити її значення в улову лінійності (9.43):

$$x_2 = k_c x_1 = k_c \varphi_1^{-1}(x_2). \quad (9.44)$$

З порівняння виразів (9.41) і (9.44) видно, що статичну характеристику компенсувальної нелінійної ланки можна записати в аналітичному вигляді

$$\varphi_2(x_2) = k_c \varphi_1^{-1}(x_2).$$

Якщо статичну характеристику $\varphi_1(x_1)$ не задано аналітично, то характеристику $\varphi_2(x_2)$ можна визначити графічно. Припустимо, що характеристика $x_2 = \varphi_1(x_1)$ має вигляд, зображений на рис. 9.13. а. На цьому самому рисунку наведено бажану лінійну характеристику $x_2 = \varphi_2(x_1)$. Масштабні величини x_1 , x_2 , x_3 мають бути однаковими.

Характеристика $\varphi_2(x_2)$ компенсувальної нелінійності будується таким чином. Беруть довільне значення x_2' і за характеристиками $\varphi_1(x_1)$ і $\varphi_2(x_2)$ знаходять відповідні значення x_1' і x_2' . Ці значення ви-

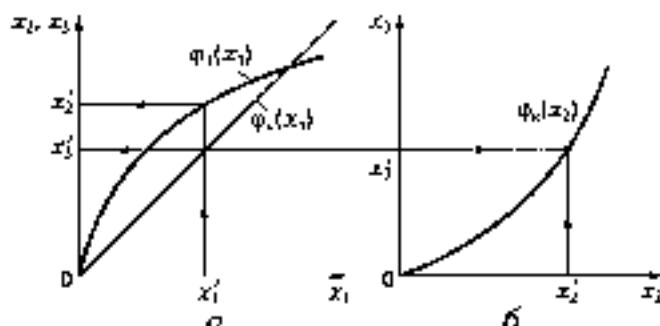


Рис. 9.13

значують точку статичної характеристики $x_1 = \varphi_1(x_2)$ в системі координат (x_2, x_1) , наведеної на рис. 9.13, б. Якщо вибрати невеликий крок змінювання x_2 , можна досить точно побудувати шукану характеристику $\varphi_k(x_2)$.

При виборі способу компенсації слід мати на увазі, що не кожену нелінійність можна компенсувати за рахунок послідовної коректувальної ланки. Компенсації можливі лише у разі, коли компенсована нелінійність має взаємно однозначну відповідність значень вхідної і вихідної величин. Наприклад, для статичної характеристики з насиченням (рис. 9.14) немає однозначної відповідності зворотної функції $x = \varphi^{-1}(x_2)$ при $x_2 = x_{2\max}$ і вона взагалі не існує при $x_2 > x_{2\max}$. Не мають однозначної відповідності зворотні функції також для характеристик із зоною нечутливості, всіх релейних і будь-яких неолінійних характеристик.

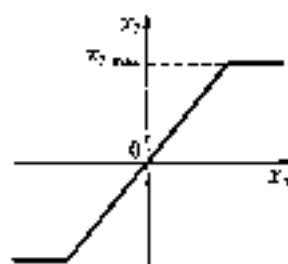


Рис. 9.14

Нелінійності з такими статичними характеристиками не можна компенсувати за рахунок послідовного введення компенсуювальних нелінійностей.

Більш можливості дає паралельне введення компенсуювальних нелінійностей (див. рис. 9.12, б). Умова лінійності сукупної характеристики

$$x_2 = x_1 + x_1 = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_1) - \varphi_3(x_1) - k_0 x_1,$$

звідки

$$\varphi_k(x_1) = \varphi_1(x_1) - \varphi_3(x_1). \quad (9.45)$$

Отже, для визначення характеристики $\varphi_k(x)$ досить візняти характеристику нелінійності, що компенсується, від бажаної характеристики лінійної ланки $\varphi_1(x_1)$. Це можна зробити аналітично або графічно. Побудову характеристики $\varphi_k(x)$, що компенсує нелінійність $\varphi_1(x)$ із зоною нечутливості, показано на рис. 9.15. а. Для будь-яких x_1 виконується умова $x_2 + x_3 = x_4$.

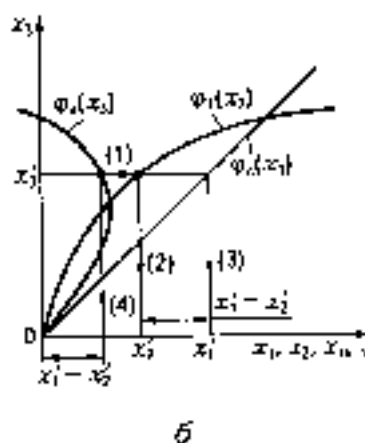
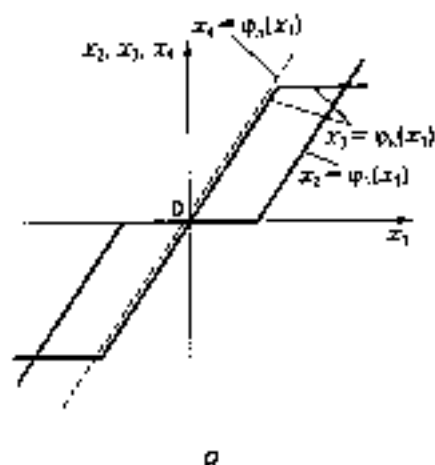


Рис. 9.15

Неблизьку нелінійність можна також скомпенсувати за рахунок нелінійних жорстких доданків або від'ємних зворотних зв'язків (див. рис. 9.12. а).

Статичну характеристику $x_{n+1} = \varphi_k(x_1)$ можна визначити таким чином. Відповідно до структурної схеми, наведеної на рис. 9.12. а, маємо

$$x_1 = \varphi_1(x_2) = \varphi_1(x_1 \pm x_{n+1}), \quad (9.46)$$

або

$$x_{n+1} = \varphi_k(x_1), \quad (9.47)$$

тому

$$x_1 = \varphi_1(x_1 + \varphi_k(x_1)). \quad (9.48)$$

Розв'язавши нелінійну функцію (9.48) відносно аргументу, визначимо зворотню функцію

$$x_1 \pm \varphi_k(x_2) = \varphi^{-1}(x_2), \quad (9.49)$$

зв'язки

$$x_1 = \varphi_1^{-1}(x_2) \mp \varphi_k(x_1). \quad (9.50)$$

Прийнявши рівняння бажаної лінійної характеристики у вигляді

$$x_1 = \varphi_1(x_1) = k_n x_1 \quad (9.51)$$

і підставивши значення $x_1 = x_2/k_n$ в (9.50), дістанемо

$$x_2/k_n = \varphi_1^{-1}(x_2) \mp \varphi_k(x_1).$$

Звідки знайдемо статичну характеристику компенсувальної нелінійності

$$\varphi_k(x_1) = \pm \varphi_1^{-1}(x_2) \mp x_2/k_n. \quad (9.52)$$

Тут верхні знаки відповідають додатному зворотному зв'язку, нижні — від'ємному.

Компенсація за рахунок зворотного зв'язку можлива за таких самих умов до статичної характеристики нелінійності, що компенсується, відносно взаємно однозначної відповідності значень вхідної і вихідної величин, як і у разі компенсації послідовною коректувальною ланкою.

Статичну характеристику $\varphi_k(x_1)$ можна визначити аналітично за формулою (9.52) або побудувати графічно.

Послідовність графічної побудови характеристики $\varphi_k(x_1)$ нелінійної ланки, що використовується у вигляді від'ємного зворотного зв'язку, наведено на рис. 9.15, б. Послідовність побудови однієї точки шуканої характеристики подано цифрами у дужках і стрілками. Для вибраного значення x_2' за характеристиками $\varphi_1(x_2)$ і $\varphi_n(x_1)$ знаходимо значення x_2'' і x_1' , потім визначимо $x_{n+1}' = x_2' - x_2''$ і знаходимо точку характеристики $x_{n+1}' = \varphi_k(x_1)$. Прімітуючи ряд значень x_1 , визначимо інші точки характеристики $\varphi_k(x_1)$ і будемо її.

Якщо нелінійність зумовлена характеристикою об'єкта керування, то викласти компенсувальну нелінійність розглянутими способами, як правило, неможливо. У цьому разі використовується модель об'єкта. Система лінеаризується за рахунок вмикання паралельно об'єкту компенсувальної нелінійності і ланки $W_{\text{об'єк}}(p)$, що є моделлю лінійної частини об'єкта (рис. 9.16, а). Нелінійність об'єкта можна також скомпенсувати за допомогою від'ємного зворотного зв'язку, що охоплює попередні лінійні елементи $W_{\text{об'єк}}(p)$ і становить модель компенсувальної нелінійності φ_k і об'єкта $W_{\text{об'єк}}(p)$ (рис. 9.16, б).

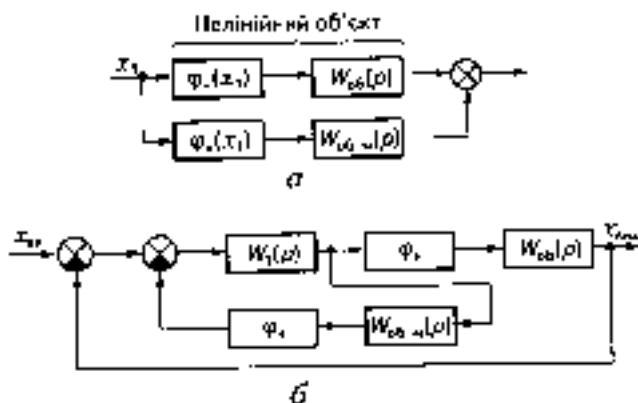


Рис. 9.16

Вібраційна компенсація нелінійностей. Ефективним способом придушення низькочастотних автоколивань є вібраційна лінеаризація. Ідея такої лінеаризації полягає у створенні високочастотних коливань на вході нелінійної ланки. Вібраційна лінеаризація є найпоширенішим способом лінеаризації релейних систем.

Суть вібраційної лінеаризації можна пояснити так. Нехай на вхід нелінійної ланки (рис. 9.17, а) подається сигнал $x_1(t)$, що повільно змінюється, і високочастотний сигнал $x(t)$ із нульовим середнім значенням. Частота f_1 сигналу $x(t)$ має бути досить високою, щоб функцію $x_0(t)$ вважати сталою протягом періоду $T_1 = 1/f_1$.

Сигнали на вході нелінійної ланки обчислюються за формулою

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t).$$

Вихідний сигнал $x(t)$ нелінійної ланки можна подати у вигляді суми середньої складової $x_{cp}(x_1)$, що повільно змінюється, і високочастотної коливальної функції $\varphi_1(x_1)$, тобто

$$x(t) = \varphi[x_0(t) + x_1(t)] = x_{cp}(x_1) + \varphi_1(x_1). \quad (9.53)$$

Процес вібраційної лінеаризації ілюструється графіками на рис. 9.17, б, де показано побудову вихідного сигналу $x(t)$ нелінійного елемента, що має характеристику ідеального реле $x(t) = \varphi(x_1)$, при наближенні на його вхід високочастотного сигналу $x(t)$ і суми цих сигналів $x_1(t)$ і $x_0(t)$ за умови, що протягом кількох періодів коливань $x_1(t)$ сигнал $x_0(t)$ сталий.

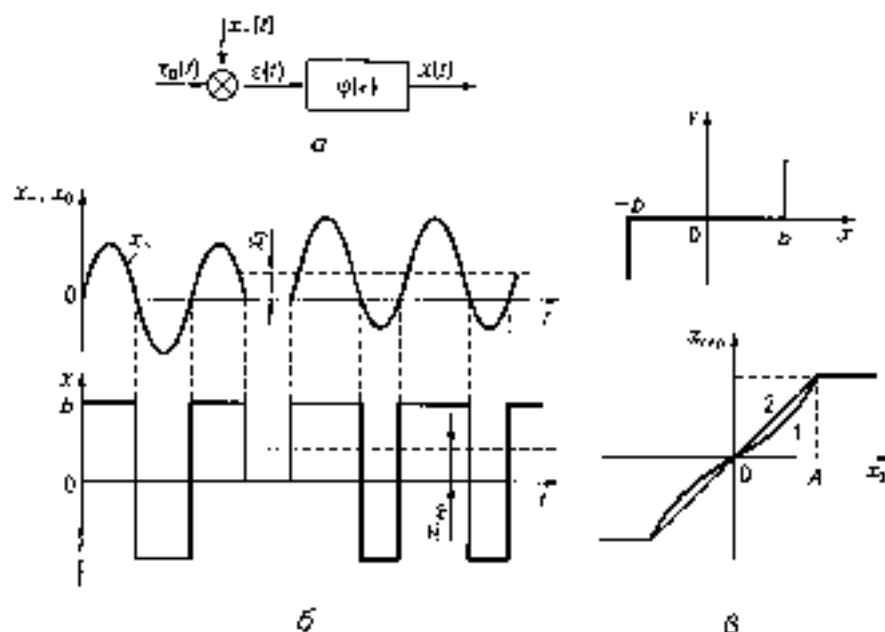


Рис. 9.17

При $x_0 = \text{const}$ середнє значення $x_{\text{ср}}$ вихідного сигналу нелінійного елемента за період T високочастотного коректувального сигналу обчислюється так:

$$x_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_{-b}^{b} \varphi[x_0(t) + x(t)] dt.$$

Підінтегральна функція становить прямокутні коливання, симетричні при $x_0 = 0$ і несиметричні при $x_0 \neq 0$. При $x_0 = 0$ середнє значення вихідного сигналу $x_{\text{ср}}$ дорівнює нулю.

Визначимо $x_{\text{ср}}$ за умови, що коректувальний сигнал синусоїдальний: $x(t) = A \sin \omega t$ і $x_0 = \text{const}$ (рис. 9.18, а). Реле перемикається при $x(t) + x_0 = 0$, тобто при

$$\omega_1 t = -\arcsin A/x_0;$$

$$\omega_2 t = \pi + \arcsin A/x_0;$$

$$\omega_3 t = 2\pi - \arcsin A/x_0.$$

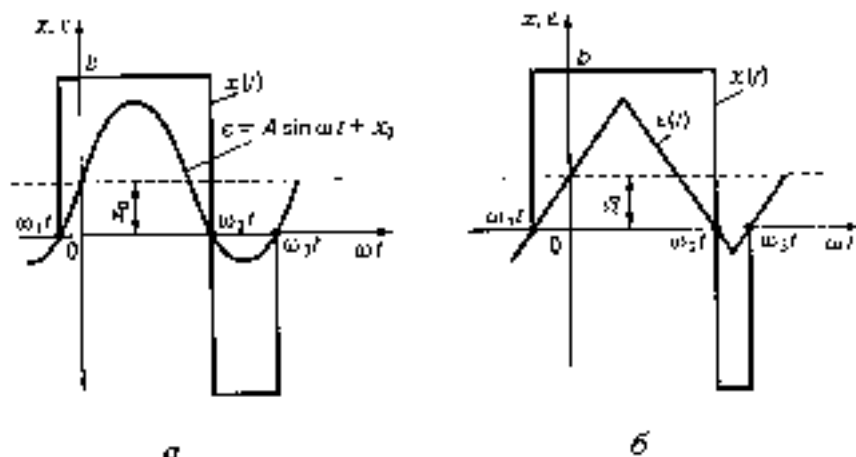


Рис. 9.18

Знайдемо середнє значення за період

$$x_{\text{ср}} = \frac{(\omega_2 t - \omega_1 t)b}{2\pi} - \frac{(\omega_3 t - \omega_2 t)b}{2\pi} =$$

$$= -\frac{2b \arcsin A/x_0}{\pi} = k_{\pi} x_0.$$

Розглянемо тепер випадок, коли коректувальний сигнал має вигляд трикутних імпульсів з такою самою амплітудою A і частотою ω , що й розглянутий синусоїдальний сигнал (рис. 9.18, б). Тоді при зростанні сигналу

$$x_+(t) = \frac{2A}{\pi} \omega t,$$

а у разі його спадання

$$x_-(t) = -\frac{2A}{\pi} \omega t + 2A.$$

Визначимо моменти перемикування реле з умови $x_-(t) + x_1 = 0$

$$\omega_1 t = -x_0 \pi / 2A;$$

$$\omega_2 t = x_0 \pi / 2A + \pi;$$

$$\omega_3 t = -x_0 \pi / 2A + 2\pi.$$

Середнє значення за період становить

$$x_{\text{ср}} = bx_0/A = k_0 x_0.$$

Графіки залежностей $x_{\text{ср}}(x_0)$ для синусоїдального (крива 1) і трикутного (крива 2) коректувального сигналів зображено на рис. 9.17, а. З цих графіків видно, що для трикутного коректувального сигналу $x_{\text{ср}}$ є лінійною функцією x_0 при $|x_0| \leq A$. Для синусоїдального сигналу функцію $x_{\text{ср}}(x_0)$ з певним наближенням також можна вважати лінійною при $|x_0| \leq A$.

Лінійність зберігається в межах амплітуди A компенсуючого сигналу. Отже, при збільшенні амплітуди A розширюється зона лінійності релейного елемента, але зменшується коефіцієнт підсилення k_0 лінеаризованого елемента.

Вихідний сигнал нелінійного елемента, як видно з формули (9.53), має два складові і поділяється на вхід лінійної частини системи. За досить великої частоти компенсуючого сигналу лінійна частина системи внаслідок своєї інерційності практично не пропускає сигнал $\varphi_1(x_0)$, тобто в результаті вібраційної лінеаризації релейний елемент можна розглядати як лінійну ланку з коефіцієнтом передачі k_0 .

Для того щоб дістати високочастотні коливання, що здійснюють вібраційну лінеаризацію, можна використовувати зовнішній генератор періодичних коливань. Крім того, можливе використання власних коливань (автоколивань) системи. У цьому разі необхідно взяти спеціальних заходів для підвищення частоти автоколивань, зокрема перейти до коливного режиму.

Перевагами використання зовнішнього генератора є можливість досить простими засобами змінювати частоту і амплітуду коливань у широких межах, а недоліком — ускладнення за рахунок додаткового вузла.

Вібраційну лінеаризацію можна також розглядати як процес широтно-імпульсної модуляції, при цьому релейний елемент є модулятором, $x(t)$ — сигналом несучої частоти, $x_0(t)$ — модулюючим сигналом. Отже, для протікання вібраційної лінеаризації необхідною буде відомою умова неспотвореної передачі низькочастотного сигналу релейним елементом

$$f/f_0 \geq 3,$$

де f_1, f_2 — частоти відповідно коректувального і вхідного сигналів

Контрольні запитання та завдання

1. Якими показниками оцінюється якість нелінійних систем?
2. Як визначити показник коливальності нелінійної системи? Чому при цьому слід користуватися нормованими коефіцієнтами гармонічної лінеаризації?
3. Як оцінити якість перехідних процесів за допомогою діаграми якості Погоса?
4. Які засоби використовують для корекції нелінійних САК?
5. Викладіть порядок синтезу лінійного коректувального пристрою в нелінійній системі методом погарифмічних частотних характеристик.
6. Що таке коливний режим у реєвних системах і за яких умов він виникає?
7. Схарактеризуйте нелінійні коректувальні ланки. У чому їх переваги і недоліки порівняно з лінійними?
8. Як впливає нелінійне змінювання коефіцієнта передачі на динаміку системи?
9. У чому полягає основна особливість псевдолінійних коректувальних ланок?
10. Які можливості корекції динаміки САК дає застосування нелінійних коректувальних пристроїв з додатним гістерезисом?
11. Поясніть призначення способи введення і розрахунок характеристик компенсувальних нелиностей.
12. Викладіть цюк вибравційної лінеаризації. У який спосіб її можна реалізувати?
13. Що розуміють під синтезом нелінійних САК?

10.1

*Уявлення про дискретні системи.
Класифікація дискретних систем*

Система автоматичного керування називається *дискретною*, якщо до її складу входить хоча б одна ланка дискретної дії. *Ланка дискретної дії* (дискретний елемент) — це ланка, вихідна величина якої змінюється дискретно, тобто стрибкоподібно, навіть при плавному змінюванні вхідної величини.

Дискретний елемент перетворює безперервний сигнал на дискретні. Це перетворення здійснюється за рахунок квантування сигналу за рівнем, часом або рівнем і часом.

Квантування за рівнем полягає в перетворенні безперервного сигналу x , у ступінчастий $x_{\text{рр}}$ з фіксованими рівнями ступенів — дискретними рівнями $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ (рис. 10.1, а). У найпростішому випадку квантування за рівнем здійснюється релейним елементом, вихідна величина якого може набувати скінченну кількість фіксованих рівнів — звичайно два $(+b, -b)$ або три $(+b, 0, -b)$.

Квантування за часом є перетворенням безперервного вхідного сигналу x , у ступінчастий $x_{\text{чр}}$ за рахунок фіксації рівнів вхідного сигналу в дискретні моменти часу $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ (рис. 10.1, б) або на послідовність імпульсів, параметри яких (амплітуда, ширина, частота та ін.) визначаються величиною вхідного сигналу в дискретні моменти часу. Період дискретності T_0 може бути сталим або змінним.

Внаслідок одночасного *квантування за рівнем і часом* вхідний сигнал змінюється дискретно у фіксовані моменти часу $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ і може набувати лише значень, що визначаються дискретними рівнями $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ (рис. 10.1, в).

Залежно від виду квантування дискретні системи бувають трьох типів: *релейні* (квантування за рівнем), *імпульсні* (квантування за часом), *імпульсно-релейні* (квантування за рівнем і часом).

10.1. Стиснення при дослідженні систем
Класифікація безперервних систем

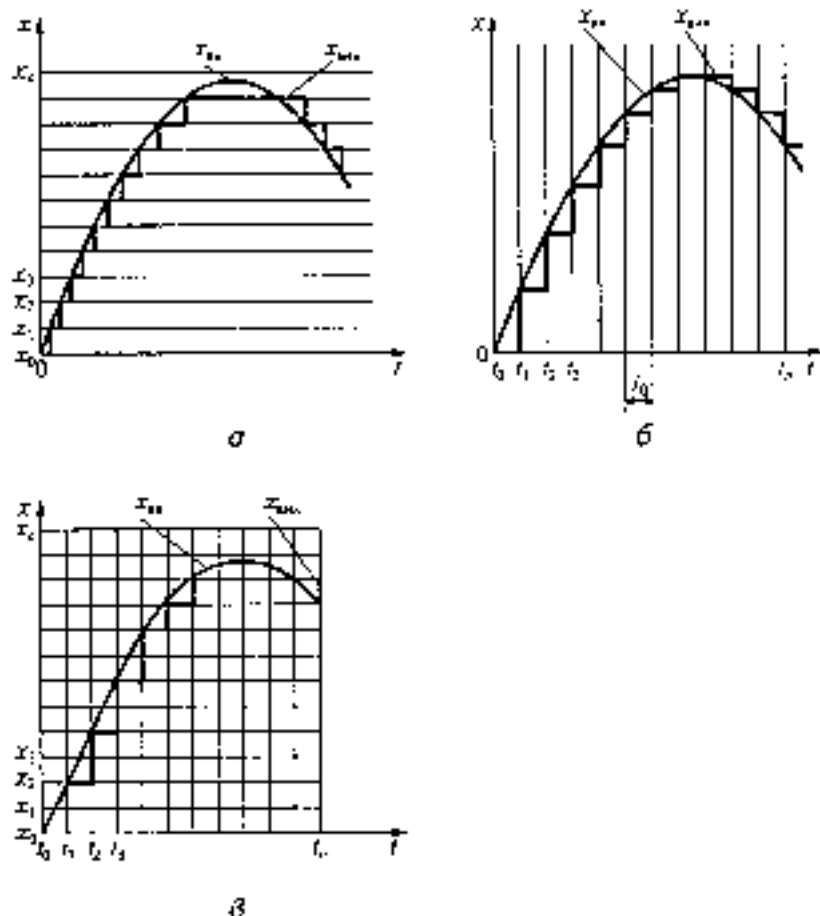


Рис. 10.1

Релейні системи можна не виділяти в окремий тип дискретних систем, а розглядати їх як нелінійні безперервні САК з нелінійністю релейного типу. Дослідження таких систем виконується методами, наведеними в гл. 8 та 9, тому в даній главі розглядатимуться тільки імпульсні та цифрові САК.

10.2

Класифікація імпульсних САК за видами модуляції

Внаслідок квантування за часом в імпульсних САК інформація між двома або більшими елементами передається послідовністю імпульсів. Така послідовність містить корисну інформацію лише в тому разі, якщо вона промодульована певним-будь-яким сигналом. Функцію модуляції в імпульсних САК виконують імпульсні елементи (модулятори), які перетворюють безперервні сигнали в послідовність імпульсів, один з параметрів яких (модульований параметр) змінюється за законом змінювання вхідного безперервного сигналу (модулюючого сигналу).

Основними параметрами послідовності імпульсів є амплітуда (висота) A , тривалість (ширина) $T_i = \gamma T_n$, період повторення T_n і положення імпульсу αT_n всередині періоду T_n (часовий зсув або фаза імпульсу). Залежно від того, який з параметрів послідовності імпульсів змінюється при змінюванні модулюючого (вхідного) сигналу, розрізняють такі види імпульсної модуляції: амплітудно-імпульсну (АІМ), широтно-імпульсну (ШІМ) і часово-імпульсну (ЧАІМ). Часово-імпульсна модуляція, своєю чергою, поділяється на два види: фазоімпульсну (ФІМ) і частотно-імпульсну (ЧІМ).

Крім того, розрізняють два роди модуляції залежно від того, чи змінюється модульований параметр протягом часу існування імпульсу. Якщо модульований параметр не змінюється, то імпульсна модуляція належить до *першого роду* (ІМ I), якщо ж модульований параметр змінюється відповідно до поточного значення модулюючого сигналу, то до *другого роду* (ІМ II). Залежно від виду і роду імпульсної модуляції імпульсні елементи підрозділяються на *амплітудні, широтні і часові першого або другого роду*.

Суть різних видів модуляції ілюструє рис. 10.2.

Під час амплітудно-імпульсної модуляції першого роду (АІМ I) вхідний безперервний сигнал $x_{\text{вх}}$ (рис. 10.2, а) перетворюється в послідовність імпульсів $x_{\text{ім}}$ (рис. 10.2, б) з періодом повторення T_n . Тривалість імпульсів γT_n стала, а амплітуда A пропорційна значенню вхідного сигналу в моменти виникнення імпульсів (моменти квантування).

Під час амплітудно-імпульсної модуляції другого роду (АІМ II) амплітуда імпульсів змінюється протягом часу їх існування відповідно до змінювання вхідного сигналу (рис. 10.2, в).

Під час широтно-імпульсної модуляції першого роду (ШІМ I) амплітуда A і період повторення T_n залишаються незмінними, а ширина імпульсів γT_n змінюється пропорційно значенням вхідного сигналу в моменти квантування (рис. 10.2, г).

Під час фазоімпульсної модуляції (ФІМ I) амплітуда і ширина вихідних імпульсів залишаються сталими, а змінюється дефа за часом (фаза) αT_n відносно моментів квантування $0, T_n, 2T_n, \dots$ відповідно до значення вхідного сигналу в ці моменти (рис. 10.2, д).

Залежно від виду і роду модуляції імпульсних САК бувають трьох типів: амплітудно-імпульсні (АІС), широтно-імпульсні (ШІС) і часово-імпульсні (ЧАІС).

Імпульсні САК різних типів, особливо амплітудно-імпульсні та широтно-імпульсні, набули досить значного поширення в автоматизованих електронних приводах.

Інформація про вхідний сигнал з виходу імпульсного елемента надходить лише в дискретні моменти часу, тому в імпульсних САК відбувається деяка втрата інформації та їхня точність у загальному випадку нижча порівняно з точністю безперервних систем. Проте переривний характер

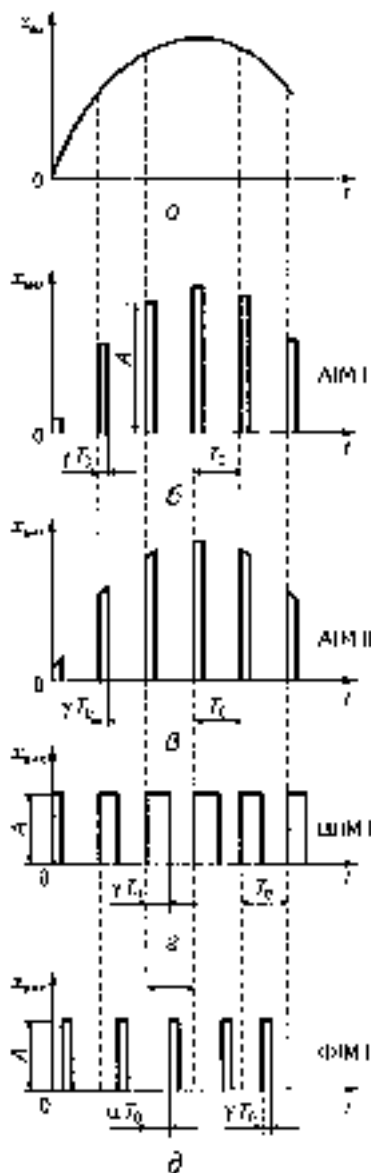


Рис 10.2

передачі сигналів між деякими елементами системи зумовлює і пиліку переваг імпульсних САК.

1. Можливість багатоточкового керування, тобто використання одного імпульсної САК для керування процесами в кількох об'єктах чи рахунок того, що ці об'єкти по черзі підключаються до одного керуючого пристрою. Це зумовлено тим, що система керування одним із об'єктів замкнута лише певну частину періоду квантування, і тому решту часу можна використати для керування іншими об'єктами.

2. Можливість використання одного каналу зв'язку для різних САК з об'єктами, віддаленими від імпульсних керуючих пристроїв. Це реалізується за рахунок логічного з'єднання об'єктів та керуючих пристроїв за час періоду квантування.

3. Підвищена захищеність від перешкод. Зумовлена вона тим, що інформація передається у вигляді коротких імпульсів, більшу частину періоду квантування САК залишається розімкнутою і не сприймає перешкод.

Імпульсну систему можна вважати безперервною, в якій з частотою квантування відбувається розмикання контуру регулювання. Якщо частота квантування значно перевищує смугу пропускання безперервної частини системи, то САК у цілому практично не реагує на кожний окремішній імпульс і поводить як безперервна система, що сприймає тільки низькочастотний модулюючий сигнал. Для дослідження таких імпульсних САК можна користуватися всіма методами аналізу і синтезу безперервних систем. Наприклад, у системах керування електроприводами широко застосовуються напівпровідникові перетворювачі для живлення силових кат електродвигунів. За принципом дії ці перетворювачі є імпульсними (використовуються фазоімпульсна і широтно-імпульсна модуляції), однак частота квантування настільки висока, що в цілому такі системи електропривода розглядаються як безперервні.

Якщо частота квантування не досить висока порівняно зі смугою пропускання безперервної частини системи, то система встигає реагувати на кожний окремішній імпульс, і наявність квантування істотно впливає на динаміку системи. Для дослідження таких систем вже не можна користуватися методами, розробленими для безперервних систем, бо необхідно враховувати дискретний характер сигналів. Для цього застосовується спеціалізований математичний апарат, що оперує з

поняттями решітчастих функцій, різницевих рівнянь з дискретного перетворення Лапласа.

Імпульсні системи бувають *лінійними* і *нелінійними*. Імпульсна система є лінійною, якщо безперервний частини системи та імпульсний елемент описуються лінійними рівняннями. Імпульсний елемент, що здійснює амплітудно-імпульсну модуляцію, зазвичай описується лінійними різницевими рівняннями, тому системи з АІМ можуть бути лінійними. Процес широтно-імпульсної та часово-імпульсної модуляції описується нелінійними рівняннями, що зумовлено незалежністю амплітуди вихідних імпульсів від величини вхідного сигналу, тому системи з ІШМ і ЧАІМ є принципово нелінійними.

Основою уявля є даній главі приділена лінійним системам з АІМ.

10.3

Математичне описання

імпульсного елемента систем з АІМ

Імпульсний елемент у системах з АІМ перетворює безперервний вхідний сигнал у послідовність імпульсів, ширина і частота повторення яких сталі, а амплітуда пропорційна величині вхідного сигналу в моменті квантування.

Імпульсний елемент характеризується такими параметрами:
коефіцієнт передачі

$$k_i = A/x_{\text{вх}},$$

де A — висота (амплітуда) вихідного імпульсу в черговому періоді повторення імпульсів; $x_{\text{вх}}$ — величина сигналу на вход імпульсного елемента на початку того самого періоду повторення імпульсів;

період повторення імпульсів T_n , або частота

$$\omega_n = 2\pi/T_n;$$

прива́дність імпульсів $\tau = \gamma T_n$ або відносна прива́дність $\gamma = \tau/T_n$.

форма імпульсу — прямокутна, трикутна, експоненціальна, синусоїдальна тощо;

світлоточна характеристика — залежність модульованого параметра A від вхідного модулюючого сигналу $x_{\text{вх}}$. Для лінійних систем $k_i = \text{const}$ і $A = k_i x_{\text{вх}}$.

При математичному описуванні реальний імпульсний елемент подається у вигляді послідовного з'єднання *найпростішого імпульсного елемента 1* і *формування кола (формування імпульсів) 2* (рис. 10.3).

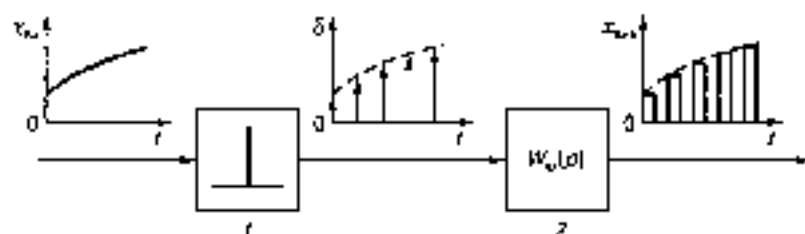


Рис. 10.3

Найпростіший імпульсний елемент перетворює безперервний вхідний сигнал на імпульси з нескінченно малою тривалістю і нескінченно великою амплітудою, площі яких пропорційні вхідному сигналу в моменти квантування, тобто вихідними сигналами цього елемента будуть δ -імпульси, площі яких не дорівнюють одиниці, а є мірою вхідного сигналу в моменти квантування δ -Імпульси на рис. 10.3 умовно зображені стрілками, довжина яких відповідає площі імпульсів. Найпростіший імпульсний елемент називається також *ідеальним імпульсним елементом*, або δ -імпульсним елементом, а його вихідний сигнал *ідеальною імпульсною функцією*.

Формувач перетворює δ -імпульси на вході на реальні імпульси. Реакція ланки на одиничні δ -імпульси становить імпульсну перехідну, або наталу функцію $w(t)$. Зображенням Лапласа вихідної функції є передаточна функція

$$W_0(s) = L\{w_0(t)\}. \quad (10.1)$$

Оскільки на вхід формувача подаються δ -імпульси, його вихідні імпульси є вихідними функціями. Тому для визначення передаточної функції формувача достатньо знайти зображення Лапласа функції, що описує форму реального вихідного імпульсу.

Нехай, наприклад, вхідний сигнал реального імпульсного елемента є послідовністю одиничних прямокутних імпульсів, ширина яких T , — γT_0 . Вихідна функція формувача $w_0(t)$ становить прямокутний імпульс, який можна подати у вигляді різниці додатної і від'ємної ступінчастих функцій, зсунутих на час γT_0 (рис. 10.4), тобто

$$w_p(t) = 1(t) - 1(t - \gamma T_0),$$

Звіден згідно з (10.1)

$$W_p(s) = L\{1(t) - 1(t - \gamma T_0)\} = \\ = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\gamma T_0 s}}{s} = \frac{1 - e^{-\gamma T_0 s}}{s}. \quad (10.2)$$

При $\gamma = 1$ сигнал на виході імпульсного елементу збігається з промігом усього періоду T_0 повторення імпульсів. Такий імпульсний елемент називається *екстраполятором з фіксацією на період*, або *екстраполятором нульового порядку*.

Передаточна функція формула-ча при $\gamma = 1$

$$W_p(s) = \frac{1 - e^{-T_0 s}}{s}. \quad (10.3)$$

Якщо тривалість імпульсу значно менша, ніж період повторення ($\gamma \ll 1$), то передаточну функцію формула-ча можна подати у вигляді

$$W_p(s) = \gamma T_0. \quad (10.4)$$

Справді, розклавши чисельник виразу (10.2) в ряд Маклорена поблизу точки $\gamma = 0$, дістанемо

$$1 - e^{-\gamma T_0 s} = \\ = 1 - \left[1 - \gamma T_0 s + \frac{(-\gamma T_0 s)^2}{2!} - \dots \right].$$

Якщо $\gamma \ll 1$, то ряд швидко збігається і можна обмежитися пер-ними двома членами, тобто

$$1 - e^{-\gamma T_0 s} \approx \gamma T_0 s,$$

звідки безпосередньо дістанемо вираз (10.4).

Для прямокутного імпульсу, що має амплітуду k_1 ,

$$W_p(s) = k_1 \frac{1 - e^{-\gamma T_0 s}}{s}. \quad (10.5)$$

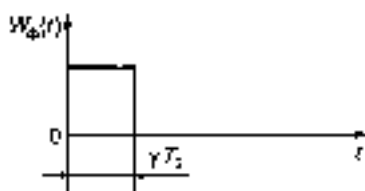
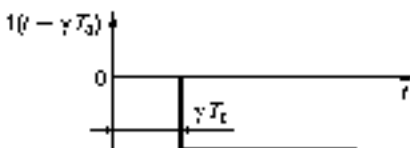
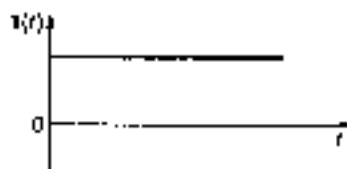


Рис. 10.4

Якщо $\gamma \ll 1$, то

$$W_{\Phi}(s) \approx k \gamma T_0. \quad (10.6)$$

- **Приклад 10.1.** Випускся на вхід реального згугуєкого елемента мають трикутну форму (рис. 10.5, а). Визначити передаточну функцію формулами

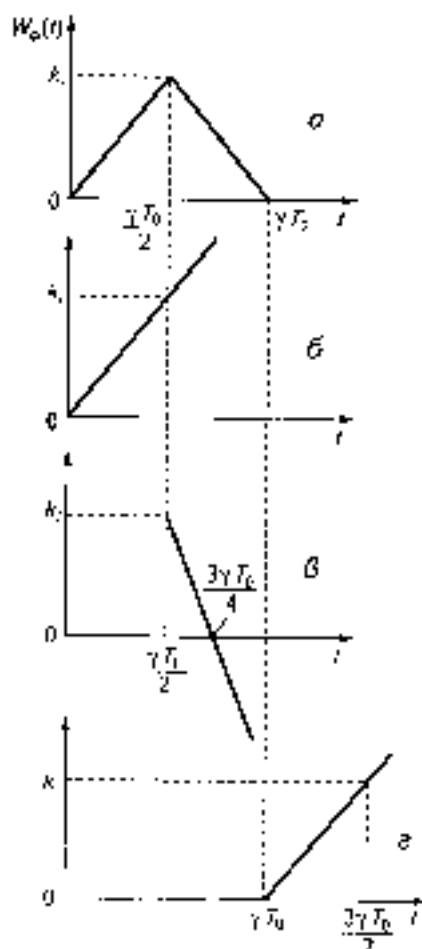


Рис. 10.5

Розв'язання. Вихідний сигнал формування можна подати у вигляді суми трьох сигналів, графіки яких зображено на рис. 10.5, б–г. Отже,

$$w_0(t) = \frac{2k_1}{\gamma T_0} t - \frac{4k_1}{\gamma T_0} t \cdot \left(1 - \frac{\gamma T_0}{2}\right) + \frac{2k_1}{\gamma T_0} t \cdot 1(t - \gamma T_0).$$

Звідси

$$\begin{aligned} W_0(s) = L\{w_0(t)\} &= \frac{2k_1}{\gamma T_0} \frac{1}{s^2} - \frac{4k_1}{\gamma T_0} \frac{1}{s^2} e^{-\frac{\gamma T_0}{2}s} + \\ &+ \frac{2k_1}{\gamma T_0} \frac{1}{s^2} e^{-\gamma T_0 s} = k_1 \frac{1}{\gamma T_0 s^2} \left[2 - 2\left(1 - e^{-\frac{\gamma T_0}{2}s}\right) + e^{-\gamma T_0 s} \right]. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Під час аналізу імпульсних систем часто замість реального часу t використовується відносний час $\tilde{t} = t/T_0$. У цьому разі час вимірюється кількістю періодів повторення імпульсів T_0 . Відносний період повторення імпульсів T_0 дорівнює одиниці.

Введемо позначення

$$L\{w(\tilde{t})\} = \int_0^\infty e^{-q\tilde{t}} w(\tilde{t}) d\tilde{t} = W(q),$$

де $q = T_0 s$ — комплексна змінна перетворення Лапласа у відносному часі.

Визначимо співвідношення між $W(q)$ і $W(s)$.

За теоремою про зміну масштабу

$$L\{w(\tilde{t} T_0)\} = \frac{1}{T_0} W\left(\frac{q}{T_0}\right),$$

але оскільки $\tilde{t} T_0 = t$, то

$$L\{w(\tilde{t} T_0)\} = L\{w(t)\} = W(s).$$

Тому для одержання зображення $W(q)$ функції $w(\tilde{t})$ у відносному масштабі часу необхідно в зображенні $W(s)$ функції $w(t)$ зруманит з заміни на q/T_0 , а саме зображення поділити на T_0 .

- **Приклад 10.2.** Визначити передаточну функцію $W_A(q)$ формування передаточну функцію злого $W_A(s)$ аналогічно до прикладу 10.1.

Розв'язання. Замінивши у формулі (10.7) аргумент s на q/T_n і помноживши $W_4(s)$ на T_n , дістаємо

$$W_4(q) = \frac{1}{T_n} k_1 \frac{2 \left(1 - e^{-\frac{q T_n}{2\tau_n}} \right)^2}{q T_n \frac{q^2}{T_n^2}} = k_1 \frac{2 \left(1 - e^{-\frac{q T_n}{2\tau_n}} \right)^2}{q q^2}.$$

10.4

Математичний апарат

для дослідження імпульсних САК

Решітчасті функції. Вихідний сигнал імпульсного елемента визначається величиною вхідного сигналу тільки в дискретні моменти часу на початку кожного періоду повторення імпульсів і падає не залежить від змінювання вхідного сигналу до початку наступного періоду повторення. Тому достатньо знати значення вхідного сигналу лише в дискретні моменти часу, тобто в моменти nT_n , де n — ціле число. На підставі цього безперервну функцію на вході імпульсного елемента можна замінити так званою решітчастою функцією. *Решітчастою* називається функція дискретного аргументу, значення якої визначені в дискретні моменти часу $t = nT_n$. Між цими моментами функція дорівнює нулю.

Решітчасту функцію звичайно позначають $f[nT_n]$ або, якщо перейти до відносного часу, $f[n]$. Заміна безперервної функції решітчастою

$$f[nT_n] = f(t)|_{t=nT_n}$$

або

$$f[n] = f(t)|_{t=nT_n}$$

показується на рис. 10.6.

Використовується також поняття *зміненої решітчастої функції*. Аргумент цієї функції $t = nT_n + \Delta t$, тобто дискретні значення функції вибираються для моментів часу, змінених на Δt відносно nT_n . Зміщення $\Delta t = \text{const}$ може бути додатним або від'ємним за умови, що

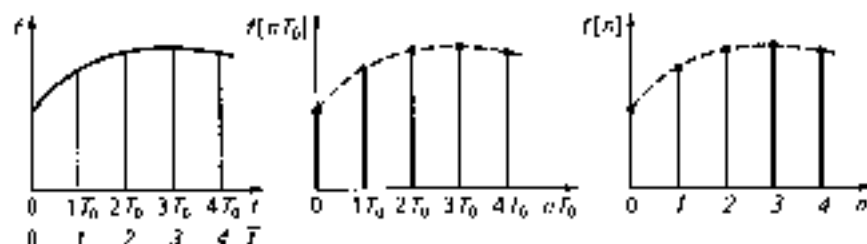


Рис. 10.6

$|\Delta t| < T_0$. Змішена решітчаста функція позначається $f[nT_0, \Delta t]$ або, при використанні відносного часу, — $f[n, \varepsilon]$, де $\varepsilon = \Delta t/T_0$ — відносне змішення. Надалі врахуємо, що у решітчастій функції $f[n, \varepsilon]$ аргумент $n \geq 0$ і параметр $\varepsilon > 0$. Якщо необхідно розглянути функцію $f[n, \varepsilon_s]$ з від'ємним параметром $\varepsilon_s < 0$, то дискретний час можна подати у вигляді $[(n-1) - (1+\varepsilon_s)]T_0 = [(n-1) + \varepsilon]T_0$. Тоді решітчасту функцію можна записати у вигляді $f[(n-1), \varepsilon]$, де $\varepsilon = 1 + \varepsilon_s$.

Різниці решітчастих функцій та різницеві рівняння

Різниці решітчастих функцій є аналогами похідних безперервних функцій.

Різниця першого порядку (перша різниця) решітчастої функції $f[n]$

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n]. \quad (10.8)$$

Аналогія між першою різницею і першою похідною пояснюється тим, що перша різниця, як і перша похідна, по ε n дорівнює відношенню приросту функції до приросту аргументу $\Delta f[n]/\Delta n$ або через те, що $\Delta n = (n+1) - n = 1$, перша різниця дорівнює $\Delta f[n]$.

Різниця другого порядку (друга різниця) обчислюється за формулою

$$\Delta^2 f[n] = \Delta f[n+1] - \Delta f[n] \quad (10.9)$$

або, якщо розкрити перші різниці за формулою (10.8),

$$\Delta^2 f[n] = f[n+2] - 2f[n+1] + f[n]. \quad (10.10)$$

Різниця k-го порядку має вигляд

$$\begin{aligned} \Delta^k f[n] &= \Delta^{k-1} f[n+1] - \Delta^{k-1} f[n] \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i C_{k-1}^i f[n+k-i]. \end{aligned} \quad (10.11)$$

де $C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$ — коефіцієнти бінома Ньютона.

Різниці, що визначаються виразами (10.8) — (10.11), називаються *першими*. Є також *другі* різниці:

$$\nabla^2 f[n] = f[n] - f[n-1]; \quad (10.12)$$

друга

$$\begin{aligned} \nabla^2 f[n] &= \nabla f[n] - \nabla f[n-1] = \\ &= f[n] - 2f[n-1] + f[n-2]; \end{aligned} \quad (10.13)$$

k -го порядку

$$\begin{aligned} \nabla^k f[n] &= \nabla^{k-1} f[n] - \nabla^{k-1} f[n-1] = \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i f[n-i]. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Аналогами інтеграла безперервної функції в межах від 0 до t для решітчастої функції $f[n]$ є неповна сума

$$\sigma[n] = \sum_{m=0}^{n-1} f[m] = \sum_{i=0}^n f[n-i] \quad (10.15)$$

і повна

$$\sigma_n[n] = \sigma[n] + f[n] = \sum_{m=0}^n f[m] = \sum_{i=0}^n f[n-i]. \quad (10.16)$$

У повній сумі, на відміну від неповної, значення $f[n]$ в момент часу $t = nT_0$ також бере участь у формуванні результату.

Аналогами диференціальних рівнянь є *різницеві рівняння (рекурсії в кінцевих різницях)*. Лінійні різницеві рівняння зі статичні коефіцієнтами при використанні прямих різниць мають вигляд

$$b_0 \Delta^n y[n] + b_1 \Delta^{n-1} y[n] + \dots + b_n y[n] = f[n], \quad (10.17)$$

де $f[n]$, $y[n]$ — відповідно задана і шукана решітчасті функції.

Якщо $f[n] = 0$, то рівняння (10.17) називається *однорідним*.

Враховуючи вираз (10.11), рівняння (10.17) можна записати у вигляді рекурентного рівняння через ті самі значення решітчастих функцій:

$$a_n y[n+m] + a_1 y[n+m-1] + \dots + a_n y[n] = f[n], \quad (10.18)$$

де

$$a_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} b_i C_{k-i}^{k-1};$$

$$C_{m-k}^{m-i} = \frac{(m-i)!}{(k-i)!(m-k)!}.$$

Для розв'язування різницевих рівнянь можна задати початкові умови у вигляді значень шуканої функції $y[n]$ та її різниці відповідно до різниці $(m-1)$ -го порядку, якщо рівняння подано у вигляді (10.17), або у вигляді значень цієї функції в точках $y[0], y[1], \dots, y[m-1]$ для рівняння типу (10.18).

Різницеві рівняння вигляду (10.17) можна розглядати як рекурентні співвідношення, які дають змогу обчислювати значення $y[n]$ при $n = 1, 2, 3, \dots$ для заданих початкових умов, а рівняння вигляду (10.18) — значення $y[n+m]$ при $n = 0, 1, 2, \dots$.

Наприклад, якщо задано різницеве рівняння третього порядку

$$a_0 y[n+3] + a_1 y[n+2] + a_2 y[n+1] + a_3 y[n] = f[n]$$

і відомі функції $f[n]$ та початкові умови $y[0], y[1]$ і $y[2]$, то дискретні значення функції обчислюються так:

при $n = 0$

$$a_0 y[3] + a_1 y[2] + a_2 y[1] + a_3 y[0] = f[0]$$

і

$$y[3] = (f[0] - a_1 y[2] - a_2 y[1] - a_3 y[0]) / a_0;$$

при $n = 1$

$$a_0 y[4] + a_1 y[3] + a_2 y[2] + a_3 y[1] = f[1]$$

і

$$y[4] = (f[1] - a_1 y[3] - a_2 y[2] - a_3 y[1]) / a_0.$$

і т. д.

Різницеві рівняння можна розв'язувати також класичним і операторним методами, аналогічними методам розв'язування диференціальних рівнянь. З операторних методів найпоширенішим є метод, що ґрунтується на використанні z -перетворення.

Основи z -перетворення. Дискретну функцію $f[nT_n]$, якщо вважати, що $f = 0$ при $t < 0$, можна аналітично записати так:

$$f[nT_n] = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) \delta(t - nT_n), \quad (10.19)$$

де $f(t)$ — породжуюча безперервна функція, $\delta(t - nT_0)$ — зміщена на час nT_0 дельта-функція.

Перетворення Лапласа від функції (10.19) має вигляд

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \int_0^{\infty} f(nT_0) e^{-st} dt = \int_1^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} f(nT_0) \delta(t - nT_0) \right] e^{-st} dt = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) \delta(t - nT_0) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) e^{-s n T_0}. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Це перетворення називається *дискретним перетворенням Лапласа*. У символічній формі воно записується так:

$$F^*(s) = D\{f|nT_0\}.$$

Якщо аргументом безперервної функції є візитковий час $t = qT_0$, то формула дискретного перетворення

$$F^*(q) = D\{f|n\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-qn}, \quad (10.21)$$

де $q = sT_0$ — комплексне число, що називається *параметром дискретного перетворення Лапласа*.

Дискретне перетворення для змощених решітчастих функцій

$$F^*(q, \varepsilon) = D\{f[n, \varepsilon]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n, \varepsilon] e^{-qn}. \quad (10.22)$$

Зображення $F^*(s)$ і $F^*(q)$ є трансцендентними функціями від s і q , що робить неможливим застосування звичайних методів аналізу в площині s або q для дослідження імпульсних систем. Прийнятним є так зване *z-перетворення*. Формули z-перетворення виписують з формул (10.21) і (10.22), якщо виконати підстановку $e^q = z$.

$$F(z) = Z\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}; \quad (10.23)$$

$$F(z, \varepsilon) = Z\{f[n, \varepsilon]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n, \varepsilon] z^{-n}. \quad (10.24)$$

Формули z-перетворення можна записати також для безперервної породжуючої функції у вигляді

10.4. Числовий варіант:
 Для дискретної послідовності САВ

$$\begin{cases} F(z) = Z\{f(t)\}, t = nT_s, \\ F(z, \varepsilon) = Z_\varepsilon\{f(t)\}, t = (n + \varepsilon)T_s, \end{cases} \quad (10.25)$$

де $n = 0, 1, 2, \dots$

□ **Приклад 10.3.** Визначити z -перетворення одиничної ретів'яної функції $f[n] = 1[n]$

Розв'язання. За формулою (10.23)

$$\begin{aligned} F(z) = Z[1[n]] &= \sum_{n=0}^{\infty} 1[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = \\ &= z^0 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \end{aligned}$$

Сума цієї геометричної прогресії

$$Z[1[n]] = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}. \quad (10.26)$$

z -Перетворення деяких функцій подано в табл. 10.1.

Таблиця 10.1

Безперервна пороз-жувача функція $f(t)$	Ретів'яна функція $f[n]$	Перетворення Лапласа $F(s)$	z -Перетворення $F(z)$	Множникове z -перетворення $F(z, \varepsilon)$
$1(t)$	$1[n]$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z - 1}$	$\frac{z}{z - 1}$
t	nT_s	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_s z}{(z - 1)^2}$	$\frac{T_s z}{(z - 1)^2} + \frac{\varepsilon T_s z}{z - 1}$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{2}(nT_s)^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T_s^2 z(z + 1)}{2(z - 1)^3}$	$\frac{T_s^2 z(z + 1)}{2(z - 1)^3} + \frac{T_s^2 z \varepsilon}{(z - 1)^2} + \frac{4\varepsilon T_s \varepsilon^2 z}{24(z - 1)}$
t^3	$(nT_s)^3$	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{T_s^3 z(z^2 + 4z + 1)}{24(z - 1)^4}$	$\frac{T_s^3 z}{3!} \left[\frac{\varepsilon^3}{z - 1} + \frac{4\varepsilon^2}{(z - 1)^2} + \frac{3\varepsilon(z + 1)}{4(z - 1)^3} + \frac{z^3 + 4z^2 + 1}{4(z - 1)^4} \right]$

Загальні таблиці. Гл. 10

Білінеарна перетворення функція $f(z)$	Решітчаста функція $F(z)$	Перетворення Лангаса $F(s)$	z Перетворення $F(z)$	Модифіковане z -перетворення $F(z, c)$
e^{-st}	e^{-sT_s}	$\frac{1}{s + a}$	$\frac{z}{z - d}$, $d = e^{-aT_s}$	$\frac{zd^c}{z - d}$, $d = e^{-aT_s}$
$1 - e^{-st}$	$1 - e^{-sT_s}$	$\frac{a}{s(s + a)}$	$\frac{(1 - d)z}{(z - 1)(z - d)}$, $d = e^{-aT_s}$	$\frac{z}{z - 1} - \frac{zd^c}{z - d}$, $d = e^{-aT_s}$
$\sin \beta t$	$\sin \beta nT_s$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{z \sin \beta T_s}{z^2 - 2z \cos \beta T_s + 1}$	$\frac{z^2 \sin \gamma \beta T_s + z \sin \gamma \beta T_s}{z^2 - 2z \cos \beta T_s + 1}$, $\gamma = 1 - c$

Розглянемо основні властивості z -перетворення стосовно незмішених решітчастих функцій. Ці ж властивості є справедливими також для змішених функцій $f[d, e]$, крім випадків, для яких було зроблено застереження.

1. *Властивість лінійності.* Зображення лінійної комбінації решітчастих функцій дорівнює такій самій лінійній комбінації їх зображень. Отже, якщо решітчаста функція має вигляд

$$f[n] = \sum_{i=1}^N C_i f_i[n], \quad (10.27)$$

то її зображення

$$F(z) = \sum_{i=1}^N C_i F_i(z). \quad (10.28)$$

2. *Запізнювання і попередження часу за часом на ціле число періодів.* Для решітчастої функції, жунутої праворуч (запізнюючої) на m періодів,

$$Z\{f[n - m]\} = z^{-m}F(z), \quad (10.29)$$

де $F(z)$ — зображення функції $f[n]$

Для релігійної функції, зсуватої ліворуч (випереджуючої) на m періодів,

$$Z\{f[n+m]\} = z^{-m} \left[F(z) - \sum_{k=-\infty}^{-1} f[k] z^{-k} \right]. \quad (10.30)$$

Якщо $f[n] = 0$ при $n = 0, 1, 2, \dots, m-1$, то

$$Z\{f[n+m]\} = z^{-m} F(z). \quad (10.31)$$

3. *Множення оригіналу на експоненту e^{an}* . Зображення перетворює релігійну функцію

$$Z\{e^{an} f[n]\} = F\left(\frac{z}{d}\right), \quad (10.32)$$

де $d = e^{aT_s}$, а зміщеної

$$Z\{e^{an} f[n, \epsilon]\} = d^{\epsilon} F\left(\frac{z}{d}, \epsilon\right). \quad (10.33)$$

4. *Зображення різниці (аналог зображення похідної)*. Для різниці k -го порядку маємо

$$Z\{\Delta^k f[n]\} = (z-1)^k F(z) - z \sum_{i=2}^{k-1} (z-1)^{i-1} \Delta^i f[0], \quad (10.34)$$

звідки для першої різниці ($k=1, v=0$)

$$Z\{\Delta f[n]\} = (z-1)F(z) - zf[0],$$

для другої

$$Z\{\Delta^2 f[n]\} = (z-1)^2 F(z) - z(z-1)f[0] - z\Delta f[0].$$

Якщо початкові умови нульові, тобто при $n=0$ функція $f[n]$ та її різниці до $(k-1)$ -ї включно дорівнюють нулю, то

$$Z\{\Delta^k f[n]\} = (z-1)^k F(z). \quad (10.35)$$

5. *Зображення суми (аналог зображення інтеграла)*. Зображення суми

$$Z\left\{\sum_{m=0}^{n-1} f[m]\right\} = Z\{\sigma[n]\} = \frac{F(z)}{z-1}. \quad (10.36)$$

6. *Початкове значення реліччастої функції.* При $n = 0$

$$f[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} f[n] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} F(z). \quad (10.37)$$

7. *Кінцеве значення реліччастої функції.* При $n = \infty$ значення реліччастої функції обчислюється за формулою

$$f[\infty] = \lim_{z \rightarrow 0} f[n] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z-1}{z} F(z). \quad (10.38)$$

8. *Згортка реліччастих функцій.* Якщо

$$Z\{f_1[n]\} = F_1(z) \text{ і } Z\{f_2[n]\} = F_2(z),$$

то

$$\begin{aligned} F_1(z)F_2(z) &= Z\left\{\sum_{v=0}^n f_1[v]f_2[n-v]\right\} = \\ &= Z\left\{\sum_{v=0}^n f_1[n-v]f_2[v]\right\}. \end{aligned} \quad (10.39)$$

9. *Зображення функції* $F(z) = F_1(e^{T/z})F_2(z)$:

$$Z\{F(z)\} = F_1(z)Z\{F_2(z)\}. \quad (10.40)$$

10. *Розв'язування різницевих рівнянь.* Послідовність розв'язування різницевих рівнянь методом z -перетворення аналогічна послідовності розв'язування диференціальних рівнянь при використанні перетворення Лапласа безперервних функцій. Спочатку треба перейти від різницевих рівнянь відносно оригіналів до алгебричних рівнянь відносно їх z -зображень, потім визначити z -зображення шуканої функції, розв'язавши знайдене алгебричне рівняння, і нарешті перейти від z -зображення до оригіналу — шуканої реліччастої функції.

Накінці, наприклад, різницеве рівняння має вигляд (10.18)

$$a_1 y[n+m] + a_2 y[n+m-1] + \dots + a_n y[n] = f[n]$$

Розв'яжемо це рівняння за початкових умов $y[0] = y_0, y[1] = y_1, \dots, y[m-1] = y_{m-1}$.

За функцією-оригіналом $f[n]$ визначимо $F(z) = Z\{f[n]\}$. Позначимо $Y(z) = Z\{y[n]\}$, потім, з урахуванням виразу (10.39), виписавши z -перетворення лівої частини рівняння (9.18) і подавши його у вигляді

$$A(z)Y(z) = F(z) + M_n(z), \quad (10.41)$$

де $A(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ — характеристичний поліном; $M(z) = b_1 z^n + b_2 z^{n-1} + \dots + b_n$ — поліном, коефіцієнти якого залежать від початкових умов. Для нульових початкових умов $y_0 = y_1 = \dots = y_{n-1} = 0$ $M_n(z) = 0$.

З виразу (10.41) знаходимо зображення шуканої функції

$$Y(z) = \frac{F(z)}{A(z)} + \frac{M_n(z)}{A(z)}$$

і переходимо до оригіналу

$$y[n] = Z^{-1} \left\{ \frac{F(z)}{A(z)} + \frac{M_n(z)}{A(z)} \right\}.$$

Для переходу до оригіналу зображення потрібно подати у вигляді суми простих дробів, для яких оригінали можна знайти в таблицях з-перетворень функцій часу (див. табл. 10.1), і записати оригінал $y[n]$ як суму оригіналів, що відповідають простим дробам.

Значення функції $y[n]$ в дискретних точках можна обчислити без знаходження аналітичного виразу для неї, якщо розкласти зображення $Y(z)$ в ряд Лорана

$$Y(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + \dots \quad (10.42)$$

Справді, з формули (10.23) дістаємо

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n] z^{-n} = y[0] + y[1] z^{-1} + y[2] z^{-2} + \dots \quad (10.43)$$

З порівняння рядів (10.42) і (10.43) випливає, що $y[0] = c_0$, $y[1] = c_1$, $y[2] = c_2$ і т. д.

Найзручнішим способом розкладання в ряд Лорана дрібнорациональних функцій є ділення чисельника на знаменник.

□ **Приклад 10.4.** За відомим з-перетворенням

$$Y(z) = \frac{3z}{z^2 - 0,7z + 0,1}$$

визначити оригінал $y[n]$.

Розв'язання. Розкладемо $Y(z)$ на суму простих дробів. Для цього визначимо корені рівняння $z^2 - 0,7z + 0,1 = 0$. Маємо $z_1 = 0,5$ і $z_2 = 0,2$, тоді

$$F(z) = \frac{3z}{(z - 0,5)(z - 0,2)} = 10 \left(\frac{z}{z - 0,5} - \frac{z}{z - 0,2} \right).$$

З табл. 10.1 знаходимо, що доданку $z/(z - 0,5)$ відповідає оригінал $e^{0,5n}$, де $e^{0,5} = d = 1,5$, тобто оригінал має вигляд $0,5^n$. Аналогічно доданку $z/(z - 0,2)$ відповідає оригінал $0,2^n$. Отже, шукана реєтніаста функція має вигляд

$$y[n] = 10(0,5^n - 0,2^n).$$

Звідси знайдемо дискретні значення функції $y[n]$: $y[0] = 0$; $y[1] = 3$; $y[2] = 2,1$; $y[3] = 1,17$ і т. д.

Визначимо тепер дискретні значення функції $y[n]$, розкладавши зображення $Y(z)$ в ряд Лорана діленням чисельника на знаменник.

$$\begin{array}{r} -3z \\ \hline z - 0,5z + 0,1 \end{array} \quad \begin{array}{r} z^2 - 0,7z + 0,1 \\ \hline z^2 - 2,1z^2 + 1,17z^3 + \dots \\ \hline 2,1 - 0,3z^{-1} \\ \hline 2,1 - 1,47z^{-1} + 0,21z^{-2} \\ \hline 1,17z^{-1} - 0,2z^{-2} \\ \hline 1,17z^{-1} - 0,819z^{-2} + 0,117z^{-3} \end{array}$$

Отже,

$$Y(z) = 0 + 3z^{-1} + 2,1z^{-2} + 1,17z^{-3} + \dots$$

тобто $y[0] = 0$; $y[1] = 3$; $y[2] = 2,1$; $y[3] = 1,17$.

10.5

Передаюча функція розімкненої імпульсної системи

Під час дослідження імпульсних систем зовнішня для переноситися на вхід імпульсного елемента за правилком перенесення суматорів у безперервних системах, реальний імпульсний елемент подається у вигляді послідовного з'єднання ідеального імпульсного елемента і формувача (див. п. 10.3). Отже, структурна схема зводиться до вигляду, зображеного на рис. 10.7, а, де

$W_p(p), W_{\text{с.}}(p)$ — передаточні функції формувача і безперервної частини системи.

Формувач об'єднується з безперервною частиною системи в одну приведену безперервну частину з передаточною функцією

$$W_{\text{п.}}(p) = W_{\text{с.}}(p)W_p(p).$$

Структурна схема такої розімкнутої імпульсної системи має вигляд, зображений на рис. 10.7, б. Зірочка з індексом означає, що сигнал дискретний, тобто становить послідовність миттєвих імпульсів.



Рис. 10.7

Щоб визначити дискретну передаточну функцію розімкнутої системи, що складається з послідовно з'єднаних імпульсного елемента і безперервної частини, треба знайти передаточну функцію приведенної безперервної частини, а потім її з-ображення:

$$W(z) = Z\{W_{\text{п.}}(p)\}. \quad (10.44)$$

При нульових початкових умовах передаточні функції $W(p)$ і $W(z)$ формально збігаються і $Z\{W(z)\} = Z\{W(p)\}$, тому надалі при виконанні з-перетворення використовуватимемо співвідношення $q = pT_d$ і $z = e^s = e^{sT_d}$.

Передаточна функція $W_{\text{п.}}(p)$ залежить від форми імпульсу на виході імпульсного елемента через те, що $W_{\text{п.}}(p) = W_{\text{с.}}(p)W_{\text{ин.}}(p)$, а $W_{\text{ин.}}(p)$ визначається формою імпульсів. Найчастіше використовуються імпульсні елементи, що генерують короткі прямокутні імпульси, висотою яких дорівнює значенню $x[p]$, а тривалість становить γT_d (див. рис. 10.4), де $\gamma < 1$. У цьому разі передаточна функція формувача визначається формулою (10.2), а передаточна функція приведення безперервної частини — формулою

$$W_{\text{п.}}(p) = \frac{1 - e^{-\gamma T_d p}}{p} W_{\text{ин.}}(p).$$

Тоді згідно з (10.44) і (10.40)

$$\begin{aligned}
 W(z) &= Z \left\{ \frac{1 - e^{-\gamma T_0}}{p} W_{\text{in}}(p) \right\} = \\
 &= (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{W_{\text{in}}(p)}{p} \right\} = z^{-1} - 1 \left\{ \frac{W_{\text{in}}(p)}{p} \right\}.
 \end{aligned} \quad (10.45)$$

Вираз (10.45) можна подати і так:

$$W(z) = Z \left\{ \frac{W_{\text{in}}(p)}{p} \right\} - z^{-1} Z \left\{ \frac{W_{\text{in}}(p)}{p} \right\},$$

де $\varepsilon = 1 - \gamma$.

При $\gamma = 1$, коли імпульсний елемент є екстраполатором нульового порядку, вираз (10.45) матиме вигляд

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_{\text{in}}(p)}{p} \right\}. \quad (10.46)$$

За умови, що $\gamma \ll 1$, вираз (10.45) спрощується.

$$W(z) = Z \{ \gamma T_0 W_{\text{in}}(p) \} = \gamma T_0 Z \{ W_{\text{in}}(p) \}. \quad (10.47)$$

Для змешеної решітчастої функції маємо

$$W(z, \varepsilon) = \gamma T_0 Z_r \{ W_{\text{in}}(p) \}. \quad (10.48)$$

Під час визначення дискретної передаточної функції розімкнутої системи слід враховувати відмінність у визначенні дискретних і безперервних передаточних функцій послідовно з'єднаних ланок. Для безперервних систем передаточна функція послідовно з'єднаних ланок дорівнює добутку передаточних функцій цих ланок. Для імпульсних систем з одним імпульсним елементом на вході це правило не є справедливим, тобто

$$W(z) \neq \prod_{i=1}^k W_i(z). \quad (10.49)$$

Для визначення дискретної передаточної функції $W(z)$ необхідно спочатку знайти

$$W(p) = \prod_{i=1}^k W_i(p),$$

а потім здійснити z -перетворення

$$W(z) = Z \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} W_n(p) \right\}. \quad (10.50)$$

Проте в тому разі, коли кожна з послідовно з'єднаних ланок має на вході свій імпульсний елемент, загальну передаточну функцію можна знайти як добуток дискретних передаточних функцій, визначених для кожної ланки з власним імпульсним елементом, тобто

$$W(z) = \prod_{n=1}^k Z[W_n(p)], \quad (10.51)$$

де $W_n(p)$ — передаточна функція дискретного фільтра, тобто добуток передаточних функцій ланки і формулани імпульсного елемента цієї ланки.

При паралельному з'єднанні ланок дискретну передаточну функцію $W(z)$ можна визначити як суму дискретних передаточних функцій, що знайдені для кожної ланки окремо:

$$W(z) = \sum_{n=1}^k W_n(z). \quad (10.52)$$

□ **Приклад 10.5.** Визначити дискретну передаточну функцію $W(z)$ розімкнутої імпульсної системи, якщо передаточна функція безперервної частини

$$W_m(p) = \frac{k_1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

а імпульсний елемент генерує короткі прямокутні імпульси γ сс і T_0 періодом повторення T_0 . При розрахунку прийняти: $T_1 = 1$ с, $T_2 = 1$ с, $T_0 = 0,5$ с, $k_1 = 100$ с⁻¹; $\gamma = 0,01$.

Розв'язання. Згідно з виразом (10.47)

$$W(z) = \gamma T_0 Z \left\{ \frac{1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} \right\}.$$

Передаточну функцію $W_m(p)$ подано у вигляді суми простих дробів. Рівняння $p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)$ має один нульовий корінь $p_0 = 0$ і два дійсні: $p_1 = -1/T_1$; $p_2 = -1/T_2$, тому

$$\frac{k_1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} = \frac{k_1 R(p)}{p Q(p)} = k_1 \left[\frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + 1/T_1} + \frac{A_3}{p + 1/T_2} \right],$$

де

$$A_1 = \frac{R(0)}{Q(0)} = 1;$$

$$A_2 = - \left. \frac{R(p)}{p \frac{dQ(p)}{dp}} \right|_{p=r_1} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} = -2;$$

$$A_3 = \left. \frac{R(p)}{p \frac{dQ(p)}{dp}} \right|_{p=r_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = 1.$$

Отже,

$$W(z) = k_1 T_1 Z \left\{ \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + 1/T_1} + \frac{A_3}{p + 1/T_2} \right\} = Z \left\{ \frac{1}{p} - \frac{2}{p+1} + \frac{1}{p+2} \right\}.$$

За даними табл. 10.1 і з урахуванням лінійності дискретизації

$$W(z) = \left\{ \frac{z}{z-1} - \frac{2z}{z-d_1} + \frac{z}{z-d_2} \right\},$$

де

$$d_1 = e^{-T_1/T_1} = e^{-1} = 0,368;$$

$$d_2 = e^{-T_1/T_2} = e^{-2} = 0,135.$$

Після виконання необхідних перетворень остаточно маємо

$$W(z) = \frac{0,399z^2 + 0,147z}{z^3 - 1,503z^2 + 0,553z - 0,05}.$$

10.6

Передаюча функція замкнутої імпульсної системи

Розглянемо імпульсну систему, структурну схему якої наведено на рис. 10.7, а. Вважатимемо, що передаючу функцію розімкнутої системи визначено і в загальному випадку ($\varepsilon \neq 0$) вона становить $W(z, \varepsilon)$. Тоді z -зображення вихідної величини

$$Y(z, \varepsilon) = X(z, 0) W(z, \varepsilon) \quad (10.53)$$

Зображення похибки прийнято у вигляді $X(z, 0)$. Тому що імпульсний елемент реагує на похибку тільки в дискретні моменти часу $t = nT_s$, тобто при $\varepsilon = 0$.

Зображення похибки можна подати як різницю зображень заданої дії $F(z, 0)$ і вихідної величини $Y(z, 0)$:

$$X(z, 0) = F(z, 0) - Y(z, 0)$$

Через те, що $Y(z, 0) = X(z, 0)W(z, 0)$, маємо

$$X(z, 0) = F(z, 0) - X(z, 0)W(z, 0)$$

і

$$X(z, 0) = \frac{F(z, 0)}{1 + W(z, 0)} \quad (10.54)$$

Підставивши (10.54) у (10.53), отримаємо

$$Y(z, \varepsilon) = \frac{F(z, 0)W(z, \varepsilon)}{1 + W(z, 0)},$$

звідки знайдемо передаточну функцію замкнутої системи

$$W_c(z) = \frac{Y(z, \varepsilon)}{F(z, 0)} = \frac{W(z, \varepsilon)}{1 + W(z, 0)}. \quad (10.55)$$

Для незмінених дискретних функцій

$$W_c(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)}. \quad (10.56)$$

Передаточна функція замкнутої системи за похибкою записується так:

$$W_c(z) = \frac{X(z)}{F(z)} = \frac{1}{1 + W(z)}. \quad (10.57)$$

Передаточні функції $W(z)$, $W_c(z)$, $W_c(z)$ можуть використовуватися для оцінки стійкості та якості імпульсних систем.

Формулами (10.55) - (10.57) можна користуватися лише у разі, коли вихідна функція дорівнює нулю в момент $t = 0$. Для цього в системах з нескінченно короткими імпульсами у вигляді δ -функцій потрібно, щоб степінь полінома чисельника передаточної функції безперервної частини $W_{\text{em}}(p)$ був меншим степеня полінома знаменника

принаймні два. Якщо степінь полінома знаменника дорівнює степеню полінома чисельника або більший від нього лише на одиницю, то передаточна функція $W(z, \varepsilon)$ має розрив при $\varepsilon = 0$, тобто $W(z, -0) \neq W(z, +0)$. В таких випадках у дискретних передаточних функціях замкнених систем необхідно використовувати функцію $W(z, -0)$ або функцію $z^{-1}W(z, 1)$, що їм дорівнює.

В усіх інших випадках $W(z, -0) = z^{-1}W(z, 1) = W(z, +0)$.

Отже, для замкнutoї системи з одностороннім зворотним зв'язком (див. рис. 10.7, а) за будь-яких умов справедливими є формули

$$W_1(z) = \frac{W(z)}{1 + z^{-1}W(z, 1)} \quad (10.58)$$

$$W_1(z, \varepsilon) = \frac{W(z, \varepsilon)}{1 + z^{-1}W(z, 1)}. \quad (10.59)$$

Якщо зворотний зв'язок не односторонній (рис. 10.8), то

$$W_1(z) = \frac{W_1(z)}{1 + W_1W_2(z)}$$

$$W_1(z, \varepsilon) = \frac{W_1(z, \varepsilon)}{1 + W_1W_2(z)},$$

де

$$W_1(z) = Z\{W_1(p)\};$$

$$W_1W_2(z) = Z\{W_1(p)W_2(p)\}.$$

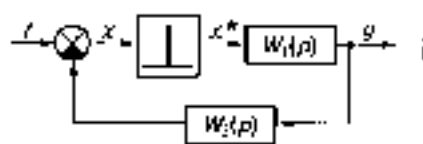


Рис. 10.8

10.7

Частотні характеристики імпульсних систем

Частотні характеристики імпульсних систем можна дістати за дискретними передаточними функціями за допомогою підстановки $z = e^{j\omega T}$, яка аналогічна підстановці $p = j\omega$ для частотних характеристик безперервних систем, тому що $z = e^{j\omega T} = e^{pT}$. Дуже часто при побудові частотних характеристик ко-

ристоктисл відносно частотою $\bar{\omega} = \omega T_0$, тобто підстановкою $z = e^{j\bar{\omega}}$.

За аналогією з безперервними системами амплітудно-фазові частотні характеристики імпульсних розімкнутої і замкнутої систем ви значаються за формулами

$$W^*(j\bar{\omega}) = A^*(\bar{\omega}) e^{j\varphi^*(\bar{\omega})}; \quad (10.60)$$

$$W_z^*(j\bar{\omega}) = A_z^*(\bar{\omega}) e^{j\varphi_z^*(\bar{\omega})}, \quad (10.61)$$

де $A^*(\bar{\omega})$, $A_z^*(\bar{\omega})$ — амплітудно-частотні характеристики розімкнутої і замкнутої систем; $\varphi^*(\bar{\omega})$, $\varphi_z^*(\bar{\omega})$ — фазові.

Через те, що $z = e^{j\bar{\omega}} = \cos \bar{\omega} + j \sin \bar{\omega}$, частотні характеристики імпульсних систем на відміну від безперервних є періодичними функціями частоти. При $\bar{\omega} = 2\pi/T_0$ відносна частота $\bar{\omega}$ дорівнює 2π , тому частотні характеристики імпульсних систем повторюються з частотою $\bar{\omega}_0$, тобто частотні функції та їхні характеристики повністю визначаються змінюванням відносної частоти $\bar{\omega}$ в інтервалі $-\pi \leq \bar{\omega} \leq \pi$ або $0 \leq \bar{\omega} < \pi$.

Частотні характеристики імпульсних систем, як і безперервних, визначають реакцію на гармонічні дії і застосовуються для дослідження стійкості та якості систем.

Розглянемо як приклад побудову амплітудної частотної характеристики розімкнутої імпульсної системи, що складається з імпульсного елемента і безперервної частини з передаточною функцією $K/(Tp+1)$ (рис. 10.9). Імпульсний елемент генерує короткі прямокутні імпульси тривалістю γT_0 , де $\gamma \ll 1$.

Дискретна передаточна функція згідно з (10.47)

$$W(z) = \gamma T_0 Z \left[\frac{K}{Tp+1} \right] = \gamma \frac{T_0 K}{T} Z \left[\frac{1}{p+1/T} \right].$$

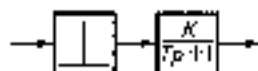


Рис. 10.9

Згідно з табл. 10.1

$$W(z) = \frac{\gamma T_0 K}{T} \frac{z}{z-d},$$

де $d = e^{-T_0/T}$.

Виконаємо підстановку $z = e^{j\bar{\omega}} = \cos \bar{\omega} + j \sin \bar{\omega}$ та звільнимися від уявного числа в знаменнику, тоді дістанемо

$$W(e^{j\bar{\omega}}) = \gamma \frac{T_0 K}{T} \frac{\cos \bar{\omega} + j \sin \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega} + j \sin \bar{\omega} - d} = \gamma \frac{T_0 K}{T} \frac{1 - d \cos \bar{\omega} - j d \sin \bar{\omega}}{1 - 2d \cos \bar{\omega} + d^2}$$

Виділяючи дійсну й уявну частини

$$W(e^{j\omega}) = U(\omega) + jV(\omega) = \\ = \frac{\gamma T_0 K}{T} \frac{1 - d \cos \omega}{1 - 2d \cos \omega + d^2} - j \frac{\gamma T_0 K}{T} \frac{d \sin \omega}{1 - 2d \cos \omega + d^2},$$

визначимо амплітудно-частотну характеристику

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \\ = \frac{\gamma T_0 K}{T} \frac{1}{\sqrt{1 - 2d \cos \omega + d^2}}. \quad (10.62)$$

Амплітудно-частотні характеристики, побудовані за формулою (10.62), зображено на рис. 10.10. Під час розрахунку характеристик прийнято такі значення параметрів: $K = 400$; $T = 1$ с; $\gamma = 0,05$, причому для характеристики на рис. 10.10, а прийнято $T_0 = 0,05$ с, а на

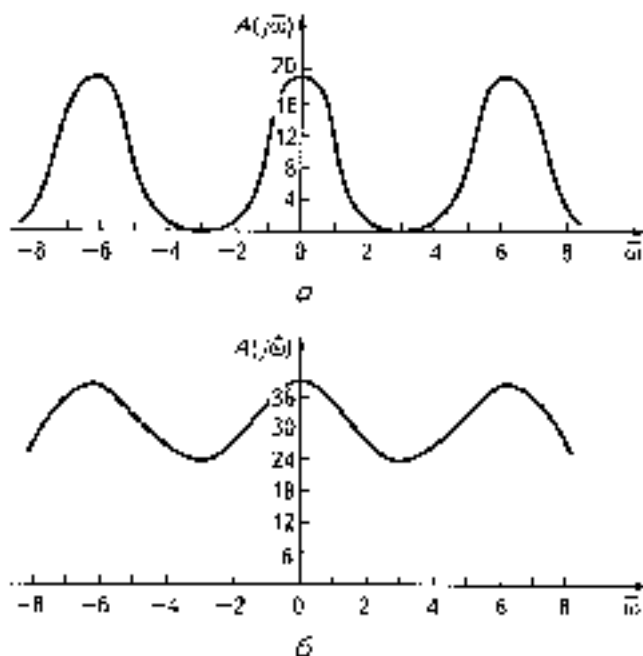


Рис 10.10

рис. 10.10, б — $T_c = 1,5$ с, тобто в першому випадку частота квантування перевищує смугу пропускання безперервної частини системи, а в другому — перебуває у цій смузі.

У граничному випадку, коли частота квантування нескінченно велика — $\omega_c \rightarrow \infty$ ($T_c \rightarrow 0$), вхідний гармонічний сигнал сприймається системою як безперервний і частотні характеристики імпульсної системи збігаються з частотними характеристиками безперервної частини системи. Те саме відбувається і тоді, коли частота квантування досить висока, але не нескінченно велика, тобто характеристики імпульсної системи є характеристиками безперервної частини системи, що періодично повторюються з частотою $\bar{\omega} = 2\pi$ (рис. 10.10, а). Отже, за досить великої частоти квантування імпульсна система еквівалентна безперерпній. Кількісно умови еквівалентності визначаються такими нерівностями:

$$\begin{cases} \omega_n \geq 2\omega_{\text{гн}}; \\ \omega_c \leq \omega_n - \omega_{\text{гн}}, \end{cases} \quad (10.63)$$

де $\omega_{\text{гн}}$ — смуга пропускання безперервної частини системи, ω_c — наближена частота вхідної дії.

Якщо умови (10.63) виконуються, то ефект квантування за часом можна не враховувати і розглядати імпульсну систему як безперервну. Ці умови становлять відому теорему Котельникова-Шеннона про умови неспотвореної передачі безперервного сигналу скінченною кількістю його дискретних значень стосовно систем з амплітудно-імпульсною модуляцією. Якщо умови (10.63) не виконуються, то частотна характеристика імпульсної системи істотно відрізняється від характеристики безперервної частини системи (рис. 10.10, б). У цьому разі властивості безперервної системи відрізнятимуться від властивостей імпульсної, що має таку саму безперервну частину. Під час дослідження таких систем не можна не враховувати ефект квантування, зокрема для математичного описання систем для користуватися дискретними передаточними функціями.

Частотні характеристики імпульсної системи можна визначити не тільки за передаточною функцією, а й побудувати графічно за відомою АФХ безперервної частини. Методика побудови базується на зв'язку АФХ імпульсної і безперервної систем, що визначається виразом

$$W^*(j\bar{\omega}) = k \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_{\text{гн}}[j(\bar{\omega} + 2\pi n)], \quad (10.64)$$

справедливим для систем з амплітудно-імпульсною модуляцією при $\gamma \rightarrow 0$.

Для переходу від характеристики $W_{\text{ам}}(j\omega)$ до $W_{\text{ам}}(j\bar{\omega})$ достатньо визначити відносну частоту $\bar{\omega}_i = \omega_i T_n$ і замість абсолютної частоти ω , на криву $W_{\text{ам}}(j\omega)$ нанести значення $\bar{\omega}_i$ (рис. 10.11, а). Щоб мати можливість урахувати від'ємні значення ϵ у виразі (10.64), криву $W_{\text{ам}}(j\omega)$ слід доповнити частиною, що відношався від'ємним частотам. Цю частину характеристики, симетричну відносно дійсної осі, зображено на рис. 10.11, а прихованою лінією.

Для побудови АФХ дискретної системи вибирають ряд значень $\bar{\omega}_i \leq \pi$ і позначають на частотній характеристиці $W(j\bar{\omega})$ точки, що відповідають частотам $\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_i - 2\pi, \bar{\omega}_i - 4\pi, \dots, \bar{\omega}_i + 2\pi, \bar{\omega}_i + 4\pi, \dots$. Сума векторів, проведених з початку координат до цих точок, визначає вектор характеристики $W^*(j\bar{\omega})$ без урахування коефіцієнта передачі імпульсного елемента k_1 . Для урахування k_1 достатньо змінити масштаб по осях координат для $W^*(j\bar{\omega})$ у k_1 разів порівняно з масштабом для $W(j\bar{\omega})$.

За досить великих частот $\bar{\omega}$ модуль частотної характеристики $|W^*(j\bar{\omega})| \rightarrow 0$, тому в сумі рівності (10.64) можна обмежитися незначною кількістю доданків, наприклад двома, тобто вважати, що

$$W^*(j\bar{\omega}) = k_1 \{W_{\text{ам}}(j\bar{\omega}) + W_{\text{ам}}^*(j(\bar{\omega} - 2\pi))\}. \quad (10.65)$$

Згідно з виразом (10.65) характеристику $W^*(j\bar{\omega})$ побудували досить просто. З кожної точки $\bar{\omega}_i < \pi$ частотної характеристики $W_{\text{ам}}(j\bar{\omega})$ як і

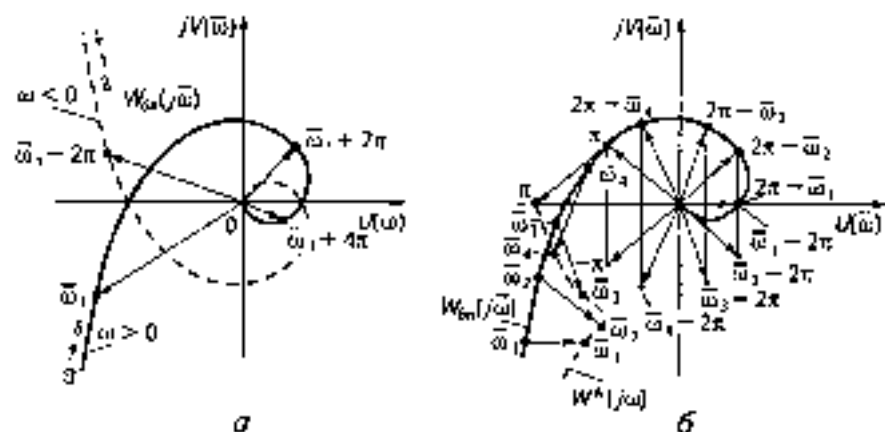


Рис. 10.11

початку координат проводять вектори $W_{\text{вн}}[j(\bar{\omega} - 2\pi)]$. Кінці цих векторів визначають частотну характеристику $W'(j\bar{\omega})$, масштаб якого повинен прахувувати коефіцієнт k_1 . Порядок побудови характеристики $W'(j\bar{\omega})$ наведено на рис. 10.11, б.

Під час побудови частотних характеристик імпульсних систем відносно частоту достатньо змінювати в межах від 0 до π , а при побудові характеристик безперервних систем частоту змінюють від 0 до ∞ . Це створює певні незручності при застосуванні методів, розроблених для безперервних систем (зокрема методів, що базуються на використанні АФХ), при дослідженні дискретних систем. Тому для побудови частотних характеристик часто використовують так звані z -перетворення дискретних передаточних функцій. Під час z -перетворення в дискретних передаточних функціях аргумент z заміняється аргументом w за допомогою підстановки

$$z = \frac{1 + w}{1 - w}. \quad (10.66)$$

Зв'язок аргументу w з частотою ω можна виразити так. З (10.66) випливає

$$w = \frac{z - 1}{z + 1},$$

але через те, що $z = e^{j\omega T_s}$, отримаємо

$$w = \frac{e^{j\omega T_s} - 1}{e^{j\omega T_s} + 1}.$$

Поділивши чисельник і знаменник цього виразу на $e^{j\frac{\omega T_s}{2}}$, дістанемо

$$w = \frac{e^{j\frac{\omega T_s}{2}} - e^{-j\frac{\omega T_s}{2}}}{e^{j\frac{\omega T_s}{2}} + e^{-j\frac{\omega T_s}{2}}}.$$

Згідно з формулою Ейлера для комплексних чисел маємо

$$w = j \operatorname{tg} \frac{\omega T_s}{2} = j \bar{\lambda}. \quad (10.67)$$

Величина

$$\bar{\lambda} = \operatorname{tg} \frac{\omega T_s}{2} = \operatorname{tg} \frac{\bar{\omega}}{2} \quad (10.68)$$

визначається відносною псевдочастотою. Зв'язок між частотою ω і відносною псевдочастотою $\bar{\lambda}$ визначається виразами

$$\omega = \frac{2}{T_n} \operatorname{arctg} \bar{\lambda}; \quad \bar{\omega} = 2 \operatorname{arctg} \bar{\lambda}. \quad (10.69)$$

з яких випливає, що змінюванню частоти $\bar{\omega}$ від 0 до π відповідає змінювання псевдочастоти від 0 до ∞ .

Під час побудови частотних характеристик зручніше користуватися абсолютною псевдочастотою

$$\lambda = \frac{2}{T_n} \operatorname{tg} \frac{\omega T_n}{2} = \frac{2\bar{\lambda}}{T_n}.$$

За малих частот $\operatorname{tg} \frac{\omega T_n}{2} \approx \frac{\omega T_n}{2}$, $\lambda \approx \omega$. Тому за умови $\omega T_n \ll 2$ в розрахунках псевдочастоту можна замінити дійсною кожною частотою ω .

Під час побудови частотних характеристик відносно псевдочастоти за дискретною передаточною функцією спочатку від аргументу z переходять до аргументу w , здійснивши z -перетворення за формулою (10.66), а потім виконують підстановку $w = j\lambda$ або $w = jT_n\lambda/2$ і дістають хіміклену частотну функцію

$$W(j\lambda) = A(\lambda) e^{j\phi(\lambda)} = U(\lambda) + jV(\lambda),$$

за якою будують АФХ або логарифмічні амплітудну і фазову характеристики.

Логарифмічні характеристики визначаються за формулами, подібними до формул для безперервних систем, тобто

$$L(\lambda) = 20 \lg A(\lambda)$$

і

$$\phi(\lambda) = \operatorname{arctg} \frac{V(\lambda)}{U(\lambda)}.$$

Так само, як і для безперервних систем, $L(\lambda)$ вимірюється в децибелах, $\phi(\lambda)$ — у градусах або радіанах, $\lg \lambda$ — у декадах.

Логарифмічні частотні характеристики імпульсних систем будувати складніше порівняно з безперервними. Це зумовлено тим, що при послідовному з'єднанні безперервних ланок без імпульсних елементів дискретна передаточна функція не дорівнює добутку дискретних передаточних функцій окремих ланок і вираз $W(j\lambda)$ зрештою є

сумою дробів. Тому перед побудовою характеристик комплексної функції спочатку треба привести до зручного для логарифмування вигляду, тобто подати її як дріб, що містить у чисельнику і знаменнику елементарні співмножники вигляду $K, j\lambda, Tj\lambda + 1$ і $T^2(j\lambda)^2 + 2\xi Tj\lambda + 1$. Після цього будуть швидко знаходитися ЛАХ дискретної системи так само, як і для безперервних систем. ЛФХ визначається як сума фазових характеристик, що відповідають елементарним співмножникам чисельника і знаменника передаточної функції.

Оскільки частотна характеристика розімкнутої системи має скінченне значення при $\omega = 0$, що відповідає $\lambda = \infty$, при $\lambda \rightarrow \infty$ ЛАХ приймає до сталого значення, а ЛФХ — до значення $\varphi(\lambda) = 0$ або $\phi(\lambda) = -180^\circ$.

Застосування невисокошестоти і логарифмічних характеристик дозволяє досліджувати стійкість і якість перехідних процесів імпульсних систем, а також виконувати синтез коректувальних пристроїв методами, розробленими для безперервних систем.

10.8

Стійкість імпульсних систем

Подібно до безперервних систем лінійна імпульсна система буде стійкою, якщо всі полюси передаточної функції замкнутої системи $W_c(p)$ (корені характеристичного рівняння) знаходяться в лівій півплощині комплексної площини p . Межею стійкості є уявна вісь (рис. 10.12, а). Оскільки під час дослідження імпульсних систем звичайно застосовується з-перетворення, необхідно визначити межу стійкості на площині z . Виходячи з того, що $z = e^{sT}$ і рівняння $p = j\omega$ відповідає уявній осі на площині p , тобто межі стійкості на цій площині, межу стійкості на площині z можна визначити так. Підставивши $p = j\omega$, знаходимо вираз

$$z = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T,$$

який становить рівняння кола одиничного радіуса. Це коло і є межею стійкості (рис. 10.12, б). Зона стійкості лежатиме в середині цього кола. Справді, якщо $p = -\alpha \pm j\beta$, то

$$z = e^{(-\alpha \pm j\beta)T} = e^{-\alpha T} e^{\pm j\beta T} = |z| e^{\pm j\beta T},$$

крім того, $|z| < 1$, бо $|z| = e^{-\alpha T}$.



Рис. 10.12

Отже, стійкість імпульсної системи можна досліджувати, визначивши корені характеристичного рівняння замкнутої системи $D(z) = 0$. Імпульсна система стійка, якщо модулі всіх коренів характеристичного рівняння замкнутої системи менші за одиницю. Якщо модуль хоча б одного кореня перевищує одиницю, то система нестійка; при $|z| = 1$ система перебуває на межі стійкості.

Для дослідження стійкості імпульсних систем використовуються критерії, за допомогою яких можна оцінювати стійкість за коефіцієнтами характеристичного рівняння або за частотними характеристиками.

Алгебраїчні критерії стійкості. Ці критерії було розроблено стосовно безперервних систем. Вони дають змогу визначити, чи всі корені характеристичного рівняння лежать в лівій півплощині комплексної площини коренів. Застосування ці критерії безпосередньо для дослідження імпульсних систем неможливо. Справді, характеристичне рівняння імпульсної системи можна подати у вигляді

$$D(z) = a_0 z^i + a_1 z^{i-1} + \dots + a_{i-1} z + a_i = 0 \quad (10.70)$$

або

$$D'(p) = a_0 e^{piT} + a_1 e^{(i-1)piT} + \dots + a_{i-1} e^{pi} + a_i = 0 \quad (10.71)$$

Для рівняння (10.70) умовою стійкості є розміщення всіх коренів усередині кола одиничного радіуса в площині коренів z , а не в лівій

півплощині. Для рівняння (10.71) умовою стійкості залишається розміщення всіх коренів p_i у лівій півплощині коренів p . Проте критерії стійкості застосовуються лише до характеристичних рівнянь у вигляді поліномів, а рівняння (10.71) є трансцендентним. Щоб застосувати відомі алгебричні критерії стійкості безперервних систем для дослідження імпульсних систем, необхідно виконати w -перетворення, яке полягає в зміні комплексної змінної z в рівнянні (10.70) на комплексну змінну w за допомогою формули $z = (1 + w)/(1 - w)$. Внаслідок цього перетворення утворюється поліноміальне рівняння

$$D(w) = 0. \quad (10.72)$$

Заною стійкості для його коренів буде ліві півплощина коренів w (рис. 10.12, в). До цього рівняння можна застосувати всі алгебричні критерії стійкості — Вилінградського, Гурвіца і Рауса, оскільки умова стійкості для рівняння (10.72) збігається з умовами стійкості безперервних систем.

Наприклад, для використання критерію Гурвіца необхідно виразити передаточну функцію замкнутої системи $W_z(z) = Q(z)/D(z)$ і записати характеристичне рівняння $D(z) = 0$. Потім у цьому рівнянні треба виконати підстановку $z = (1 + w)/(1 - w)$, тоді

$$D(w) = a_0 \frac{(1 + w)^n}{(1 - w)^n} + a_1 \frac{(1 + w)^{n-1}}{(1 - w)^{n-1}} + \dots + a_n = 0$$

Після приведення цього виразу до загального знаменника отримаємо нове характеристичне рівняння того самого порядку.

$$D'(w) = a'_0 w^n + a'_1 w^{n-1} + \dots + a'_n = 0, \quad (10.73)$$

де a'_i — коефіцієнти, що є комбінаціями доданків і сум коефіцієнтів a_i .

Згідно з критерієм Гурвіца для стійкості імпульсної системи необхідно достатньо, щоб при $a'_0 > 0$ визначник Гурвіца і всі його діагональні мінори були додатними:

$$\Delta_1 > 0; \quad \Delta_{i-1} > 0; \quad \dots; \quad \Delta_n > 0.$$

□ **Приклад 10.6.** Визначити за критерієм Гурвіца стійкість системи, характеристичне рівняння якої

$$25z^4 - 5z^2 - 10z - 1 = 0$$

Розв'язання. Виконаємо w -перетворення.

$$\begin{aligned} 25 \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^3 - 4 \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^2 - 19 \frac{1+w}{1-w} - 1 &= \\ &= \frac{20w^3 + 90w^2 + 80w + 10}{(1-w)^3} = \Delta \end{aligned}$$

Перетворене характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{aligned} a_2'w^3 + a_1'w^2 + a_0'w + a_3' - \\ - 20w^3 + 90w^2 + 80w + 10 = 0. \end{aligned}$$

Згідно з критерієм Гурвіца система стабільна, оскільки $a_2' > 0$; $a_1' > 0$; $a_0' > 0$; $a_3' > 0$; $a_1'a_2' > 0$ і

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1' & a_3' \\ a_0' & a_2' \end{vmatrix} = a_1'a_2' - a_0'a_3' = 7000 > 0.$$

Частотні критерії стійкості. Оцінка стійкості імпульсних систем можлива також за частотними критеріями, подібними до критеріїв Михайлова і Найквіста для безперервних систем.

Аналог критерію Михайлова. Під час дослідження стійкості за критерієм Михайлова використовується характеристичне рівняння замкнутої системи $D(z) = 0$ і виконується підстановка $z = e^{j\bar{\omega}}$. Через те, що $e^{j\bar{\omega}} = \cos \bar{\omega} + j \sin \bar{\omega}$, після цієї підстановки рівняння (10.36) матиме вигляд

$$\begin{aligned} D(e^{j\bar{\omega}}) &= a_0 \cos l\bar{\omega} + ja_1 \sin l\bar{\omega} + a_1 \cos(l-1)\bar{\omega} + \\ &+ ja_2 \sin(l-1)\bar{\omega} + \dots + a_{l-1} \cos \bar{\omega} + ja_l \sin \bar{\omega} + a_l = \\ &= X(\bar{\omega}) + jY(\bar{\omega}), \end{aligned} \quad (10.74)$$

де

$$\begin{aligned} X(\bar{\omega}) &= a_0 \cos l\bar{\omega} + a_1 \cos(l-1)\bar{\omega} + \dots + a_{l-1} \cos \bar{\omega} + a_l; \\ Y(\bar{\omega}) &= a_1 \sin l\bar{\omega} + a_2 \sin(l-1)\bar{\omega} + \dots + a_l \sin \bar{\omega}. \end{aligned}$$

Змінюючи частоту $\bar{\omega}$ від 0 до π , за формулю (10.74) на комплексній площині будуємо криву — аналог годографа вектора Михайлова. За виглядом цього годографа робимо висновок про стійкість системи.

Формулювання цього критерію таке:

Імпульсна система автоматичного керування стабільна, якщо годограф вектора $D(e^{j\bar{\omega}})$ при змінюванні частоти $\bar{\omega}$ від 0 до π починається на додатній дійсній осі, при $\bar{\omega} = 0$ і обходить у додатному напрямі (проти ходу стрілки годинника) по-

слідовно 2/ квадрантів, куди не перетворюються у нуль (тут l — порядок характеристичного рівняння).

Годограф вектора $D(e^{j\bar{\omega}})$ стійкої системи третього порядку зображено на рис. 10.13. На відміну від безперервних систем годограф не прямує до нескінченності, а закінчується на дійсній осі. Крім того, годограф проходить крізь білих квадрантів.

Якщо годограф $D(e^{j\bar{\omega}})$ проходить через початок координат, то система перебуває на межі стійкості.

Враховуючи, що при $\bar{\omega} = 0$ $D(e^{j\bar{\omega}}) = D(1)$, а при $\bar{\omega} = \pi$ $D(e^{j\bar{\omega}}) = D(-1)$, можна сформулювати такі необхідні умови стійкості.

1) для системи непарного порядку $D(1) > 0$ і $D(-1) < 0$;

2) для системи парного порядку $D(1) > 0$ і $D(-1) > 0$.

При дослідженні стійкості, перш ніж будувати годограф вектора $D(e^{j\bar{\omega}})$, доцільно перевірити, чи виконуються ці досить прості умови. Якщо вони не виконуються, то система нестійка і годограф можна не будувати.

Аналог критерію Найквіста. Подібно до безперервних систем для дослідження стійкості замкнутих імпульсних систем можна використовувати АФХ розімкнутих систем.

Аналог критерію Найквіста спосовно імпульсних систем формулюється так:

1) якщо система стійка в розімкнутому стані або нейтральна, тобто має нульові полюси d , то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб АФХ розімкнутої системи при змінюванні відносної частоти $\bar{\omega}$ від 0 до π не охоплювала точку з координатами $(-1, j0)$ і не проходила через неї;

2) якщо система нестійка в розімкнутому стані, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб АФХ розімкнутої системи при змінюванні частоти $\bar{\omega}$ від 0 до π охоплювала точку з координатами $(-1, j0)$ $k/2$ разів, де k — кількість коренів характеристичного рівняння безперервної частини розімкнутої системи, що мають додатну дійсну частину, або, що те саме, кількість коренів z характеристичного рівняння розімкнутої імпульсної системи, модуль яких більший за одиницю.

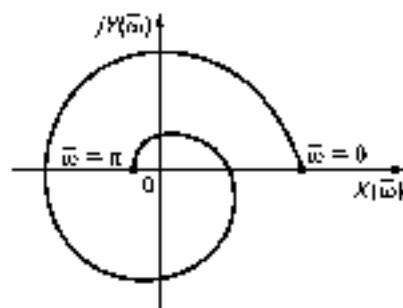


Рис. 10.13

Отже, під час дослідження стійкості за критерієм Найквіста перш за все треба перевірити стійкість розімкнутої системи і, якщо вона нестійка, визначити кількість коренів p з додатною дійсною частиною. Це зробити неважко, оскільки висновок про стійкість розімкнутої імпульсної системи можна робити на підставі перевірки стійкості її безперервної частини.

АФХ розімкнутої стійкої імпульсної системи, що відносившись стійкій (крива 1) і нестійкій (крива 2) замкнутих імпульсних систем, зображено на рис. 10.14, а. АФХ розімкнутих систем стійкої (крива 1) і нестійкої (крива 2) в замкнутому стані при $k = 2$ наведено на рис. 10.14, б.

Як бачимо, формулювання критерію Найквіста для імпульсних систем залишається таким самим, як і для безперервних. Відмінність полягає в тому, що АФХ імпульсних систем при $\omega = \pi$ закінчуються на дійсній осі, а не стигуються в початок координат.

Особливістю також є залежність АФХ імпульсної системи від періоду квантування T_0 імпульсного елемента. Це неважко виявити, проаналізувавши побудову АФХ імпульсної системи за АФХ безперервної системи (див. рис. 10.11, б).

Введення імпульсного елемента в деяких випадках може бути засобом стабілізації нестійких замкнутих безперервних систем. Період квантування у цьому разі рекомендується вибрати з умови

$$T_0 \geq \pi/\omega_n, \quad (10.75)$$

де ω_n — частота, за якої АФХ безперервної частини розімкнутої системи перетинає додатну уявну півісь.

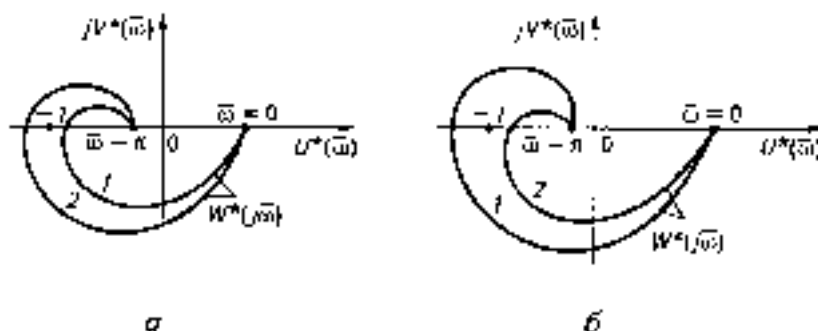


Рис. 10.14

Відповідно до критерію Найквіста стійкість замкнутої системи можна визначати не тільки за АФХ розімкнутої системи, а й за логарифмічними характеристиками – амплітудною $L(\lambda)$ і фазовою $\varphi(\lambda)$. Для цього попередньо треба виконати w -перетворення і перейти до псевдочастоти λ , застосувавши підстановку $w = j \lg \frac{T_n}{2} \lambda - j \bar{\lambda}$.

Словово логарифмічних характеристик критерій Найквіста формулюється так:

1) якщо система стійка або нейтральна в розімкнутому стані, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб на частоті зрізу $\bar{\lambda}_1$, що відповідає $L(\bar{\lambda}) = 0$, фаза за модулем була менша π ;

2) якщо система нестійка в розімкнутому стані і характеристичне рівняння має k коренів z_i , модулі яких перевищують одиницю, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб при $L(\bar{\lambda}) > 0$ кількість перетинів фазовою характеристикою рівня $-\pi$ знизу вгору була в $k/2$ разів більшою за кількість перетинів у протилежному напрямі.

■ Приклад 10.7. Дослідити стійкість замкнутої імпульсної САК за допомогою логарифмічних характеристик і визначити запаси стійкості за фазою й амплітудою, якщо передаточна функція системи в розімкнутому стані має вигляд

$$W(z) = \frac{10z(z^2 + 12z + 0,1)}{(z-1)(z-0,135)(z-0,5)}.$$

Розв'язання. Поліوسي передаточної функції розімкнутої системи $z_1 = 1$; $z_2 = 0,135$; $z_3 = 0,5$ тому розімкнута система нейтральна і для дослідження стійкості замкнутої системи застосовується перше формулювання критерію Найквіста в логарифмічній формі.

Для побудови логарифмічних характеристик спочатку відiamo чисельник передаточної функції $W(z)$ у вигляді добутку елементарних співмножників

$$W(z) = \frac{10z(z+1,1)(z+0,1)}{(z-1)(z-0,135)(z-0,5)}.$$

а потім виконуємо w -перетворення, зробивши підстановку $z = (1+w)/(1-w)$. Після спрощень дістанемо

$$W(w) = \frac{10(1+w)(2,1-0,1w)(0,9w+1,1)}{2w(1,135w+0,865)(1,5w+0,5)}.$$

Відiamo передаточну функцію $W(w)$ у вигляді, зручному для побудови логарифмічних характеристик.

$$W(w) = \frac{26,7(w + 1)(1 - 0,0457w)(0,82w + 1)}{w(1,312w + 1)(3w + 1)}.$$

Виконаємо підстановку $w = j\bar{\lambda}$.

$$W(j\bar{\lambda}) = \frac{26,7j\bar{\lambda} + 1)(1 - 0,0457j\bar{\lambda})(0,82j\bar{\lambda} + 1)}{j\bar{\lambda}(1,312j\bar{\lambda} + 1)(3j\bar{\lambda} + 1)}$$

і побудуємо ЛАХ $L(\bar{\lambda})$ і ЛФХ $\varphi(\bar{\lambda})$.

Методика побудови $L(\bar{\lambda})$ така сама, як і методика побудови асимптотичних ЛАХ безперервних систем. Півжирноточна (похибка) частота ЛАХ проходить через точку з координатами $L(\bar{\lambda}) = 20 \lg 26,7 = 28,5$ дБ, $\lg \bar{\lambda} = 0$ з нахилом -20 дБ/дек, оскільки передаточна функція має множник $1/j\bar{\lambda}$. Логарифм частот сподужа:

$$\lg \bar{\lambda}_1 = \lg 1/0,0457 = 1,32; \quad \lg \bar{\lambda}_2 = \lg (1/0,82) = 0,39;$$

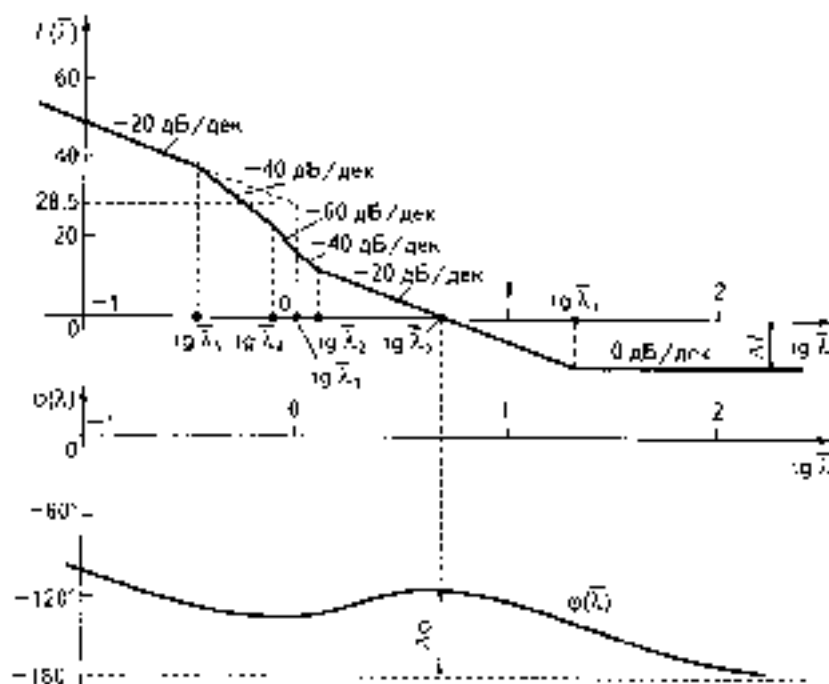


Рис. 10.15

$$\lg \bar{\lambda}_1 = \lg 1 = 0; \quad \lg \bar{\lambda}_4 = \lg (1/1.312) = -0.12;$$

$$\lg \bar{\lambda}_5 = \lg (1/3) = -0.48.$$

Фазова характеристика розраховується за формулою

$$\varphi(\bar{\lambda}) = -\pi/2 + \operatorname{arctg} \bar{\lambda} - \operatorname{arctg} 0.0457 \bar{\lambda} + \operatorname{arctg} 0.82 \bar{\lambda} - \\ - \operatorname{arctg} 1.312 \bar{\lambda} - \operatorname{arctg} 3 \bar{\lambda}.$$

Побудовані ЛАХ і ЛФХ зображено на рис. 10.15.

Система регулювання на повільності часті $\bar{\lambda}_1 = 5$ ($\lg \bar{\lambda}_1 = 0.7$) має запас стійкості за фазою $\Delta\varphi = 64^\circ$. Запас стійкості за амплітудою $\Delta L = 11$ дБ.

10.9

Якість імпульсних систем

Якість імпульсних систем оцінюється точністю робочих усталених режимів та характером перехідних процесів при типових входних і збурювальних діях.

Усталену похибку в загальному випадку можна визначити таким самим способом, як і в безперервних системах, тобто знайти зображення похибки і перейти до її усталеного значення. Зображення похибки визначається з виразу передаточної функції (10.57) замкнутої системи відносно похибки

$$X(z) = W_c(z)F(z). \quad (10.76)$$

Усталене значення похибки згідно з формулою (10.38) для кінцевого значення оригіналу (реалістичної функції)

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} W_c(z)F(z). \quad (10.77)$$

За такою формулою можна знайти усталену похибку за будь-якої форми входного сигналу $f[n]$. При цьому можна застосовувати тільки у разі, коли існує межа в правій частині. Межа не існує, якщо, наприклад, усталена похибка є гармонічною функцією.

Імпульсна система, в якій усталена похибка за будь-якого зовнішнього сигналу дорівнює нулю, називається *астатичною* відносно цього сигналу. В протилежному разі система називається *статичною*.

Системи, астатичні щодо ступінчастого сигналу, називаються *системами з астатизмом першого порядку*. Системи, астатичні щодо сигналу, що змінюється зі сталою швидкістю, називаються *системами з астатизмом другого порядку* і т. д.

Точність імпульсної системи в установившому режимі можна оцінювати за коефіцієнтами похибок, які становлять коефіцієнти $C_0, C_1, C_2, \dots$ розкладання передаточної функції за похибкою $W_s(z)$ в ряд Маклорена за степенями p . Ці коефіцієнти визначаються за формулою

$$C_p = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k W_s^*(p)}{dp^k} \right]_{p=0}, \quad (10.78)$$

де

$$W_s^*(p) = W_s(z)|_{z=e^{pT_0}}.$$

Величини, обернені коефіцієнтам похибок, так само як і для безперервних систем, називаються *добротностями*. Наприклад, добротність за швидкістю

$$k_s = 1/C_1, \quad (10.79)$$

добротність за прискоренням

$$k_a = 1/C_2 \quad (10.80)$$

і т. д.

□ Приклад 10.8. Передаточна функція розімкнутої імпульсної системи

$$W(z) = \frac{0,25z^2 - 0,275z}{z^2 - 1,9z + 0,9}.$$

Визначити перші два коефіцієнти похибок C_0 і C_1 при $T_0 = 0,1$ с.

Розв'язання. Замінимо передаточну функцію замкнутої системи вишесказаною похибкою

$$W_s(z) = \frac{1}{1 + W(z)} = \frac{z^2 - 1,9z + 0,9}{1,25z^2 - 2,175z + 0,9}.$$

Для визначення коефіцієнта похибки C_0 в цей вираз підставимо $z = 1$, що відповідає $p = 0$. Тоді

$$C_0 = W_s(1) = 0,$$

Для визначення коефіцієнта C_1 заміримо передавальну функцію $W_1(e^{sT_0})$:

$$\begin{aligned}\frac{dW_1(e^{sT_0})}{ds} &= \frac{d}{ds} \left[\frac{e^{17s} - 1,9e^{7s} + 0,9}{1,25e^{20s} - 2,175e^{10s} + 0,9} \right] = \\ &= \frac{0,2T_0e^{17s} - 0,45T_0e^{7s} + 0,2475T_0e^{0s}}{(1,25e^{20s} - 2,175e^{10s} + 0,9)^2} = \\ &= \frac{0,2T_0z^1 - 0,45T_0z^2 + 0,2475T_0z^0}{(1,25z^2 - 2,175z + 0,9)^2}.\end{aligned}$$

Підставивши в цей вираз $z = 1$ і $T_0 = 0,1$ с, дістанемо

$$C_1 = 0,4 \text{ с}.$$

Якість перехідних процесів імпульсних систем оцінюють також такими самими показниками, як і безперервних. Найближчими з них є тривалість перехідного процесу і максимальне відхилення регульованої величини від установчого значення. Ці показники можна визначити розв'язуванням різнищового рівняння, що описує динаміку системи.

Методи розв'язування різнищових рівнянь розглянуто в п. 10.4. Зокрема для розрахунку перехідної характеристики, тобто реакції системи на одиничну ступінчасту дію за нульових початкових умов, зручно застосовувати z -перетворення. В цьому разі зображення вихідної величини

$$F(z) = \frac{z}{z-1}, \quad (10.81)$$

а зображення вихідної

$$Y(z) = F(z)W_1(z) = \frac{z}{z-1}W_1(z). \quad (10.82)$$

Переходячи від зображення (10.82) до оригінату, знаходимо шукану ретічасту функцію $y[n]$. Якість перехідного процесу визначається за графіком безперервної функції $y[t]$, що відповідала ретічастій функції $y[n]$.

Якість перехідного процесу можна оцінювати також за полюсами і нулями передаточної функції, не розв'язуючи різнищове рівняння. Якщо нулі відсутні, то полюси повністю визначають перехідний процес у системі. Кожному кореню характеристичного рівняння відпо-

віднос складових перехідного процесу вигляду $C_1 z^n$. Характер перехідного процесу кожної складової залежить від кореня z . Відомо, що для стійкої системи модулі всіх коренів мають бути меншими за одиницю. При цьому дійсному дійсному кореню відповідає експоненційно згасаюча послідовність, δ -імпульсів, від'ємному дійсному — зростаюча згасаюча послідовність, комплексним — коливаюча згасаюча послідовність (рис. 10.16).

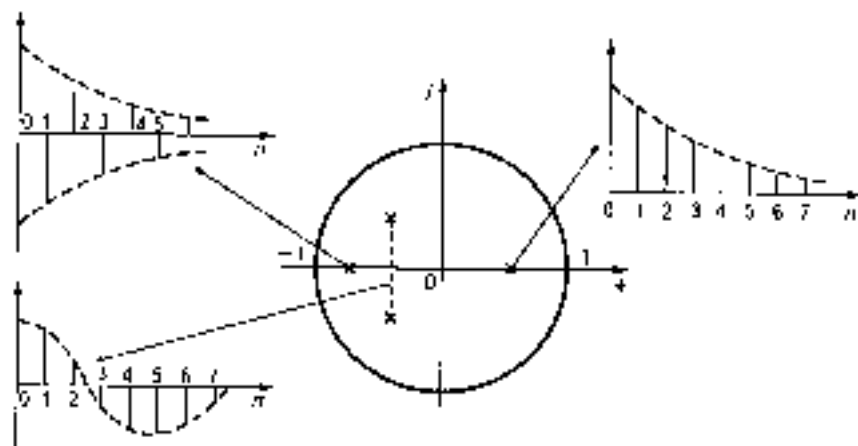


Рис. 10.16

Коло одиничного радіуса на площині z є відображенням уявної осі на площині p . Якщо корінь p є дійсним від'ємним ($p = -\alpha$), то корінь $z = e^{-\alpha T_s} = e^{-\alpha}$ буде дійсним додатним, тобто від'ємна дієзна піввісь площини p відображається у відрізок додатної півосі площини z всередині кола одиничного радіуса. Парі комплексно-спражених коренів у лівій напівплощині площини p відповідає пара комплексно-спражених коренів усередині кола одиничного радіуса або два дійсних корені на від'ємній дійсній півосі площини z . Справді, якщо $p = -\alpha \pm j\beta$, то $z = e^{-\alpha T_s} e^{\pm j\beta T_s}$, тобто в загальному випадку маємо комплексні корені на площині z . Проте, якщо $\beta T_s = \pi$ або $\beta T_s = (2n+1)\pi$, то $e^{j\beta T_s} = -1$, тобто корені потрапляють на від'ємну дійсну піввісь.

Найбільш швидко на перехідний процес впливають корені, розташовані найближче до уявної осі площини p . Це саме можна сказати

про корені, розташені ближче, ніж інші, до кола одиничного радіуса площини z . Такі корені називаються *домінантними*.

Якщо система має пару домінуючих комплексно-спряжених коренів $z_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, а решта коренів міститься лоблизу від початку координат, то час досягнення першого максимуму з перерегулювання визначаються за такими формулами:

$$t_{\text{пер}} = T_0[\pi/2\theta - (M + 1) + N + b]; \quad (10.83)$$

$$\sigma_{\text{max}} = k|z_1|^{-k} e^{-\theta/20}, \quad (10.84)$$

де $\theta = \arctg \beta T_0$; M — кількість нулів передаточної функції; N — кількість полюсів; b — додатне число ($b < 1$), при якому вираз у квадратних дужках у формулі (10.83) дорівнює цілому числу; $k = \cos \theta + (\cos \theta / |z_1| - \sin \theta) \sin \theta$; $z_1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ — модуль домінуючого кореня.

Якість імпульсних систем можна характеризувати також непрямими оцінками, подібними до критеріїв якості безперервних систем. Цими оцінками є ступінь стійкості η і хвилюваність σ , а також інтегральні оцінки якості.

Ступінь стійкості η визначається абсолютною величиною дійсної частини найближчого до уявної осі комплексної площини p кореня $p = \alpha \pm j\beta$, характеристичного рівняння замкнутої системи

$$D^*(p) = a_n e^{pT_0} + a_{n-1} e^{(p-1)T_0} + \dots + a_{n-1} e^{pT_0} + a_0 = 0,$$

тобто

$$\eta = |\alpha|_{\text{min}}.$$

Якщо перейти до відносного часу, тобто ввести змінну $q = T_0 p$ (комплексну змінну перетворення Лапласа у відносному часі), то характеристичне рівняння матиме вигляд

$$D^*(q) = a_n e^q + a_{n-1} e^{q-1} + \dots + a_{n-1} e^q + a_0 = 0$$

і ступінь стійкості обчислюватиметься за формулою

$$\eta = |T_0 \alpha|_{\text{min}}.$$

Тривалість перехідного процесу, вимірювана кількістю періодів кінпування, і абсолютна тривалість визначається через ступінь стійкості:

$$n_p \leq 3/\eta,$$

$$t_p \leq 3T_0/\eta = 3/\eta.$$

Цікаво зазначити, що в імпульсних системах теоретично можлива реалізація нескінченно великого ступеня стійкості. Ступінь стійкості η дорівнює нескінченності тільки у разі, коли всі корені характеристичного рівняння $D^*(p) = 0$ мають нескінченно велику від'ємну дійсну частину, а це означає, що всі корені характеристичного рівняння $D(z) = 0$ повинні дорівнювати нулю. Якщо характеристичне рівняння має вигляд (10.79), то всі корені дорівнюють нулю тільки за умови, що

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{l-1} = a_l = 0. \quad (10.85)$$

У системах із нескінченно великим ступенем стійкості перехідний процес при одиначній ступінчастій дії має скінченну тривалість (закінчується протигом скінченної кількості періодів квантування). Умова (10.85) називається умовою *скінченної тривалості перехідного процесу*.

Дійсно, якщо для передаточної функції замкнутої системи

$$W_1(z) = \frac{b_1 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n}{a_n z^l + a_1 z^{l-1} + \dots + a_{l-1} z + a_l}$$

виконується умова (10.85), то

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \frac{b_1}{a_n} z^{n-l} + \frac{b_1}{a_n} z^{n-l-1} + \dots \\ &\dots + \frac{b_{n-1}}{a_n} z^{n-l+1} + \frac{b_n}{a_n} z^{n-l}. \end{aligned}$$

Імпульсна перехідна характеристика, що є оригіналом зображення $W_1(z)$, визначається за формулою

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{b_1}{a_n} \delta[n - (l - m)] + \frac{b_1}{a_n} \delta[n - (l - m + 1)] + \dots \\ &\dots + \frac{b_{n-1}}{a_n} \delta[n - (l - 1)] + \frac{b_n}{a_n} \delta[n - l], \end{aligned}$$

де $\delta[n]$ — дельта-функція.

З цього виразу бачимо, що імпульсна перехідна характеристика складається зі скінченної кількості імпульсів, лха не перевищує степеня знаменника передаточної функції. Однак практична реалізація

умов скінченної тривалості перехідних процесів у багатьох випадках ускладнена.

Ступінь коливальності μ є непрямою оцінкою коливальності системи. Для стійких імпульсних систем він визначається як абсолютна величина максимального відношення уявної та дійсної частини коренів характеристичного рівняння $D^*(p) = 0$ або $D^*(q) = 0$, тобто

$$\mu = \left| \frac{\mu}{\alpha} \right|_{\max}.$$

Непрямими оцінками, що враховують не тільки тривалість процесу, а і його відхилення від усталеного значення протягом перехідного процесу, є інтегральні оцінки якості.

Найпростішою є лінійна інтегральна оцінка

$$I_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (y[k] - y[\infty]) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon[k], \quad (10.86)$$

де $y[\infty]$ — усталене значення вихідної величини.

Ця оцінка придатна тільки для неколивальних процесів.

Ширше застосування знайшла квадратична інтегральна оцінка

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\infty} (y[k] - y[\infty])^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^2[k]. \quad (10.87)$$

Найкращою є та імпульсна система, для якої інтегральні оцінки мінімальні. Значення параметрів системи, що відповідають мінімальним оцінкам, називаються *оптимальними за якістю перехідного процесу*.

10.10

Корекція імпульсних систем

Загальна мета корекції імпульсних систем полягає у забезпеченні стійкості, заданої точності роботи в установлених режимі та задовільної якості перехідних процесів.

Корекцію можна здійснювати за рахунок змінювання параметрів системи без зміни її структури або за рахунок введення додаткових

коректувальних хл. Своєю чергою, коректувальні кола можуть бути безперерйними або дискретними.

Найпростішим способом корекції є змінювання коефіцієнта підсилення розімкнутої системи, який впливає практично на всі власності системи.

Значення коефіцієнтів підсилення K , при яких система зберігає стійкість, можна визначити за будь-яким критерієм стійкості, якщо використати умови, за яких система перебуває на межі стійкості.

□ **Приклад 10.9.** Передаточна функція розімкнутої системи

$$W(z) = \frac{0,5Kz}{z^2 - 1,2z + 0,25}.$$

Визначити, при яких значеннях коефіцієнта K імпульсна система стійка у замкнутому стані.

Розв'язання. Характеристичне рівняння замкнутої системи

$$D(z) = z^2 - 1,2z + 0,25 + 0,5Kz = z^2 + (0,5K - 1,2)z + 0,25 = 0.$$

Виконаємо w перетворення

$$\left(\frac{1+w}{1-w} \right)^2 + (0,5K - 1,2) \frac{1+w}{1-w} + 0,25 = 0$$

і визнаємо характеристичне рівняння

$$(2,45 - 0,5K)w^2 + 1,5w + 0,5K + 0,05 = 0.$$

Згідно з критерієм Гурвіца система другого порядку стійка, якщо всі коефіцієнти характеристичного рівняння будуть додатними, тобто

$$2,45 - 0,5K > 0,$$

$$1,5 > 0,$$

$$0,5K + 0,05 > 0.$$

Останні дві умови виконуються при будь-яких додатних значеннях K . З першої умови одержуємо $K < 4,9$, тобто імпульсна система стійка лише при $K < 4,9$.

Коефіцієнт підсилення K розімкнутої системи, що забезпечує бажаний показник коливальності M , можна визначити так. Записується передаточна функція розімкнутої системи

$$W(z) = KW_0(z)$$

і на комплексній площині будується амплітудно-фазова характеристика $W_0^*(j\omega)$ за допомогою підстановки $z = e^{j\vartheta}$ для діапазону частот $0 \leq \vartheta \leq \pi$ (рис. 10.17). Після цього з початку координат проводиться пряма OA під кутом $\varphi = \arcsin(1/M)$ до від'ємної дійсної півосі і будується коло радіусом CP з центром C на від'ємній дійсній півосі так, щоб воно було дотичним одночасно до амплітудно-фазової характеристики $W_0^*(j\omega)$ і прямої OA .

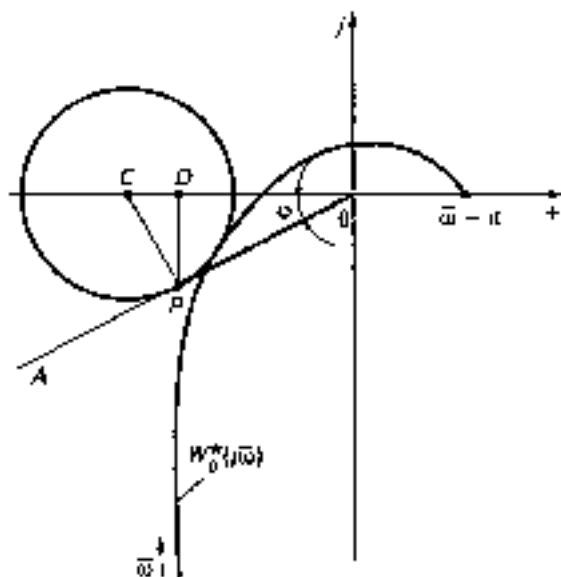


Рис. 10.17

Потрібне значення коефіцієнта підсилення

$$K = \frac{M^2(M^2 - 1)}{OC} = \frac{1}{OD}.$$

Корекція імпульсної системи за рахунок введення коректувальних пристроїв полягає в зміні частотних характеристик системи з метою максимального їх наближення до бажаних. Коректувальні пристрої можуть бути безперервними або дискретними.

Безперервний коректувальний пристрій можна вводити послідовно з ланками нерегульованої частини системи, паралельно деяким з

них, а також у вигляді зворотного зв'язку, що охоплює всю систему або частину її ланок.

Визначення параметрів послідовного коректувального пристрою становить у загальному випадку досить складну задачу, тому що передаточна функція коректувального пристрою під час розрахунку включається в передаточну функцію приєданої безперервної частини. У найпростіших випадках при досить високій частоті квантування і великій інерційності безперервної частини системи, коли виконується умова (10.63), імпульсну систему можна замінити безперервною, динаміка якої близька до імпульсної. У цьому разі згідно з виразом (10.64) при $\tau \rightarrow 0$ і $\gamma \rightarrow 0$

$$W_n(j\bar{\omega}) = k_c W_s(j\bar{\omega}) W_{in}(j\bar{\omega}) \quad (10.88)$$

або

$$W_n(q) = k_c W_s(q) W_{in}(q),$$

де $W_s(j\bar{\omega})$, $W_n(j\bar{\omega})$, $W_{in}(j\bar{\omega})$ — частотні характеристики: бажана, коректувального пристрою, безперервної частини вихідної системи; k_c — коефіцієнт передачі імпульсного елемента.

З урахуванням тривалості імпульсів ($\tau \neq 0$) вираз (10.88) матиме вигляд

$$W_n(j\bar{\omega}) = k_c W_s(j\bar{\omega}) W_{in}(j\bar{\omega}) e^{-j\gamma\tau/2} \quad (10.89)$$

або

$$W_n(q) = k_c W_s(q) W_{in}(q) e^{-\gamma\tau/2}.$$

Структурну схему еквівалентної безперервної системи з послідовним коректувальним пристроєм зображено на рис. 10.18.

Після заміни імпульсної системи безперервною синтез послідов-

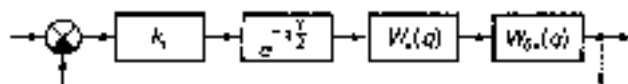


Рис. 10.18

ного коректувального пристрою можна виконати методами, розробленими для безперервних систем, зокрема методом логарифмічних частотних характеристик.

Розглянемо тепер коректувальний пристрій, що вмикається паралельно безперервній частині системи (рис. 10.19, а). Якщо перенести вузол через ланку $W_p(q)$, то дістанемо структурну схему, нашо-

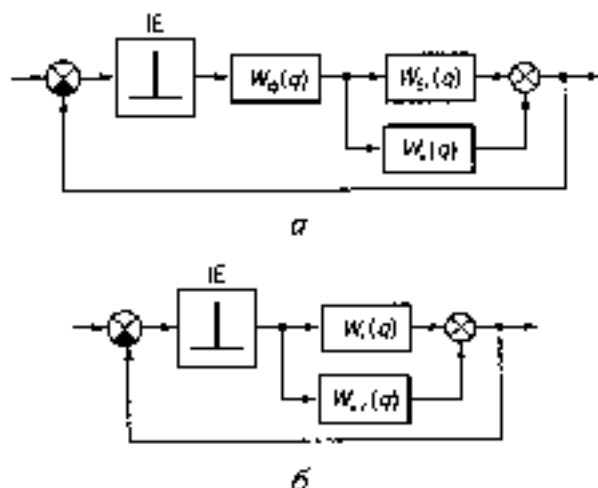


Рис. 10.19

дану на рис. 10.19, б, де $W_0(q)$ — передаточна функція зведеної безперервної частини; $W_{\text{п.к.}}(q)$ — передаточна функція зведеного паралельного коректувального кола. Тоді передаточна функція розімкнутої імпульсної системи матиме вигляд

$$W_0^*(q) = W_0^-(q) + W_{\text{п.к.}}^-(q),$$

а бажана частотна функція

$$W_T^*(j\bar{\omega}) = W_0^*(j\bar{\omega}) + W_{\text{п.к.}}^*(j\bar{\omega}). \quad (10.90)$$

З виразу (10.90) можна визначити частотну характеристику паралельного коректувального кола, якщо відома бажана частотна характеристика $W_T^*(j\bar{\omega})$:

$$W_{\text{п.к.}}^*(j\bar{\omega}) = W_T^*(j\bar{\omega}) - W_0^*(j\bar{\omega}).$$

Після цього за впливом знайденої частотної характеристики визначається передаточна функція $W_{\text{п.к.}}^*(q)$, схема коректувального ланки та її параметри.

Коректувальні ланки імпульсної дії вводяться після імпульсного елемента. Найчастіше коректувальні ланки — це цифрові коректувальні пристрої (цифрові регулятори). Синтез цифрових регуляторів розглядатиметься в п. 10.12.

10.11

*Цифрові системи
автоматичного керування*

Цифровою системою автоматичного керування називається система, у замкненому контурі якої є хоча б один пристрій, що перетворює безперервні сигнали на цифрові коди і виконує математичні операції над цими кодами. У контурі цифрової системи цифровий регулятор виконує власні йому математичні операції і видає результат у дискретні моменти часу $t = T_0, 2T_0, 3T_0, \dots$. В інтервалах між цими моментами на виході регулятора зберігається те значення, яке було на початку інтервалу. Тому на виході регулятора існує не безперервна функція $x(t)$, а відповідна ступінчаста $x(nT_0)$, тобто здійснюється квантування за часом (рис. 10.20). Крім того, відбувається квантування за рівнем, оскільки внаслідок цифрової подачі інформації вихідний сигнал може набувати тільки певних фіксованих рівнів, що відрізняються один від одного на величину q . Ця величина відповідає одиниці молодшого розряду цифрового регулятора, тобто безперервний сигнал $x(t)$ подається у вигляді

$$x(t) = x'(nT_0) + \sigma,$$

де $|\sigma| < q$, а $x'(nT_0)$ містить ціле число рівнів q .

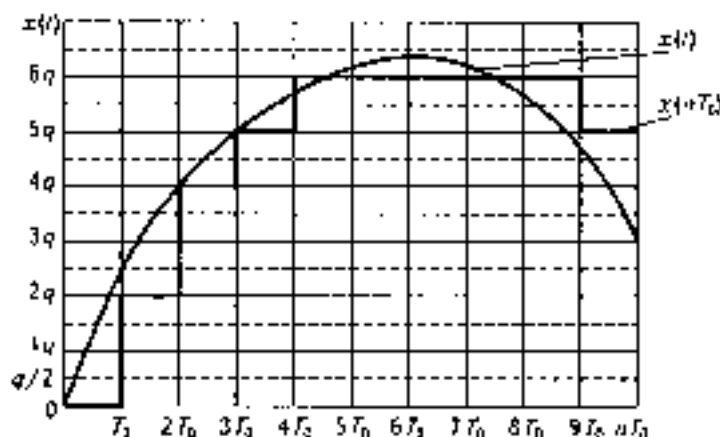


Рис. 10.20

Отже, в цифрових системах сигнал квантується за часом і рівнем. Квантування за часом робить цифрову систему *дискретною*, а квантування за рівнем — *нелінійною*. Однак при малому q впливом квантування за рівнем на динаміку системи можна знехтувати, якщо покласти $q \approx 0$. У цьому разі для дослідження цифрових систем можна застосувати математичний апарат дослідження лінійних імпульсних систем з амплітудно-імпульсною модуляцією: дискретне з'єднання і різницеві рівняння.

Спрощену структурну схему цифрової системи подано на рис. 10.21. Безперервний сигнал помилки $\varepsilon(t)$ імпульсним елементом ІЕ1 перетворюється в релізчасту цифрову функцію $\varepsilon[n]$ і надходить на вхід ЦОМ, яку подано у вигляді передаточної функції $D(z)$. Вихідний сигнал ЦОМ імпульсним елементом ІЕ2 і формувачем імпульсів $W_q(p)$ перетворюється в ступінчастий сигнал. Безперервну частину системи подано ланкою з передаточною функцією $W_{\text{ам}}(p)$.

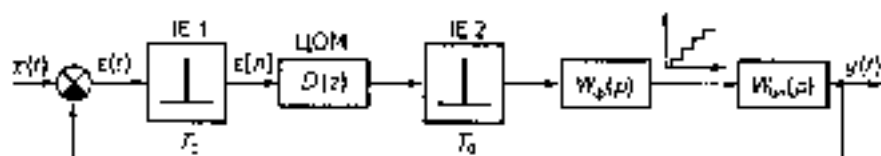


Рис. 10.21

На виході формувача імпульсів протягом усього періоду квантування T_q зберігається попереднє значення сигналу, тому формувач є фіксатором нульового порядку. Його передаточна функція

$$W_q(p) = \frac{1 - e^{-z_p T_q}}{p}$$

або, через те, що $e^{-z_p T_q} = z$,

$$W_q(p) = \frac{z - 1}{z p}.$$

Передаточна функція приведеної безперервної частини системи визначається за формулою

$$W_{\text{ам}}(p) = W_q(p) W_{\text{ам}}(p) = \frac{z - 1}{z} \frac{W_{\text{ам}}(p)}{p}, \quad (10.91)$$

а її дискретна передаточна функція

$$W_n(z) = Z\{W_n(p)\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{W_{en}(p)}{p}\right\} \quad (10.92)$$

Якщо в каналі керування є затримка часу τ , то вираз (10.92) запишеться у вигляді

$$W_n(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{W_{en}(p)}{p} e^{-\alpha \tau}\right\} \quad (10.93)$$

Розглянемо як приклад структурну схему, наведену на рис. 10.22. Таку схему має двоконтурна система стабілізації швидкості «двигуна постійного струму», яка складається з аналогового контуру струму і цифрового контуру швидкості. Контур струму настроєно на технічний оптимум і в структурній схемі подано наближено аперіодичною

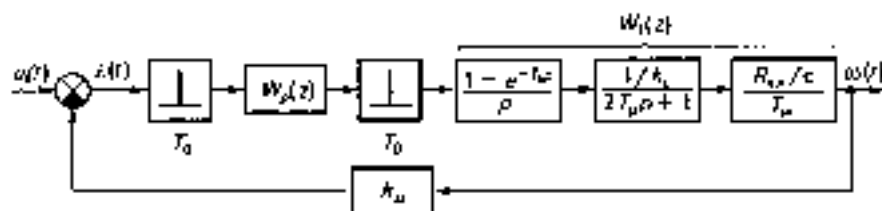


Рис. 10.22

ланкою з передаточною функцією $1/(k_s(2T_m p + 1))$. До цифрового контуру належить дискретний регулятор на базі мікро-ЕОМ. Операції, що виконуються регулятором, описуються передаточною функцією $W_n(z)$. Цифроаналоговий перетворювач подано у вигляді ідеального імпульсного елемента з періодом квантування T_n і фіксатора нульового порядку з передаточною функцією $(1 - e^{-Ts})/p$.

Дискретна передаточна функція приведеної безперервної частини системи відповідає до виразу (10.92)

$$W_n(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{R_{em}}{k_s c T_m p^2 (2T_m p + 1)}\right\} = \frac{k(z-1)}{z} Z\left\{\frac{1}{p^2(Tp + 1)}\right\},$$

де $k_1 = R_{em}/k_s c T_m$; $T = 2T_m$.

Подамо вираз у останніх дужках у вигляді суми простих дробів і використаємо дані таблиці з-перетворень (див. табл. III.1). Тоді дістанемо

$$\frac{1}{p^2(Tp+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{T}{p} + \frac{T^2}{Tp+1}$$

і

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \frac{k_1(z-1)}{z} \left[\frac{T_0 z}{(z-1)^2} - \frac{Tz}{z-1} + \frac{Tz}{z-d} \right], \\ &= \frac{k_1 [(T_0 - T + dT)z - T_0 d + T(1-d)]}{(z-1)(z-d)}, \end{aligned}$$

де $d = e^{-T/d}$.

Прийнявши, що дискретна передаточна функція регулятора

$$W_p(z) = \frac{c_0 z + c_1}{z-1},$$

запишемо дискретну передаточну функцію розімкнутої системи

$$\begin{aligned} W(z) &= W_p(z)W_1(z)k_u = \\ &= \frac{k_1 k_u (c_0 z + c_1) [(T_0 - T + dT)z - T_0 d + T(1-d)]}{(z-1)^2 (z-d)} \quad (10.94) \end{aligned}$$

Передаточна функція замкнутої системи

$$\begin{aligned} W_s(z) &= \frac{W_p(z)W_1(z)}{1 + W_p(z)W_1(z)k_u} = \\ &= \frac{k_1 (c_0 z + c_1) [(T_0 - T + dT)z - T_0 d + T(1-d)]}{(z-1)^2 (z-d) + (c_0 z + c_1) k_1 k_u [(T_0 - T + dT)z - T_0 d + T(1-d)]}. \end{aligned}$$

а в загальному випадку

$$W_s(z) = P(z)/Q(z),$$

де $P(z)$, $Q(z)$ — поліноми від z .

Визначивши передаточні функції $W(z)$ і $W_s(z)$, дослідимо стійкість цифрової системи і визначимо якість перехідних процесів. При цьому застосовуються всі методи дослідження імпульсних систем.

10.12

**Синтез цифрових
коректувальних пристроїв
методом ЛАХ**

При розробці цифрових систем зручно використувувати метод синтезу, що базується на логарифмічних частотних характеристиках. Передаточна функція розімкнутої цифрової системи становить добуток дискретних передаточних функцій приведеної безперервної частини $W_n(z)$ і цифрового регулятора $D(z)$. Якщо перейти до логарифмічних характеристик, які найзручніше будувати як функції абсолютної псевдочастоти:

$$\lambda = \frac{2}{T_n} \lg \frac{\omega T_n}{2},$$

то

$$L(\lambda) = L_o(\lambda) + L_n(\lambda), \quad (10.95)$$

де $L(\lambda)$, $L_o(\lambda)$, $L_n(\lambda)$ — амплітудні логарифмічні характеристики розімкнутої системи, цифрового регулятора і приведеної безперервної частини системи.

Якщо бажано ЛАХ $L(\lambda)$, побудовану за заданими показниками якості, і ЛАХ $L_n(\lambda)$ вважати відомими, то ЛАХ цифрового регулятора

$$L_o(\lambda) = L(\lambda) - L_n(\lambda). \quad (10.96)$$

Розглянемо детальніше методіку побудови логарифмічних характеристик приведеної безперервної частини з фіксатором нульового порядку. Раніше було доведено (див. п. 10.7), що за умови $\omega T_n < 2$ абсолютна псевдочастота λ практично збігається з частотою ω , тому для низьких частот ($\omega < 2/T_n$) побудова ЛАХ і ЛФХ дискретної системи зводиться до сути до побудови відповідних характеристик вихідної безперервної частини системи з передаточною функцією $W_{in}(p)$.

Розглянемо це положення на такому прикладі. Нехай передаточна функція безперервної частини системи

$$W_{in}(p) = \frac{K}{Tp + 1}, \quad (10.97)$$

причому період квантування T_n вибрано таким, що частота змусу $1/T_n$ менша $2/T_n$. Це припущення зводиться до того, що злам асимп-

точної ЛАХ, який відносився до передавочної функції (10.97), здійснюється в низькочастотній зоні, де справедлива нерівність $\omega \ll 2/T_s$.

Відповідно до виразу (10.92) запишемо дискретну передавочну функцію приведення безперервної частини

$$W_n(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K}{\rho(Ts+1)} \right\}$$

або, якщо використати дані табл. 10.1,

$$W_n(z) = \frac{z-1}{z} \frac{K(1-d)z}{(z-1)(z-d)} = \frac{K(1-d)}{z-d}, \quad (10.98)$$

де $d = e^{-T_s/\tau}$.

Виконаємо w -перетворення, підставивши $z = (1+w)/(1-w)$,

$$W_n(w) = (1-w) \frac{K(1-d)}{1-d+w(1+d)} = (1-w) \frac{K}{1+w \frac{1+d}{1-d}},$$

і перенемо до абсолютної частоти, змінивши w на $j \frac{T_s}{2} \lambda$.

Тоді дістанемо

$$W_n(j\lambda) = \left(1 - j \frac{T_s}{2} \lambda \right) \frac{K}{1 + j \frac{T_s}{2} \lambda \operatorname{cth} \frac{T_s}{2T}}.$$

При виконанні останнього перетворення використано формули Ейлера:

$$\begin{aligned} \frac{1+d}{1-d} &= \frac{1+e^{-T_s/\tau}}{1-e^{-T_s/\tau}} \approx \frac{e^{T_s/2\tau} e^{-T_s/2\tau} + e^{-T_s/2\tau} e^{-T_s/2\tau}}{e^{T_s/2\tau} e^{-T_s/2\tau} - e^{-T_s/2\tau} e^{-T_s/2\tau}} = \\ &= \frac{e^{T_s/2\tau} + e^{-T_s/2\tau}}{e^{T_s/2\tau} - e^{-T_s/2\tau}} = \frac{\operatorname{ch} \frac{T_s}{2T}}{\operatorname{sh} \frac{T_s}{2T}} = \operatorname{cth} \frac{T_s}{2T}. \end{aligned}$$

Оскільки було прийнято $T/T_s \ll 2T_s$, тобто $T \gg 0.5T_s$, то маємо

$$\operatorname{cth} \frac{T_s}{2T} = \frac{1}{\operatorname{th} \frac{T_s}{2T}} = \frac{2T}{T_s}$$

У цьому разі

$$W_n(j\lambda) = \left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}\right) \frac{K}{1 + j\lambda T}. \quad (10.99)$$

Якщо порівняти цей вираз із звичайною частотною функцією безперервної частини системи

$$W_{\text{б.}}(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T},$$

то стане очевидним, що в низькочастотній зоні характеристики $W_n(j\lambda)$ і $W_{\text{б.}}(j\omega)$ повністю збігаються. Вплив додаткового співмножника $\left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}\right)$ при побудові ЛАХ у низькочастотній зоні можна не враховувати, оскільки $\omega T_0 < 2$ і $T > 0.5T_0$.

Розглянемо інший приклад. Нехай

$$W_{\text{б.}}(p) = \frac{K(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)} \quad (10.100)$$

і $T_1 > 0.5T_0$; $T_2 > 0.5T_0$, тобто злами ЛАХ містяться в низькочастотній зоні.

Дискретна передаточна функція прикладної безперервної частини

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K(T_1 p + 1)}{p^2(T_1 p + 1)} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K}{p^2} + \frac{K(T_2 - T_1)}{p(T_1 p + 1)} \right\} = \\ &= K \left[\frac{T_0}{z-1} + \frac{(T_2 - T_1)(1-d)}{z-d} \right]. \end{aligned}$$

Виконаємо w -перетворення

$$W_n(w) = K \left\{ (1-w) \frac{T_0}{2w} + \frac{T_2 - T_1}{1 + w \frac{1+d}{1-d}} \right\}.$$

і перейдемо до частотної функції

$$\begin{aligned} W_n(j\lambda) &= K \left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2} \right) \left[\frac{1}{j\lambda} + \frac{T_2 - T_1}{1 + j\lambda T_1} \right] = \\ &= \left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2} \right) \frac{K(1 - j\lambda T_2)}{j\lambda(1 + j\lambda T_1)}. \end{aligned} \quad (10.101)$$

І в цьому разі, якщо порівняти вирази (10.100) і (10.101), можна зробити висновок, що в низькочастотній зоні частотні характеристики $W_{\text{вн}}(\omega)$ і $W_{\text{вн}}(\lambda)$ збігаються.

ЛАХ, побудовані за формулами (10.99) і (10.101), зображено на рис. 10.23. Штриховою лінією для порівняння побудовано ЛАХ $L(\omega)$, побудовану відповідно до передаточних функцій безперервної частини системи (10.97) і (10.100).

Розглянемо тепер більш загальний випадок. Припустимо, що передаточна функція безперервної частини системи має вигляд

$$W_{\text{вн}}(p) = \frac{K(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1) \dots (\tau_n p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \dots (T_m p + 1)}, \quad (10.102)$$

причому, як і раніше, всі зламні асимптотичної ЛАХ містяться в низькочастотній зоні, для якої $\omega T_0 \ll 1$.

Розкладемо (10.102) на суму простих дробів:

$$W_{\text{вн}}(p) = \frac{K}{p} + K \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{T_i p + 1}, \quad (10.103)$$

де N_i — коефіцієнти розкладу.

Дискретна передаточна функція з урахуванням фіксатора нульового порядку

$$\begin{aligned} W_{\text{д}}(z) &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_{\text{вн}}(p)}{p} \right\} = \\ &= K \left[\frac{T_0}{z-1} + \sum_{i=1}^n \frac{N_i (1-d_i)}{z-d_i} \right], \end{aligned} \quad (10.104)$$

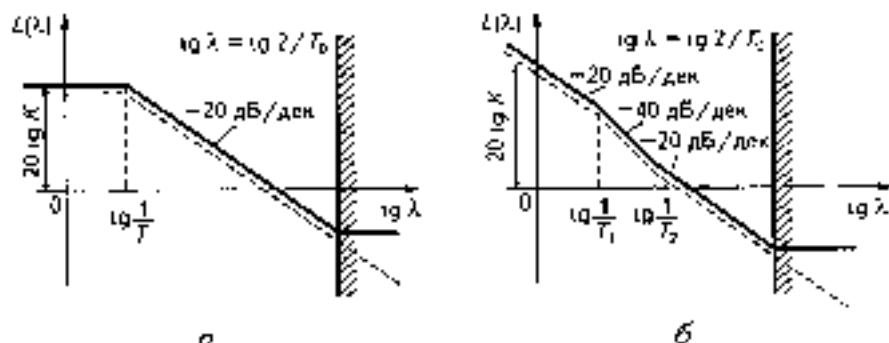


Рис. 10.23

Виконаємо w -перетворення і перейдемо до частотної функції

$$W_v(j\lambda) = \left(1 - j\lambda \frac{T_n}{2}\right) \left[\frac{K}{j\lambda} + K \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{1 + j\lambda \frac{T_n}{2} \operatorname{ctg} \frac{T_n}{2T_i}} \right]$$

або, через те, що $T_i \gg 0,5 T_n$,

$$W_v(j\lambda) \approx \left(1 - j\lambda \frac{T_n}{2}\right) \left[\frac{K}{j\lambda} + K \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{1 + j\lambda T_i} \right]. \quad (10.105)$$

Порівнявши цей вираз із (10.103), можна зробити висновок, що частотні передаточні функції $W_{av}(j\omega)$ і $W_v(j\lambda)$ у низькочастотній зоні збігаються. Висновок залишається справедливим і в разі, якщо безперервна частина системи містить коливальні ланки з передаточною функцією $1/(T_i^2 p^2 + 2\xi T_i p + 1)$ за умови, що $T_i \gg 0,5 T_n$.

Розглянемо тепер побудову логарифмічних характеристик у зоні високих частот (при $\omega > 2/T_n$). Якщо сталі часу передаточної функції $W_{av}(p)$ такі, що всі лампи асимптотичної ЛАХ лежать ліворуч від частоти $\omega = 2/T_n$ і при частоті $2/T_n$ ЛАХ має нахил -20 дБ/дек, то високочастотна частина ЛАХ апроксимується інтегральною ланкою $W_v(p) = \omega_{nv}/p$, де ω_{nv} — бісова частота високочастотної частини ЛАХ, яка визначається як частота перетину 0 першої асимптоти з віссю частоти (рис. 10.24). Нехай, наприклад, низькочастотна частина ЛАХ на частоті λ/T_n має нахил -60 дБ/дек. Тоді

$$W_v(p) = \frac{\omega_{nv}}{p} \quad (10.106)$$

і

$$W_v(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{\omega_{nv}}{p^*} \right\} \quad (10.107)$$

або за даними табл. 10.1

$$W_v(z) = \frac{\omega_{nv} T_n^2 (z^2 + 4z + 1)}{6(z-1)^3}.$$

Виконавши w -перетворення, дістанемо

$$W_v(w) = \omega_{nv} T_n^2 \frac{(1-w) \left[1 - \frac{w^2}{3} \right]}{5w^4}.$$

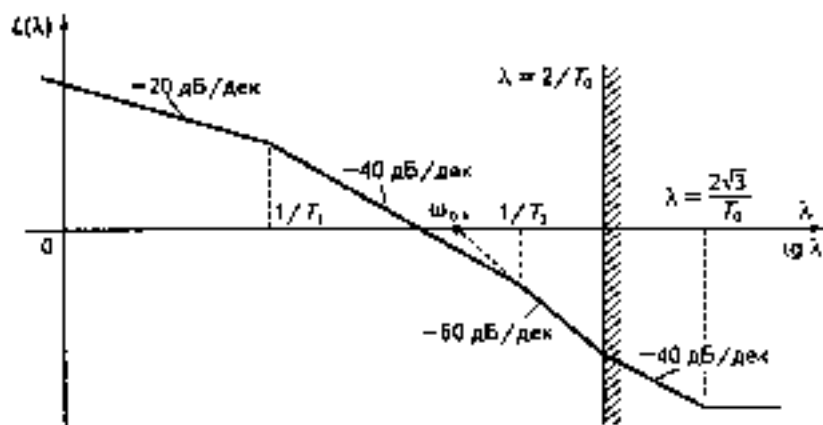


Рис. 10.24

Перейдемо до частотної функції

$$\begin{aligned}
 W_e(j\lambda) - \omega_{0,1} &= \frac{(1 - j\lambda T_0/2) \left[1 - (j\lambda)^2 \frac{T_0^2}{12} \right]}{(j\lambda)^3} = \\
 &= \frac{\omega_{0,1} (1 - j\lambda T_0/2) \left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2\sqrt{3}} \right) \left(1 + j\lambda \frac{T_0}{2\sqrt{3}} \right)}{(j\lambda)^3}.
 \end{aligned} \quad (10.108)$$

Високочастотну частину ЛАХ, побудовану за виразом (10.108), зображено на рис. 10.24 праворуч від лінії $\lambda = 2/T_0$.

Фазова характеристика, що відповідає ЛАХ на рис. 10.24, обчислюється за формулою

$$\varphi(\lambda) = -\pi/2 - \arctg T_1 \lambda - \arctg T_2 \lambda + \arctg \frac{T_0}{2} \lambda$$

Збіг ЛАХ для дискретної передаточної функції та передаточної функції безперервної частини системи в зоні низьких частот дає можливість синтезувати коректуючі пристрої (цифрові регулятори) відомими методами синтезу коректуючих пристроїв безперервних систем і використовувати розроблені для них номограми, графіки і таблиці.

Внаслідок синтезу методом ЛАХ знаходимо ЛАХ коректувально-го пристрою $L_c(\lambda)$ і за її виглядом визначаємо комплексну частотну функцію $W_c(j\lambda)$. Після цього виконуємо підстановку

$$j\lambda = \frac{2}{T_0} \frac{z - 1}{z + 1},$$

шляхом якої дискретну передаточну функцію $W_c(z)$ та різницеве рівняння корекції, що реалізується цифровим регулятором.

Ц Приклад 10.10. Виконати синтез цифрового регулятора системи автоматичного регулювання, структурну схему якої подано на рис. 10.22. Параметри системи: $R_{\text{вх}} = 0,1 \text{ Ом}$; $e = 2 \text{ В/град}$; $T_0 = 1 \text{ с}$; $T_1 = 0,01 \text{ с}$; $k_1 = 0,1 \text{ Ом}$; $k_2 = 0,1 \text{ В/град}$. Вимоги до показників якості системи: добротність за швидкістю $k_1 = 50 \text{ с}^{-1}$, час регулювання $t_r = 0,5 \text{ с}$, перерегулювання $\sigma \leq 25 \%$.

Розв'язання. Передаточна функція безперервної частини системи

$$W_{\text{вх}}(p) = \frac{R_{\text{вх}} \cdot k_2 \cdot k_1 CT_1}{p(2T_1 p + 1)} = \frac{K}{p(T_1 p + 1)} = \frac{0,5}{p(0,02 p + 1)}$$

Вибіримо період квантування так, щоб злам асимптотичної ЛАХ був ліворуч від частоти $\omega = 2/T_0$. Частота зламу ЛАХ безперервної частини системи становить $\omega_1 = 1/T_1 = 50 \text{ с}^{-1}$. Приймемо $T_0 = 0,01 \text{ с}$ (умова $T > 0,5 T_0$ виконується). У низькочастотній зоні $\omega \ll \omega_1$ знаходимо абсолютну псевдочастоту зламу асимптотичної ЛАХ:

$$\lambda = \frac{2}{T_0} \lg \frac{\omega_1 T_0}{2} = \frac{2}{0,01} \lg \frac{50 \cdot 0,01}{2} = 51,95 \text{ с}^{-1},$$

тобто похибка становить усього $\approx 2 \%$.

Через те, що високошестотна частина ЛАХ практично не впливає на якість перехідних процесів, під час синтезу коректувальної ланки можна обмежитися спрощеною побудовою ЛАХ прилеглої безперервної частини системи:

$$W_{\text{вх}}(j\lambda) = \frac{\left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}\right) 0,5}{j\lambda(0,02 j\lambda + 1)},$$

Побудовану характеристику $L_{\text{вх}}(\lambda)$ зображено на рис. 10.25.

Бажану ЛАХ побудуємо за методикою, що застосовується для безперервних систем (див. п. 6.11). Виходячи з заданої добротності системи за швидкістю, низькочастотну частину ЛАХ $L_c(\lambda)$ проведимо через точку з координатами $20 \lg \lambda = 0$, $L_{\text{вх}}(\lambda) = 20 \lg \lambda = 34 \text{ дБ}$ з нахилом

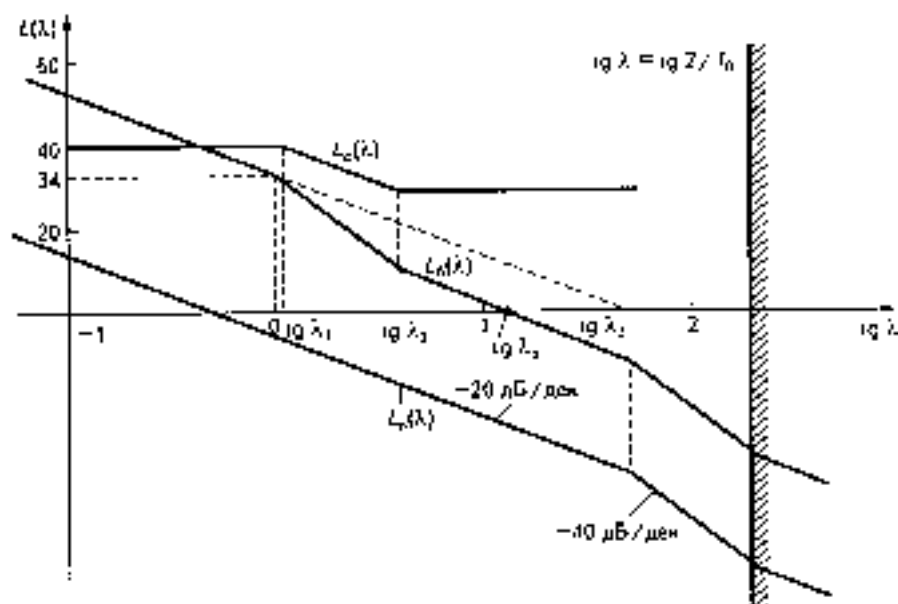


Рис 10.25

-20 дБ/дек. Виходячи із заданого часу розуміння $t_r = 1,5$ с і перерозв'язання $\sigma \leq 25\%$, визначимо частоту зрізу

$$\lambda_c = \frac{k_2 \pi}{t_r} = \frac{2\pi}{0,5} = 12,5 \text{ с}^{-1}.$$

де $k_2 = 2$ — коефіцієнт, що визначається за графіком $k_n = f(\sigma)$ (рис. 6.28).

Середньочастотну частину $L_s(\lambda)$ проводимо через точку з координатами $L(\lambda) = 0$, $\lg \lambda_1$ із нахилом -20 дБ/дек і сполучаємо її з низькочастотною частиною $L_n(\lambda)$ лінією з нахилом -40 дБ/дек.

Виходячи з типу бажаної ЛАХ, частоту сполучення середньочастотної частини з виськочастотною і виськочастотною частинами визначаємо з умов

$$\lambda_{s1}/\lambda_{c2} = 10; 2 < \lambda_{c1}/\lambda_1 < 4.$$

Виськочастотну частину характеристики $L_v(\lambda)$ проводимо паралельно характеристиці $L_n(\lambda)$.

ЛАН цифровий регулятор $L_n(\lambda)$ визначається як різниця $L_n(\lambda) = -L_{n-1}(\lambda)$. За підглядом ЛАН $L_n(\lambda)$ знаходимо комплексно-частотну функцію

$$W_n(j\lambda) = \frac{100(j\tau_1\lambda + 1)}{j\tau_1\lambda + 1} = \frac{100(j0,25\lambda + 1)}{j0,91\lambda + 1},$$

в якій $\lg \lambda_1 = 0,04$, $\lambda_1 = 1,1 \text{ c}^{-1}$; $\tau_1 = 0,91 \text{ c}$; $\lg \lambda_2 = 0,6$; $\lambda_2 = 4 \text{ c}^{-1}$; $\tau_2 = 0,25 \text{ c}$ визначено за характеристикою $L_r(\lambda)$ (рис. 10.25).

Виконавши підстановку

$$j\lambda = \frac{2}{T_v} \frac{z-1}{z+1},$$

дістаємо

$$W_n(z) = \frac{1100z - 900}{37,4z - 35,4}.$$

Цей вираз зведемо до вигляду, зручного для складання різницевих рівнянь

$$W_n(z) = \frac{U_n(z)}{v(z)} = \frac{29,4z}{z - 0,95} - \frac{24,1}{1 - 0,95z^{-1}}.$$

Введемо коефіцієнт z^{-1} , що забезпечує виконання програми корекції на мікро-ЕОМ у реальному масштабі часу,

$$\frac{U_n(z)}{v(z)} = \frac{29,4z^{-1} - 24,1z^{-2}}{1 - 0,95z^{-1}}$$

і запишемо різницеве рівняння корекції

$$u_n[nT_0] - 0,95u_n[(n-1)T_0] + 29,4v[(n-1)T_0] - 24,1v[(n-2)T_0].$$

У цьому рівнянні $u_n[nT_0]$ — число, що подається на ЦАП, уявлення про вихід цифрового регулятора, $v[nT_0]$ — число на виході АЦП, що перетворює різницю сигналів задання і зворотного зв'язку за швидкістю в цифровий код.

Під час обчислення $u_n[nT_0]$ приймається, що $u_n[nT_0] = 0$ при $n \leq 0$ і функція $v[nT_0]$ прикладається в момент $n = 0$. Тоді $u_n[nT_0]$ обчислюємо у такій послідовності: в кінці першого такту $n = 1$ $u_n[1T_0] = 29,4v[0]$, в кінці другого такту $n = 2$ $u_n[2T_0] = 0,95u_n[1T_0] + 29,4v[1T_0] - 24,1v[0]$ і т. д.

Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягають основні відмінності дискретних систем від безперервних?
2. Дайте класифікацію імпульсних САК за видами модуляції
3. Вкажіть основні переваги імпульсних систем над безперервними.
4. Що таке імпульсний елемент і якими параметрами він характеризується?
5. Як подивиться реальний імпульсний елемент при математичному описанні імпульсних систем?
6. Що таке екстраполятор нульового порядку?
7. Дайте визначення решітчастої функції. Чим вона відрізняється від безперервної?
8. Поясніть поняття «зміненої решітчастої функції».
9. Наведіть форми запису і методи розв'язування лінійних різницьових рівнянь зі сталими коефіцієнтами
10. Наведіть основні формули дискретного перетворення Лапласа
11. Що таке z -перетворення? Чому його приділяють для дослідження імпульсних систем, аніж дискретне перетворення Лапласа?
12. Вкажіть основні властивості z -перетворення
13. Наведіть послідовність розв'язування різницьових рівнянь на основі z -перетворення
14. Як визначається передаточна функція розімкнутої і замкнутої імпульсних систем?
15. Як побудувати АФХ розімкнутої імпульсної системи і як за нею визначити стійкість замкнутої системи?
16. За яких умов імпульсна і безперервна системи будуть еквівалентними?
17. Як побудувати АФХ імпульсної системи за відомими АФХ безперервної частини?
18. У чому суть інваріантності і як воно застосовується для розрахунку імпульсних систем?
19. Як побудувати логарифмічні характеристики імпульсних систем? Що таке псевдошум?
20. Як визначити стійкість імпульсної системи за коренями характеристичного рівняння, що дістають внаслідок застосування z -перетворення?
21. Як досліджується стійкість імпульсної системи за критерієм Гурвіца?
22. Сформулюйте критерій Михайлова для імпульсних систем. Який вигляд має годограф аектора Михайлова для стійкої і нестійкої імпульсних систем третього порядку?
23. Сформулюйте критерій Найквіста для імпульсних систем. Наведіть відповідні характеристики.
24. Як оцінюється точність роботи імпульсної системи в установившому режимі?
25. Якими показниками характеризується якість перекладних процесів імпульсних систем?

26. Розкрийте суть корекції імпульсних систем. Якими способами вона виконується?
27. Які типи коректуральних пристроїв застосовуються в імпульсних системах?
28. Дайте визначення цифрової системи автоматичного керування.
29. Як здійснюється математичне описання цифрових систем?
30. У чому полягає особливість лобудови погарифмічних характеристик цифрових систем у низько-частотній і високочастотній зонах?
31. Поясніть методику синтезу коректурального пристрою в цифрових системах за допомогою ЛАХ

11.1

Завдання оптимального керування

Слово «оптимальний» у широкому розумінні означає «найкращий» відносно до деякого критерію ефективності. Система автоматичного керування називається *оптимальною*, якщо в ній забезпечується найкраще значення основного показника якості роботи. Цей показник називається *критерієм оптимальності*.

Використання методів теорії оптимального керування є одним з найперспективніших способів підвищення якості САК, що проєктуються. Теорія оптимального керування — це розділ теорії автоматичного керування, де досліджуються властивості траєкторій динамічних систем, що є оптимальними за певним критерієм (мінімум часу переходу з одного стану в інший, максимальна можлива точність виконання завдання керування, мінімум витрат енергії тощо) при дотриманні числових обмежень.

Вимоги, що ставляться до системи, можна пов'язати з досягненням екстремуму (звичайно мінімуму) деякої величини I — показника якості роботи системи або критерію оптимальності. Наприклад, критерієм оптимальності при досягненні максимальної точності системи може бути мінімум середньої квадратичної похибки регулювання, що виражається інтегралом

$$I = \int_0^t x^2(t) dt, \quad (11.1)$$

де $x(t)$ — відхилення регульованої величини від бажаного значення. Величина I є функціоналом, тобто числом, що залежить від впливу функції $x(t)$.

Забільшого критерій оптимальності приймається у вигляді квадратичного функціонала від кількох функцій

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^r a_i^2 f_i^2(t) dt, \quad (11.2)$$

де a_i — задані вагові коефіцієнти; t_0, t_1 — час початку і закінчення роботи об'єкта.

У загальному випадку критерій оптимальності залежить від стану системи, що визначається векторами регульованих координат $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, керуючих дій (керуваль) $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, збурюючих дій $g = (g_1, g_2, \dots, g_l)$, збурень $f = (f_1, f_2, \dots, f_r)$ в часу t , тому його можна записати у вигляді

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_n(x, u, g, f, t) dt = \min. \quad (11.3)$$

У теорії оптимального керування розглядаються методи, які дають змогу визначити оптимальне керування u , за допомогою якого об'єкт керування переходить з одного стану в інший так, що при цьому мінімізується функціонал I , дотримуються обмеження на координати і керування, а рівняння динаміки об'єкта і характеристики зв'язаних дій у процесі керування не змінюються.

Обмеження, що накладаються на регульовані координати (змінні стану) і керування, зазвичай подаються у вигляді нерівностей

$$|x_i(t)| \leq x_{i\max}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11.4)$$

$$|u_k(t)| \leq u_{k\max}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (11.5)$$

де $x_{i\max}$ — максимально допустимі значення змінних стану; $u_{k\max}$ — максимально допустимі значення керувань, що відображають обмежені ресурси керування.

Розглянемо постановку задачі оптимального керування. Нехай динамічні властивості об'єкта керування описуються рівняннями

$$dx_i/dt = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, f_1, f_2, \dots, f_r, t) \quad (11.6)$$

або у векторній формі

$$\dot{x} = \varphi(x, u, f, t), \quad (11.7)$$

якість системи оцінюється функціоналом

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x, u, t) dt, \quad (11.8)$$

а обмеження в загальній формі подано у вигляді системи нерівностей

$$v_i(x, u) \leq v_{i, \max}, \quad (11.9)$$

де v_i — задані функціонали змінних стану і керувань.

Початкові та кінцеві стани об'єкта характеризуються точками в просторі станів, тобто векторами $x(t_0) = x^0$ і $x(t_1) = x^1$, або деякими зонами простору станів $q_0(x)$ і $q_1(x)$. У цьому разі задача оптимального керування формулюється так: для об'єкта керування, що описується рівнянням (11.7), необхідно знайти таке керування u , яке у разі дотримання обмежень (11.9) переводить об'єкт з початкового стану у кінцевий так, що при цьому функціонал (11.8) набуває мінімуму.

Керування, що задовольняє ці вимоги, називається оптимальним.

Початкові та кінцеві точки фазової траєкторії об'єкта можуть бути фіксованими у n -вимірному просторі координат або зазначатися вищими у певному розумінні. Час процесу також може бути фіксованим (за винятком задач про максимальну швидкість) або змінним.

Оптимальне керування може визначатися в параметричній формі

$$u_j = u_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (11.10)$$

або в непараметричній

$$u_j = u_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (11.11)$$

Розв'язок у вигляді (11.10) відповідає програмному керуванню залежно від часу, а у вигляді (11.11) — керуванню залежно від змінних стану, що реалізується за допомогою зворотних зв'язків за цими змінними.

Найпростішу форму оптимізаційний функціонал набуває в задачах оптимізації систем за критерієм максимальної швидкості. Цьому випадку відповідає $\varphi_0 = 1$ і функціонал (11.2) $J = t_1 - t_0$, а критерієм оптимальності стає умова $t_1 - t_0 = \min$.

Визначення функції, для якої функціонал набуває мінімуму, це задача варіаційного числення. Методи варіаційного числення можна умовно розділити на класичні і сучасні.

До класичних належать методи, що базуються на рівняннях Ейлера, Якобі, Вейерштресса.

До сучасних належить принцип максимуму Понтріяна з методом динамічного програмування Р. Беллмана.

Класичні методи доцільно застосовувати в задачах, що не мають обмежень, тобто коли розглядаються малі відхилення змінних стану і керувань від ustalених значень.

Сучасні методи розроблені саме для розв'язування задач оптимального керування. Вони надають можливість враховувати обмеження керувань і змінних стану, оперують із широким класом функцій керування, пристосовані для використання обчислювальної техніки.

11.2

Методи класичного варіаційного числення

Первинним поняттям варіаційного числення є поняття функціонала. Змінна величина, значення якої визначається вибором однієї або кількох функцій, називається *функціоналом*. У класичному варіаційному численні основним об'єктом дослідження є функціонал стандартного вигляду

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x(t), \dot{x}(t), t) dt, \quad (11.12)$$

причому припускається, що функція $\varphi_0(x, \dot{x}, t)$ безперервна і має безперервні частинні похідні за всіма змінними до другого порядку включно.

Визначення екстремалі, тобто функції $x(t)$, що мінімізує функціонал (11.12), зводиться до розв'язування рівняння

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (11.13)$$

при заданих граничних умовах

$$x(t_0) = x_0; \quad x(t_1) = x_1. \quad (11.14)$$

Рівняння (11.13) називається *рівнянням Ейлера* і становить першу необхідну умову екстремуму.

Якщо x_0 і x_1 є заданими числами, то задача, що розглядається, називається *варіаційною задачею із закріпленими граничними умовами*.

Безперервно диференційовані функції $x(t)$, які визначені на інтервалі $[t_0, t_1]$ і задовольняють умови (11.14), називаються *допустимими функціями*.

Виходячи з того, що

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_0(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial \dot{x}} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \dot{x} \partial x} \frac{d^2 x}{dt^2} + \\ &+ \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t \partial \dot{x}} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial \ddot{x}} \dot{x} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t \partial \dot{x}}, \end{aligned}$$

рівняння Ейлера (11.13) можна записати у розгорнутому вигляді:

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial \ddot{x}} \dot{x} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t \partial \dot{x}} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0. \quad (11.15)$$

Розв'язки цього рівняння $x(t, C_1, C_2)$ називаються *екстремумами*. Вони містять дві сталі C_1 і C_2 , які визначаються граничними умовами (11.14).

З рівняння Ейлера випливає необхідна умова екстремуму, але вона не дає можливості визначити максимуму чи мінімуму набуває функціонал. Відповідь на це запитання дає теорема Лежандра (*друга необхідна умова екстремуму*): функціонал (11.12) набуває мінімуму, якщо виконується умова

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} > 0 \quad (11.16)$$

і максимуму, якщо

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} < 0. \quad (11.17)$$

Цю задачу можна узагальнити також на випадок, коли підінтегральна функція функціонала (11.12) залежить від кількох функцій однієї змінної t , тобто функціонал має вигляд

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t) dt. \quad (11.18)$$

У цьому разі, змінюючи одну з функцій $x_i(t)$ і залишаючи інші незмінними, маємо функціонал вигляду (11.12), що залежить тільки від однієї функції $x_i(t)$. Ця функція, що дає екстремум функціоналу, має задовольняти рівняння Ейлера (11.13). Такі рівняння можна скласти для кожної функції $x_i(t)$ і мати систему диференціальних рівнянь Ейлера, що визначають сім'ю екстремалів даної варіаційної задачі:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}_1} \right) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_n} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}_n} \right) = 0. \end{cases} \quad (11.19)$$

Підінтегральна функція функціонала може мати не тільки першу, а й другу похідну. В цьому разі функціонал

$$I = \int_{t_0}^t \varphi_0(x(t), \dot{x}(t), x(t), t) dt, \quad (11.20)$$

причому передбачається, що функція φ_0 є диференційованою необхідну кількість разів.

Граничні умови записуються у вигляді

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0^{(1)}, \quad x(t_1) = x_1, \quad \dot{x}(t_1) = \dot{x}_1^{(1)}. \quad (11.21)$$

Екстремалю функціонала (11.20) є розв'язок рівняння

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \ddot{x}} \right) = 0, \quad (11.22)$$

яке називається *рівнянням Ейлера—Пуассона*. Воно є рівнянням четвертого порядку. Його розв'язок $x(t, C_1, C_2, C_3, C_4)$ має чотири сталі, які визначаються граничними умовами (11.21).

Варіаційна задача узагальнюється також на випадок, коли підінтегральна функція має похідні вищих порядків, тобто функціонал

$$I = \int_{t_0}^t \varphi_0(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(p)}, t) dt \quad (11.23)$$

при заданих граничних умовах $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = x_0^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$, $x(t_1) = x_1$, $\dot{x}(t_1) = x_1^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}(t_1) = x_1^{(n-1)}$.

У цьому разі екстремаль є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \ddot{x}} \right) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x^{(n)}} \right) = 0. \quad (11.24)$$

Якщо функціонал (11.23) містить тільки функцій $x(t)$, то дістаємо систему рівнянь вигляду (11.24).

Можуть бути й складніші задачі, в яких граничні точки (t_0, x_1) , (t_1, x_1) не фіксовані, а можуть рухатися по траєкторіях

$$x_1 = \rho_1(t);$$

$$x_0 = \rho_0(t).$$

Дві довільні сталі C_1 і C_2 , що входять у загальний розв'язок рівняння Ейлера, визначаються не з граничних умов, а з так званих умов *трансверсальності*:

$$\left[\varphi_0 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \frac{dx}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \right]_{t=t_1} = 0; \quad (11.25)$$

$$\left[\varphi_0 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \frac{dx}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \right]_{t=t_0} = 0. \quad (11.26)$$

Положення кінця екстремалі (точки t_0 і t_1) можна знайти як точки перетину екстремалі з кривими $x_0 = \rho_0(t)$ і $x_1 = \rho_1(t)$.

На практиці трапляються задачі про знаходження екстремуму функціонала при додаткових умовах, що накладаються на функції, у класі яких відшукується екстремум. Такі задачі називаються *задачами про умовний екстремум* (зв'язаний екстремум). Нехай задано функціонал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \phi_p(x, \dot{x}, t) dt \quad (11.27)$$

(x — n -вимірний вектор змінних стану об'єкта) з додаткові рівняння, що називаються *рівняннями зв'язку*:

$$v_j(x, \dot{x}, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad m \leq n \quad (11.28)$$

за умови, що інші функціонали, які є рівняннями зв'язків, повинні мати задані значення

$$I_i = \int_0^T \varphi_i(x, \dot{x}, u) dt = L_i, \quad i = 2, 3, \dots, k. \quad (11.33)$$

Подібні задачі називаються *ізопериметричними*. Вони зводяться до задачі на умовний екстремум. У цьому разі відшукується екстремум функціонала

$$I = \int_0^T (\varphi_1 + \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi_i) dt = \int_0^T \Phi dt, \quad (11.34)$$

де λ_i — довільні сталі множники Лагранжа, що визначаються з умов $I_i = L_i$. Екстремаль функціонала I є розв'язком рівняння Ейлера

□ Приклад 11.1. Розв'язати задачу оптимізації керування електро-двигуном постійного струму з незалежним збудженням, який відтворює кутове переміщення θ за мінімальний час T при обмеженні на-грівання двигуна, що визначається струмом якоря.

Розв'язання. Кількість теплоти, що виділяється в якорі двигуна,

$$Q = \int_0^T Ri^2 dt, \quad (11.35)$$

де R — опір якорного кола, i — струм якоря.
Кутове переміщення

$$\theta_0 = \int_0^T \omega dt, \quad (11.36)$$

де ω — кутова швидкість двигуна.

Розглядувану задачу можна сформулювати як ізопериметричну з шийти екстремаль функціонала

$$I_1 = \int_0^T dt = \min \quad (11.37)$$

за наявності рівнянь зв'язку

$$I_2 = \int_0^T Ri^2 dt \leq Q_{\text{доп}}, \quad (11.38)$$

$$I_3 = \int_0^T \omega dt = \theta_0. \quad (11.39)$$

Для розв'язування цієї задачі необхідно знайти екстремаль функціонала (11.34):

$$J = \int_0^1 \Phi dt - \int_0^1 (\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3) dt \quad (11.40)$$

Оскільки $\varphi_1 = 1$, що випливає із порівняння функціоналів (11.32) і (11.37), $\varphi_2 = R\dot{\omega}$ і $\varphi_3 = \omega$, то

$$J = \int_0^1 \Phi dt - \int_0^1 (1 + \lambda_2 R\dot{\omega} + \lambda_3 \omega) dt \quad (11.41)$$

Прийнявши, що момент статичного навантаження M , дорівнює нулю і магнітний потік збудження постійний, визначимо струм якоря і через швидкість ω за рівнянням руху електропривода

$$J \frac{d\omega}{dt} = M \quad (11.42)$$

з залежністю між моментом і струмом якоря двигуна

$$M = c i \quad (11.43)$$

У цих рівняннях J — приведений до валу двигуна момент інерції електропривода; c — сталий коефіцієнт.

З рівнянь (11.42) і (11.43) дістанемо

$$i = \frac{J}{c} \frac{d\omega}{dt} \quad (11.44)$$

і запишемо функціонал (11.41) у вигляді

$$J = \int_0^1 (1 + \lambda_2 \omega + \lambda_3 k \dot{\omega}^2) dt, \quad (11.45)$$

де

$$k = \frac{J^2 R}{c^2}.$$

Рівняння Ейлера (11.13) для функціонала (11.45)

$$\frac{d\Phi}{d\omega} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\omega}} \right) = \lambda_1 - 2\lambda_2 k \dot{\omega} = 0$$

або

$$1 - 2\lambda_2 k \dot{\omega} = 0,$$

де $\lambda_1 = \lambda_2/\lambda_3$. Звідси

$$\dot{\omega} = 1/2\lambda_2 k. \quad (11.46)$$

Розв'язавши (11.46), дістанемо рівняння екстремали

$$\omega = \frac{1}{4\lambda_0 k} r^2 + C_1 r + C_2, \quad (11.47)$$

де C_1, C_2 — сталі інтегрування.

Використавши рівняння (11.44), визначимо струм ядра

$$i = \frac{J}{c} \frac{1}{2\lambda_2 k} r + \frac{J}{c} C_1. \quad (11.48)$$

Отже, оптимальне за швидкістю керування двигуном, що підлягає задане переміщення, має здійснюватися за згладженим законом змінювання швидкості за лінійним законом змінювання струму.

Сталі інтегрування C_1 і C_2 , а також сталі множники λ_2 і λ_1 , або їх співвідношення $\lambda_0 = \lambda_2/\lambda_1$, визначаються з граничних умов $\omega(0) = 0$, $\omega(T) = 0$ і рівнянь зв'язку (11.38), (11.39).

З умови $\omega(0) = 0$ і рівняння (11.47) дістанемо $C_2 = 0$, а з умови $\omega(T) = 0$ і того самого рівняння визначимо

$$C_1 = -\frac{T}{4\lambda_0 k}.$$

Підставивши значення C_1 і C_2 в рівняння (11.47) і (11.48), знайдемо

$$\omega = \frac{1}{4\lambda_0 k} r^2 - \frac{T}{4\lambda_0 k} r, \quad (11.49)$$

$$i = \frac{J}{c} \frac{1}{2\lambda_0 k} r - \frac{JT}{4\lambda_0 ck}. \quad (11.50)$$

Підставимо в рівняння зв'язку (11.38) $i(t)$ з формули (11.50), тоді

$$\begin{aligned} & \int_0^T R \left(\frac{J^2}{c^2} \frac{1}{4\lambda_0^2 k^2} r^2 - 2 \frac{J^2}{c^2} \frac{T}{8\lambda_0^2 k^2} r + \frac{J^2}{c^2} \frac{T^2}{16\lambda_0^2 k^2} \right) dt = \\ & = \frac{RJ^2}{4c^2 \lambda_0^2 k^2} \int_0^T \left(r^2 - Tr + \frac{T^2}{4} \right) dt = \frac{RJ^2 T^3}{48\lambda_0^2 k^2} = Q_{\text{звн}}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\lambda_0^2 = \frac{RJ^2 T^3}{48Q_{\text{звн}} c^2 k^2}. \quad (11.51)$$

З рівняння зв'язку (11.39) після підстановки в нього $\omega(t)$ з формулою (11.49) дістанемо

$$\frac{1}{4\lambda_0 k} \int_0^T (r^2 - Tr) dt = -\frac{T^3}{24\lambda_0 k} = Q_0.$$

швидки

$$\lambda_0 = -\frac{T^3}{24k\alpha_0} \quad (11.52)$$

і

$$\lambda_1^2 = \frac{T^6}{24^2 k^2 \alpha_0^2} \quad (11.53)$$

Порівнявши вирази (11.52) і (11.53), початично мінімальний час перебігнення T , тобто значення функціонала (11.37)

$$T = \sqrt{\frac{12\alpha_0^2 R^2}{e^2 Q_{\text{зм}}}} \quad (11.54)$$

Підставляючи значення T в (11.52), дістаємо

$$\lambda_0 = -\frac{R^2 \alpha_0}{2Q_{\text{зм}} e^2 k} \quad (11.55)$$

Значення λ_0 і T підставимо у вираз (11.49) і (11.50) і остаточно визначимо рівняння швидкості і струму якоря електричного двигуна при оптимальному керуванні.

Керування двигуном здійснюється зміною напруги на групі якорного кола. Закон оптимального триггерного керування $u_a(t)$ можна знайти з виразу

$$u_a = iR + c\omega \quad (11.56)$$

якщо нехтувати індуктивністю якорного кола. У цьому разі для визначення $u_a(t)$ достатньо в рівняння (11.56) підставити знайдені функції $i(t)$ і $\omega(t)$. Оскільки $i(t)$ є лінійною функцією часу, а $\omega(t)$ — параболічною, то $u_a(t)$ також змінюватиметься за параболічним законом. Графіки змінювання швидкості, струму і напруги на групі двигуна наведено на рис. 11.1.

Для визначення закону оптимального керування як функції змінних стану θ і ω , що реалізується за допомогою шортингів зв'язків, необхідно з рівнянь $i(t)$ і $\omega(t)$ вилучити час і знайти значення $i(\omega)$ підставити в рівняння (11.56).

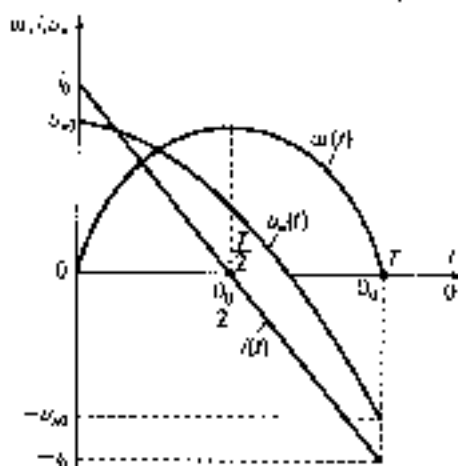


Рис. 11.1

Остаточною залежність $u_i(t, 0)$ має такий вигляд:

$$u_i(t, 0) = 4 \sqrt{\frac{RQ_{2,0}}{Q_0}} \left(\sqrt{\frac{9Q_{2,0}^2 \epsilon^2}{4Q_0 R} - 2\epsilon} \right) \left\{ \operatorname{sign}(0, -2t) + \epsilon \omega \right\}.$$

11.3

Принцип максимуму

Подальшим розвитком класичного варіаційного числення і його узагальненням на випадки, коли оптимальні керування обмежені і становлять кусково-безперервні функції з точками розриву першого роду, кількість яких невідома, є метод, який називається *принципом максимуму*. Розроблено цей метод у 1956 р. Л. С. Понтрягіном та його школою.

Принцип максимуму є необхідною і достатньою умовою оптимальності процесу лише для лінійних об'єктів. У загальному випадку для нелінійних об'єктів він є тільки необхідним. Це означає, що принцип максимуму дає можливість визначити не оптимальне керування, а деяку зручну групу допустимих керувань. Оптимальне керування, якщо воно взагалі існує, належатиме саме до цієї групи.

Розглянемо суть застосування принципу максимуму. Нехай динаміка об'єкта керування описується рівняннями

$$\begin{aligned} dx_i/dt &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m), \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (11.57)$$

або у векторній формі

$$\dot{x} = \varphi(x, u), \quad (11.58)$$

де x — n -вимірний вектор змінних стану (координат системи); u — m -вимірний вектор керувань. Крім того, вважатимемо, що керування u належить до деякої замкнутої множини Ω

$$u(t) \in \Omega,$$

тобто керування $u_1(t), \dots, u_m(t)$ для кожного t набувають значень в множині Ω .

Керування, що становлять кусково-безперерпні функції і набувають значень із множини Ω , називаються *допустимими*.

Крім рівнянь динаміки об'єкта задається функціонал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x, u) dt. \quad (11.59)$$

Задача полягає в тому, щоб серед допустимих керувань, що переводять об'єкт, який описується рівнянням (11.58), з початкового стану $x(t_0) = x^{(0)}$ в кінцевий $x(t_1) = x^{(1)}$, знайти таке, для якого функціонал (11.59) набуває екстремуму.

Для зручності розв'язування задачі вводиться додаткова штучна змінна стану x_n , для якої

$$dx_n/dt = \varphi_0(x, u), \quad (11.60)$$

а також допоміжні функції $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, що визначаються лінійними однорідними рівняннями

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = - \sum_{j=0}^n \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n, u, \dots, u_n), \quad (11.61)$$

$$i = 0, 1, \dots, n.$$

Приданавши рівняння (11.60) до системи (11.57), дістанемо систему з $(n+1)$ рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n), \quad (11.62)$$

$$i = 0, 1, \dots, n,$$

права частина яких не залежить від x_n .

Рівняння (11.62) у векторній формі має вигляд

$$d\tilde{x}/dt = \tilde{\varphi}(\tilde{x}, u) \quad (11.63)$$

Гут на відміну від рівняння (11.58) вектор $\tilde{x}$ та його похідна $\tilde{\varphi}(\tilde{x}, u) \in (n+1)$ -вимірними. Ця різниця позначається знаком $\sim$.

Якщо тепер ввести допоміжну функцію $\tilde{H}$ (функцію Гамільтона) у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\varphi_0, \dots, \varphi_n, x_0, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n) = \\ = \sum_{i=0}^n \varphi_i \varphi_i(\varphi_0, \dots, \varphi_n, x_0, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n). \end{aligned} \quad (11.64)$$

то рівняння (11.61) і (11.62) можна об'єднати в одну систему, що відома в механіці як система Гамільтона:

$$dx_i/dt = \partial \tilde{H} / \partial \psi_i, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad (11.65)$$

$$d\psi_i/dt = -\partial \tilde{H} / \partial x_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (11.66)$$

Рівняння (11.65) — це рівняння об'єкта, а (11.66) — спряжені рівняння.

Після цих попередніх зауважень сформулюємо принцип максимуму:

для того щоб керування $u(t)$ і траєкторія $x(t)$, що йому відповідає, були оптимальними, необхідно існування такої ненульової безперервної $(n+1)$ -вимірної вектор-функції $\psi(t)$, складові якої задовольняють рівняння (11.65), (11.66), щоб для будь-якого t у заданому інтервалі $t_0 < t < t_1$ величина $\tilde{H}$ як функція керувань $u(t)$ у заданій зоні їх допустимих значень досягла максимуму:

$$\tilde{H} = \tilde{M}(u_0, \dots, u_n, x_0, \dots, x_n), \quad (11.67)$$

причому $\psi_0 = \text{const}$ і $\tilde{M} = \text{const}$ ($\psi_0 < 0$ і $\tilde{M} = 0$).

Оскільки функція $\tilde{H}$ становить скалярний добуток вектора цінності зображуючої точки $\dot{x} = \varphi(x, u)$ і вектора ψ , то принципу максимуму можна дати таке геометричне пояснення. Нехай вихідному і кінцевому станам системи відповідають зображуючі точки $x(t_0)$ та $x(t_1)$ у просторі станів (рис. 11.2). Кожній точці простору станів відповідає деяка оптимальна траєкторія та мінімальний час переходу в кінцеву точку $x(t_1)$. Навколо цієї точки можна побудувати поверхню, що є геометричним місцем точок з однаковим мінімальним часом переходу t_n у цю точку. Такі поверхні називаються *ізохронами*. Очевидно, що оптимальна за швидкістю траєкторія з початкової у кінцеву точку повинна бути настільки максимально близькою до нормалі до ізохрон, наскільки це дозволяють обмеження, що накладаються на зміни стану і керування. Математично ця умова саме і вимагає максимуму скалярного добутку вектора швидкості $\dot{x}$ на вектор ψ , зворотний градієнтові часу переходу в кінцеву точку.

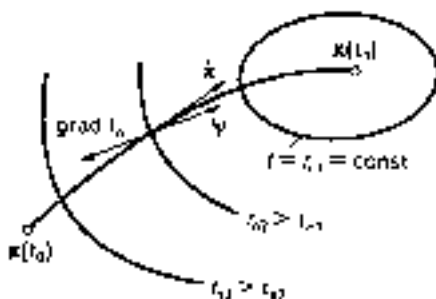


Рис. 11.2

В найпростішому випадку оптимальності (оптимальності за швидкістю), коли час t_1 не фіксований, а півінтегральною функція ψ (11.59) $\varphi(x, u)$ тогочасно дорівнює одиниці, функціонал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 = \min. \quad (11.68)$$

Функція Гамільтона $\tilde{H}$ у цьому разі виражається за формулою

$$\tilde{H} = \psi_u + H,$$

де

$$H = \sum_{i=1}^n \psi_i \varphi_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n, u_1, \dots, u_m).$$

Потужні величини з нульовими індексами не потрібні, і система рівнянь Гамільтона матиме вигляд

$$dx_i/dt = \partial H / \partial \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (11.69)$$

$$d\psi_i/dt = -\partial H / \partial x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.70)$$

Оскільки $\psi_i = \text{const}$, то максимум $\tilde{H}$ реалізується одночасно з максимумом функції H , а з вимоги $\psi_i \leq 0$ відповідно до принципу максимуму випливає, що максимум $H \geq 0$, тобто $M \geq 0$.

Отже, зрізний максимуму для систем, оптимальних за швидкістю, можна сформулювати так:

необхідно знайти таку чотирьохкомпонентну безперервну n -вимірну вектор-функцію $\psi(t)$, складові якої задовольняють рівняння (11.69), (11.70), щоб для всіх t у заданому інтервалі $t_0 \leq t \leq t_1$ величина H як функція керувань $u(t)$ у заданій зоні їх допустимих значень досягала максимуму

$$H = H(\psi_1, \dots, \psi_n, x_1, \dots, x_n),$$

причому величина M стала у часі і $M \geq 0$.

Розглянемо застосування принципу максимуму для окремого випадку оптимального за швидкістю керування лінійними об'єктами, що описуються рівняннями

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (11.71)$$

де $x(t)$ — n -вимірний вектор змінних стану об'єкта; $u(t)$ — m -вимірний вектор керування; A , B — матриці сталих коефіцієнтів розмірності $n \times n$ і $n \times m$.

У розглянутому вигляді рівняння (11.71) мають вигляд

$$\dot{x}_i/dt = \varphi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{l=1}^m b_{il} u_l, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11.72)$$

тому функція Гамільтона

$$H = \sum_{i=1}^n \psi_i \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{l=1}^m b_{il} u_l \right] \quad (11.73)$$

або у векторній формі

$$H = (\psi, Ax) + (\psi, Bu) \quad (11.74)$$

За принципом максимуму оптимальне керування надає максимум функції H при обмеженнях u . Але щоб функція H набула максимуму при зміні u , достатньо, щоб другий доданок у виразі (11.73) або (11.74) був максимальним, тобто

$$\begin{aligned} (\psi, Bu) &= \sum_{i=1}^n \left[\psi_i \sum_{l=1}^m b_{il} u_l \right] = \sum_{l=1}^m \left[\sum_{i=1}^n b_{il} \psi_i u_l \right] = \\ &= \sum_{l=1}^m \left[\sum_{i=1}^n b_{il} \psi_i u_l \right] = \max. \end{aligned} \quad (11.75)$$

При $m = 1$ і обмеженні $|u(t)| \leq u_{\max}$ умова (11.75) має вигляд

$$\sigma_1(t) u(t) = \max_{|u| \leq u_{\max}} \sigma_1(t) u,$$

де

$$\sigma_1(t) = \sum_{i=1}^n \psi_i b_{i1}.$$

Умовою екстремуму будь-якої гладкої функції, яку задано у відкритій зоні змінення її аргументу, є рівність нулю її похідної. Якщо функція задана в замкнутій зоні, то вона може набувати екстремуму всередині зони або на її межах. У розглянутому випадку функція $\sigma_1 u$ є лінійною відносно u , тобто її похідна не залежить від u .

Оскільки u не має обмежень, то не існує значення u , при якому досягається екстремум. Якщо функція H розглядається у замкнутому інтервалі $[-u_{\max}, +u_{\max}]$ змінювання u , то вона набуває максимуму на межах інтервалу (рис. 11.3). Отже, функція H досягає максимуму при

$$u = u_{\max} \operatorname{sign} \frac{\partial H}{\partial u} = u_{\max} \operatorname{sign} \sigma_1.$$

Цей вираз є справедливим для будь-якого моменту часу, тому оптимальне керування

$$u(t) = u_{\max} \operatorname{sign} \sum_{i=1}^m b_i \psi_i.$$

У загальному випадку при $m > 1$ кожна складова вектора керування $u(u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$ змінюється в межах зони керування незалежно від решти складових і має набувати максимального значення. Очевидно, що умова (11.75) виконується, якщо керування

$$u_i = u_{\max} \operatorname{sign} \left[\sum_{j=1}^m b_{ij} \psi_j \right], \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (11.76)$$

З цього виразу випливає, що керування в лінійних системах, оптимізованих за швидкодією, має бути релейним.

Розв'язування задач максимальної швидкодії за принципом максимуму виконується в такому порядку:

1. Записуються рівняння динаміки об'єкта у вигляді (11.57).

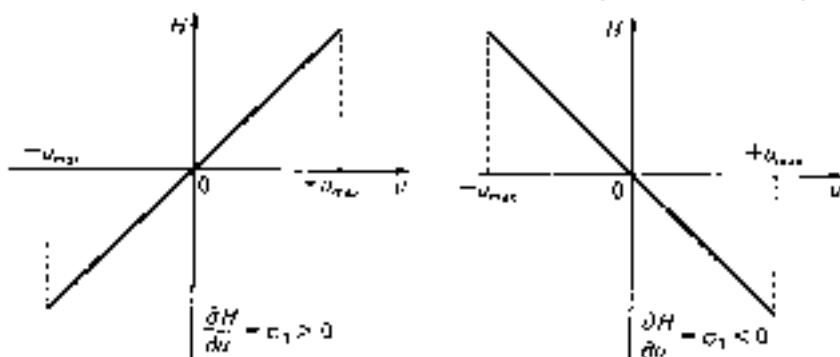


Рис. 11.3

2. Складається функція Гамільтона, що дорівнює скалярному добутку векторів φ і u , тобто

$$H = \varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 + \dots + \varphi_n \psi_n.$$

3. Відшукуються частинні похідні функції H за u_i , які визначають екстремум функції H . Якщо H лінійно залежить від u_i , то частинна похідна $\partial H / \partial u_i \in$ функцією одиниці або кількох складових вектора u . При цьому для досягнення додатного максимуму H необхідно, щоб $u_i = +u_{i, \max}$ при $\varphi_i(t) > 0$ і $u_i = -u_{i, \max}$ при $\varphi_i(t) < 0$, тобто

$$u_i = u_{i, \max} \operatorname{sign} \varphi_i(t).$$

Отже, керування для повільного скачком набувати значення $+u_{i, \max}$ або $-u_{i, \max}$.

Якщо залежність H від u_i нелінійна, то частинна похідна $\partial H / \partial u_i$ прирівнюється нулю та із знайденого виразу визначається u_i , при якому H набуває екстремуму.

4. Визначаються допоміжні функції ψ_i , для чого складається і розв'язується система рівнянь вигляду (11.70).

5. Для замкнутих систем визначається керування як функція змінних стану об'єкта $u = f(x)$.

Складність аналітичного розв'язування задачі оптимального керування в тому, що загальна кількість невідомих параметрів становить $(2n+1) \cdot n$ змінних стану x_i , n функцій φ_i і загальний час керування $T = t_f - t_1$. Для їхнього визначення необхідно мати $2n$ граничних умов, а також умову для визначення T . Проте випадково початкові та кінцеві значення задаються для змінних x_i , а для функцій φ_i вони не задані. Прямих способів розв'язування таких задач немає — більшість із них можна розв'язувати числовими методами.

Один з можливих підходів до розв'язання задачі такий. Беруть довільні початкові значення φ_i , тобто довільний вектор $\varphi(t_1)$, розв'язують рівняння (11.69), (11.70) і визначають функції $x_i(t)$, $\varphi_i(t)$. Потім при $t = t_f$ перевіряють, чи виконується умова $x(t_f) = x^{\text{зад}}$. Якщо вона не виконується, то беруть нове значення $\varphi(t_1)$ і для нього визначають $x(t_f)$ і т. д. Отже, шукане оптимальне керування визначають методом послідовних наближень. Процедура триває доти, доки не буде знай-

дано такий вектор $\psi(t_0)$, для якого умова $x(t) = x^{(0)}$ виконуватиметься з прийнятною точністю.

Аналітичний розв'язок можна знайти тільки для відносно простих задач.

- **Приклад 11.2.** Визначити закон змінювання струму якоря двигуна постійного струму з послідовним збудженням, що забезпечує відпрацювання кутового переміщення θ , протягом мінімального часу T при обмеженні струму якоря $|i| \leq i_{\max}$ і статичному моменті $M_c = 0$.

Розв'язання. Рівняння, що описують динаміку двигуна,

$$\frac{d\omega}{dt} = c i / J, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega,$$

де ω — кутова швидкість двигуна; c — сталий коефіцієнт; J — момент інерції електропривода.

Приймаємо такі позначення змінних стану і керування: $\omega = x_1$, $\theta = x_2$, $i = u$. Тоді рівняння двигуна

$$\begin{cases} \dot{x}_1/dt = \varphi_1 = cu/J, \\ \dot{x}_2/dt = \varphi_2 = x_1 \end{cases} \quad (11.77)$$

при початкових умовах $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ і кінцевих значеннях змінних стану $x_1(T) = 0$, $x_2(T) = \theta_1$.

Введемо для допоміжних функцій часу φ_1 і φ_2 і складемо функцію Гамільтона для системи рівнянь (11.77):

$$H = \varphi_1 \varphi_1 + \varphi_2 \varphi_2 = \frac{c}{J} \varphi_1 u + \varphi_2 x_1.$$

З умови максимуму цієї функції по u позначимо оптимальне керування

$$u = u_{\max} \operatorname{sign} \varphi_1, \quad (11.78)$$

тому що функція H лінійно залежить від u .

Складемо спрощену систему рівнянь для допоміжних функцій φ_1 і φ_2 відповідно (11.79):

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1/dt = -\partial H/\partial x_1 = -\varphi_2, \\ \dot{\varphi}_2/dt = -\partial H/\partial x_2 = 0. \end{cases} \quad (11.79)$$

Позначимо доки що певними початковими умовами для допоміжних функцій так, $\varphi_1(0) = C_1$, $\varphi_2(0) = C_2$. Тоді розв'язок системи рівнянь (11.79) матиме вигляд

$$\varphi_1 = C_1 - C_2 t; \quad \varphi_2 = C_2$$

згідно до (11.78)

$$v = i_{\text{max}} \operatorname{sign} (C_1 - C_2)$$

Функція $v(t)$ на інтервалі $(0, T)$ змінює знак не більше одного разу. Позначимо момент зміни знака t_1 . Тоді

$$v(t) = \begin{cases} i_{\text{max}} & \text{при } t < t_1, \\ -i_{\text{max}} & \text{при } t \geq t_1. \end{cases}$$

Визначимо момент перемикання t_1 . Для цього використаємо перше рівняння системи (11.77). На першій ділянці при $t < t_1$ значення $v = i_{\text{max}}$. Тому

$$dx_1/dt = ci_{\text{max}}/J$$

Рішенням цього рівняння при початкових умовах $x_1(0) = 0$

$$x_1 = \frac{c}{J} i_{\text{max}} t.$$

При $t = t_1$ швидкість у кінці першої ділянки

$$\dot{x}_1(t_1) = \frac{c}{J} i_{\text{max}} t_1.$$

На другій ділянці при $t \geq t_1$ значення $v = -i_{\text{max}}$, тому

$$dx_1/dt = -ci_{\text{max}}/J$$

Розв'язок цього рівняння

$$x_1 = -\frac{c}{J} i_{\text{max}} t + C_2.$$

Сталу інтегрування C_2 визначимо з умови, що функція $x_1(t)$ при $t = t_1$ не має розриву і на другій ділянці $x_1(t_1) = ci_{\text{max}}t_1/J$. Тоді

$$C_2 = \frac{2c}{J} i_{\text{max}} t_1$$

і

$$x_1 = -\frac{c}{J} i_{\text{max}} t + \frac{2c}{J} i_{\text{max}} t_1$$

При $t = T$ $x_1(T) = 0$, тобто

$$0 = -\frac{c}{J} i_{\text{max}} T + \frac{2c}{J} i_{\text{max}} t_1.$$

Звідси

$$t_1 = T/2$$

Час T визначимо з умови, що при $t = T$ кутове переміщення дорівнює θ_0 . Тоді в друге рівняння системи (11.77) маємо

$$x_2 = \int_0^T x_1(t) dt = \theta_0$$

або

$$\int_0^{T/2} i_{\max} dt + \int_{T/2}^T \left(-i_{\max} + \frac{2\epsilon}{T} i_{\max} t \right) dt = 0,$$

звідки

$$T = 2 \sqrt{\frac{L i_{\max}}{\epsilon}}.$$

Позначивши струм якоря і швидкість як, запишемо закони зміно-
вання струму і швидкості під час випрямлення динутном заданого
переміщення.

$$i(t) = \begin{cases} i_{\max} & \text{при } t < T/2, \\ -i_{\max} & \text{при } T/2 < t \leq T; \end{cases}$$

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{\epsilon}{J} i_{\max} t & \text{при } t < T/2, \\ \frac{\epsilon}{J} i_{\max} (T - t) & \text{при } T/2 < t \leq T. \end{cases}$$

Закон зміновання напруги на якорі визначимо з рівняння
 $u_a = iR + c\omega$. Цей закон має вигляд

$$u_a(t) = \begin{cases} i_{\max} R + \frac{c^2}{J} i_{\max} t & \text{при } t < T/2, \\ -i_{\max} R + \frac{c^2}{J} (T - t) & \text{при } T/2 < t \leq T. \end{cases}$$

Графіки зміновання струму, швидкості і напруги на якорі динута
наведені на рис. 11.4.

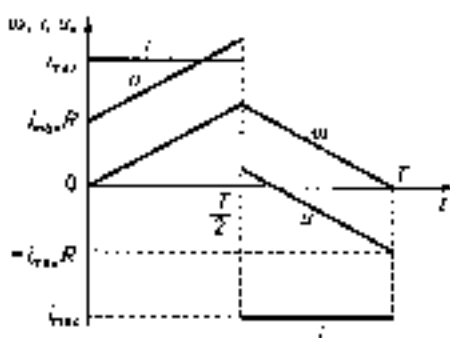


Рис. 11.4

11.4

Теорема про n інтервалів

Однією з окремих, але досить важливих задач оптимальної швидкодії розв'язана в 1953 р. у працях А. А. Фельдбаума незалежно від праць Л. С. Понтрягіна. А. А. Фельдбаум довів таку теорему:

для об'єктів, що описуються лінійним диференціальним рівнянням з сталими коефіцієнтами

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = u(t),$$

корені характеристичного рівняння якого є дійсними від'ємними або нульовими, а $|u(t)| \leq u_{\max}$, оптимальне керування має не більше, ніж n інтервалів максимального значення $\pm u_{\max}$ і $n-1$ моментів перемикання,

Ця теорема дістала назву *теорема про n інтервалів*. Згідно з нею оптимальне керування за наявності обмеження керуючого сигналу складається з n інтервалів, у кожному з яких керуючий сигнал досягає свого максимального значення, тобто час перебігу оптимального процесу $x(t)$ поділяється на n інтервалів, у кожному з яких процес описується рівнянням

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = \sigma u_{\max}, \quad (11.80)$$

де $\sigma = +1$, і не змінюється протягом кожного інтервалу. В кінці кожного інтервалу знак керуючого сигналу змінюється. Цей висновок повністю збігається з результатом, який дістався для лінійних систем за принципом максимуму Понтрягіна.

Теорема про n інтервалів може поширюватися також на випадок, коли обмеження накладаються не тільки на керування u , а й на зміни стану системи. У цьому разі кількість інтервалів оптимального керування збільшується, бо крім інтервалів, у яких максимального значення набуває керування, додаються ще й інтервали, коли обмежені зміни стану системи мають свої граничні значення.

Сама по собі теорема про n інтервалів не визначає правил вибору знака керування на першому інтервалі та способи визначення тривалості інтервалів або моментів перемикання.

У багатьох випадках знак керуючого сигналу на початку процесу визначається потрібним напрямком змінювання вихідного сигналу x .

Розглянемо спочатку найпростіший випадок, коли об'єкт описується рівняннями

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_2, \\ dx_2/dt = u. \end{cases} \quad (11.81)$$

Необхідно визначити оптимальне керування u , що переводить об'єкт з довільного початкового стану $x_1(0)$, $x_2(0)$ в стан спокою $x_1(t_*) = 0$, $x_2(t_*) = 0$ протягом мінімального часу при обмеженні $|u| \leq 1$. Рівняння (11.81) лінійні, тому оптимальне за швидкістю керування u може набувати тільки двох значень: $u = +1$ і $u = -1$. Розглядувана система є системою другого порядку, тому лінійно з теоремою про n інтервалів у ній має відбуватися одне перемикання.

Для розв'язування задачі синтезу оптимального керування побудуємо фазові траєкторії об'єкта. Для цього з рівнянь (11.81) виключимо час, поділивши перше рівняння на друге:

$$dx_1/dx_2 = x_2/u. \quad (11.82)$$

Керування u може набувати лише двох значень $+1$ і -1 , тому рівняння (11.82) подамо у вигляді

$$\begin{cases} dx_1/dx_2 = x_2 \text{ при } u = +1, \\ dx_1/dx_2 = -x_2 \text{ при } u = -1. \end{cases} \quad (11.83)$$

Інтегрувавши ці рівняння, дістанемо рівняння фазових траєкторій:

$$x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 + C \text{ при } u = +1, \quad (11.84)$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2 + C \text{ при } u = -1. \quad (11.85)$$

Фазові траєкторії становлять дві сім'ї парабол (рис. 11.5). При $C = 0$ параболи описуються рівняннями

$$x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 \text{ і } x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2 \quad (11.86)$$

і проходять через початок координат, який відповідає кінцевому стану об'єкта $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Частини цих парабол, по яких зображуючи точка приходить у початок координат, утворюють лінійне перемикання L_* . Позначимо частину цієї лінії при $u = +1$ через L_+^* , а при $u = -1$ — через L_-^* . Отже, на останньому інтервалі оптимального процесу з'

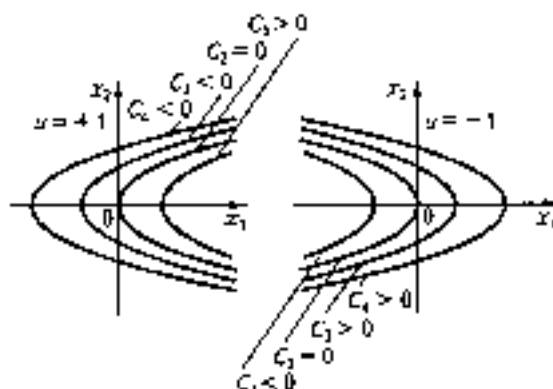


Рис. 11.5

зображуюча точка потрапляє у початок координат по лінії L_1 або L_1' (рис. 11.6).

Лінія L_1 розділяє фазову площину на дві зони D_1 і D_2 . Якщо в початковий момент часу зображуюча точка знаходиться в зоні D_1 (наприклад, точка M_1), то на першому інтервалі слід прийняти $u = -1$. Тоді зображуюча точка рухатиметься по параболі, що описується рішенням (11.85), і проходить через точку M_1 . У момент часу, коли зображуюча точка потрапляє в положення N_1 , необхідно змінити керування на $u = +1$. Після цього зображуюча точка рухатиметься в початок координат по параболі N_1O . Крива M_1N_1O є оптимальною траєкторією, що відповідає початковому стану $x_1(0), x_2(0)$.

Якщо в початковий момент часу зображуюча точка знаходиться у зоні D_2 і має положення M_2 , то необхідно прийняти $u = +1$. У цьому разі оптимальна траєкторія має вигляд M_2N_2O . В точці N_2 керування перемикається на $u = -1$.

Рівняння лінії перехоплення згідно з (11.86) можна подати у вигляді

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2|x_2| = 0. \quad (11.87)$$

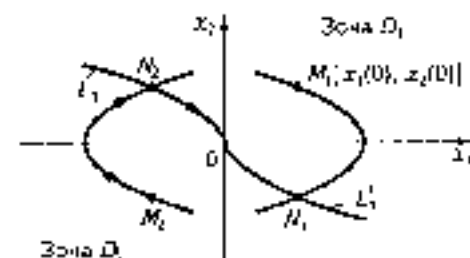


Рис. 11.6

Відповідно до цього рівняння оптимальне керування

$$u = -1 \operatorname{sign} \sigma_1, \quad (11.88)$$

$$\text{де } \sigma_1 = x_1 + \frac{1}{2} x_2 |x_2|.$$

Функціональну схему, що реалізує оптимальний закон керування, показано на рис. 11.7. Нелінійний елемент НЕ формує функцію $F(x_2) = \frac{1}{2} x_2 |x_2|$. Помноження здійснюється релейним елементом РЕ, сигнал на виході якого $u = -1 \operatorname{sign} \sigma_1$.

Розглянемо випадок, коли об'єкт керування описується лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку з сталими коефіцієнтами, яке можна подати у вигляді n рівнянь першого порядку:

$$dx_i/dt = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i u, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.89)$$

Вважаємо, що керуваний орган один, тобто керування скалярне, і обмеження керування дорівнює одиниці, $|u| \leq 1$. Тоді рівняння (11.89) можна записати у вигляді двох рівнянь

$$dx_i/dt = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \quad \text{при } u = +1 \quad (11.90)$$

$$dx_i/dt = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \quad \text{при } u = -1. \quad (11.91)$$

Крім того, приймаємо, що шукане оптимальне керування має протягом мінімального часу перевести зображувану точку з довільного початкового стану в кінцевий, який вважатимся початок координат простору станів. Ця задача про повернення зображуваної точки

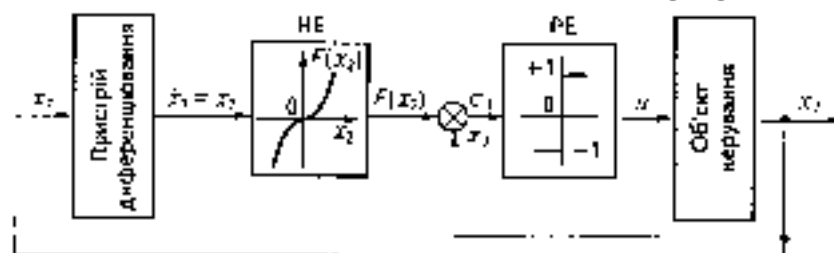


Рис. 11.7

в початок координат простору станів протягом мінімального часу відповідає поверненню об'єкта у вихідний установлений стан, відносно якого змінні стану набули деякого відхилення $x_1, x_2, \dots, x_n$ під дією збурень, прикладених до об'єкта. Змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$ можна також розглядати як відхилення (або похибки) відносно нового установленого стану. Отже, якщо об'єкт перебуває в заданому стані, то завжди $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Рівняння (11.90) відповідає одна сім'я траєкторій у просторі станів, а рівняння (11.91) — інша. Позначимо їх відповідно L' і L . У сім'ях траєкторій L' і L існує по одній траєкторії, яка проходить через початок координат. Вітки цих траєкторій, що закінчуються в початку координат, становлять півтраєкторії L'_1 і L_1 . Об'єднаємо їх в одну траєкторію L_1 . Очевидно, що зображуюча точка може виїхати з початку координат обов'язково по лінії L_1 , що відповідає останньому інтервалу оптимального процесу.

Протягом мінімального процесу знаки керуючої дії на сусідніх інтервалах чергуються, тому кінці множини півтраєкторій передостаннього інтервалу L_2 належать півтраєкторії L'_1 , а кінці L'_2 — півтраєкторії L_1 . Сукупності півтраєкторій L_2 і L'_2 утворюють дві поверхні, кожна з яких за межу має криву L_1 . Обидві поверхні спливаються до лінії L_1 і створюють поверхню L_2 , рухаючись якою зображуюча точка потрапляє на лінію L_1 і по ній — в початок координат. Продовжуючи цю побудову, дістанемо поверхні $L_3, L_4, \dots, L_n$.

Для об'єктів з дійсними від'ємними коренями характеристичного рівняння процес синтезу полягає в знаходженні поверхні L_{n-1} , яка розділяє простір станів на дві зони, в одній з яких зображуюча точка рухається траєкторіями, що відповідають рівнянню (11.90), а в іншій — рівнянню (11.91). При цьому, якщо початкова точка перебуває в зоні L_n простору станів, то в кінці першого інтервалу зображуюча точка потрапляє в зону L_{n-1} , де керування перемикається. Насліді зображуюча точка, рухаючись по поверхні L_{n-1} , потрапляє на поверхню L_{n-2} , де керування знову перемикається. Врешті-решт зображуюча точка потрапляє на поверхню L_1 і після останнього перемикання по лінії L_1 — у початок координат.

Поверхні, що розглядаються, описуються трансцендентними рівняннями, тому задача синтезу (визначення поверхні перемикання L_{n-1}) розв'язується в замкнутому вигляді лише для систем другого і третього порядку. Для систем вищого порядку можна знайти частинний розв'язок або обмежитися керуванням, близьким до оптимального.

11.5

Динамічне програмування

Метод динамічного програмування розроблено американським математиком Р. Беллманом на початку 50-х років. Цей метод дає можливість розв'язувати задачі оптимального керування, тобто є одним із способів розв'язування варіаційних задач. Крім того, за допомогою динамічного програмування можна розв'язувати задачі, що за своєю природою є дискретними (не перетвореними та підзональними безперервних задач). Це має велике значення для найрізноманітнішої галузі техніки та економіки, пов'язаних із дискретними процесами виробництва.

Метод динамічного програмування базується на *принципі оптимальності*:

будь-який кінець ділянки оптимальної траєкторії є також оптимальною траєкторією, тобто оптимальна стратегія не залежить від попереднього стану системи, а визначається лише її станом у момент часу, що розглядається.

Нехай, наприклад, ідемо оптимальна траєкторія, що переводить систему, яка описується рівняннями

$$\begin{cases} \dot{x}_1/dt = \varphi_1(x_1, x_2, u, t), \\ \dot{x}_2/dt = \varphi_2(x_1, x_2, u, t), \end{cases} \quad (11.92)$$

зі стану $x_1(t_0), x_2(t_0)$ в стан $x_1(t_1), x_2(t_1)$. Ця траєкторія зображено на рис 11.8. Її відповідне мінімум функціонала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_3(x_1, x_2, u) dt, \quad (11.93)$$

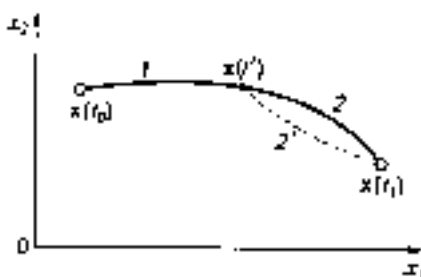


Рис. 11.8

до $u(x_1, x_2, t)$ — відоме оптимальне керування.

Позначимо оптимальну траєкторію на дві ділянки 1 і 2. Принцип оптимальності встановлює, якщо вся траєкторія оптимальна, то й ділянка 2 також оптимальна.

Обґрунтування принципу оптимальності досить очевидне. Припустимо, що ділянка 2 не оптимальна. Тоді має існувати інша

ділянка Z' , що починається в точці $x(t')$, $x_*(t')$, на якій функціонал (11.93) набуде меншого значення, ніж на ділянці Z . В цьому разі значення функціонала на траєкторії $I \rightarrow Z'$ буде меншим, ніж на траєкторії $I \rightarrow Z$, тобто траєкторія $I \rightarrow Z$ не оптимальна, що суперечить припущенню про те, що траєкторія $I \rightarrow Z$ оптимальна.

Принцип оптимальності дає можливість покрокової організації процесу відшукування оптимального керування, починаючи, наприклад, з останнього кроку. Це істотно спрощує задачу оптимізації, тому що можна оптимізувати керування на кожному кроці окремо.

Формальним записом принципу оптимальності є *функціональне рівняння Беллмана*. Зокрема для системи другого порядку (11.92) воно має вигляд

$$S[x_1(t_n), x_2(t_n), t_n] = \min_u \left\{ \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} \varphi_n[x_1(t), x_2(t), u(t)] dt + \right. \\ \left. + S[x_1(t_n + \Delta t), x_2(t_n + \Delta t), t_n + \Delta t] \right\}. \quad (11.94)$$

У цьому рівнянні використано такі позначення для функціоналу на оптимальних траєкторіях:

$$S[x_1(t_n), x_2(t_n), t_n] = \min_u \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} \varphi_n[x_1(t), x_2(t), u(t)] dt, \quad (11.95)$$

$$S[x_1(t_n + \Delta t), x_2(t_n + \Delta t), t_n + \Delta t] = \\ = \min_u \int_{t_n + \Delta t}^{t_n + 2\Delta t} \varphi_n[x_1(t), x_2(t), u(t)] dt. \quad (11.96)$$

Граничне значення S при $t = t_1$ дорівнює нулю.

Функціональне рівняння Беллмана дає по суті рекурентні співвідношення для розв'язування задачі оптимізації чисельним методом.

Розглянемо процедуру застосування рівняння Беллмана для відшукування оптимального керування на такому простому прикладі. Нехай динаміка об'єкта описується рівнянням першого порядку

$$dx/dt = f_1(x, u), \quad (11.97)$$

де x — єдина координата об'єкта, u — єдине керуюче дія, яка має обмеження $|u| \leq u_{\max}$. Відомі початкові умови $x(t_0) = x_0$ і функціонал, що мінімізується,

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x, u) dt \quad (11.98)$$

Поділимо інтервал часу $t_1 - t_0$ на m рівних частин тривалістю $\Delta t = (t_1 - t_0)/m$. Тоді рівняння (11.97) можна записати в скінченних різницях

$$\frac{x[(k+1)\Delta t] - x(k\Delta t)}{\Delta t} = f_1[x(k\Delta t), u(k\Delta t)]$$

або

$$x_{k+1} - x_k = f(x_k, u_k), \quad (11.99)$$

де

$$f(x_k, u_k) = f_1(x_k, u_k) \Delta t.$$

а інтеграл (11.98) замінити сумою,

$$J = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_1[x(k\Delta t), u(k\Delta t)] \Delta t = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(x_k, u_k). \quad (11.100)$$

Задача тепер полягає у визначенні послдовності дискретних значень керуючої дії $u_0, u_1, \dots, u_{m-1}$ для кожного Δt , що мінімізують суму (11.100) при умові (11.99) її обмеженні $|u| \leq u_{\max}$. Сформульована задача є задачею знаходження мінімуму складної функції багатьох змінних. Метод динамічного програмування має можливість звести цю задачу до простішої — до послідовної мінімізації деяких функцій лише однієї змінної.

Розв'язування задачі зручно починати з кінця процесу, тобто з моменту часу $t = t_1$, і прикуватися до його початку $t = t_0$, оскільки при $t = t_1$ функціонал дорівнює нулю.

На початку останнього етапу процес характеризується значеннями координати x_{m-1} і керуючої дії u_{m-1} . Згідно з принципом оптимальності керування u_{m-1} не залежить від попереднього стану системи, а визначається лише значенням x_{m-1} і метою керування. На останньому кроці траєкторії від t_{m-1} до $t_m = t_1$ вибір керуючої дії u_{m-1} впливає лише на останній доданок суми (11.100)

$$J_{m-1} = \varphi(x_{m-1}, u_{m-1}). \quad (11.101)$$

Оптимальне керування u_{m-1} на $m-1$ -му кроці повинно мінімізувати величину J_{m-1} . Позначимо мінімальну величину функціонала J_{m-1} через S_{m-1} . З виразу (11.101) видно, що S_{m-1} залежить від x_{m-1} , тобто від стану системи в момент t_{m-1} . Тому можна записати

$$S_{m-1}(x_{m-1}) = \min_{u_{m-1}} J_{m-1} = \min_{u_{m-1}} \{\varphi(x_{m-1}, u_{m-1})\}.$$

Для визначення S_{n-1} потрібно мінімізувати J_{n-1} лише за однією змінною u_{n-1} . Виконавши цей процес, знайдемо значення S_{n-1} і відповідні їм оптимальні керування u_{n-1} як функції змінної x_{n-1} . Значення S_{n-1} і u_{n-1} для різних x_{n-1} необхідно занести до пам'яті ЕОМ перш ніж переходити до наступних етапів розв'язування.

Переходимо тепер до передостанньої ділянки часу від t_{n-1} до t_n . Для неї матимемо

$$\begin{aligned} S_{n-2}(x_{n-2}) &= \min_{u_{n-2}} J_{n-2} = \\ &= \min_{u_{n-2}} \{\varphi(x_{n-2}, u_{n-2})\} + S_{n-1}(x_{n-1}). \end{aligned} \quad (11.102)$$

З урахуванням (11.99) запишемо

$$x_{n-1} = x_{n-2} + f(x_{n-2}, u_{n-2}),$$

тоді з (11.102) дістанемо

$$\begin{aligned} S_{n-2}(x_{n-2}) &= \min_{u_{n-2}} \{\varphi(x_{n-2}, u_{n-2})\} + \\ &+ S_{n-1}[x_{n-2} + f(x_{n-2}, u_{n-2})] \end{aligned}$$

Мінімізація тут виконується також за однією змінною u_{n-2} і при цьому визначається оптимальне значення керування u_{n-2} та мінімум функції J_{n-2} , що дорівнює S_{n-2} . Для кожного фіксованого x_{n-2} знайдене оптимальне значення u_{n-2} мінімізує всю величину S_{n-2} , а не лише її перший доданок. При цьому для кожного u_{n-2} за формулою (11.99) обчислюється координата x_{n-1} , знайдена на попередньому кроці. Внаслідок мінімізації J_{n-2} дістанемо залежності $S_{n-2}(x_{n-2})$ і $u_{n-2}(x_{n-2})$, які заносяться до пам'яті ЕОМ.

Аналогічно виконуючи переходи до чергових кроків, запишемо рекурентну формулу

$$\begin{aligned} S_{m-k}(x_{m-k}) &= \min_{u_{m-k}} \{\varphi(x_{m-k}, u_{m-k})\} + \\ &+ S_{m-k-1}[x_{m-k} + f(x_{m-k}, u_{m-k})]. \end{aligned} \quad (11.103)$$

За цією формулою можна визначити оптимальне значення функціонала на будь-якому кроці.

Обчислюючи за формулою (11.103) S_{m-k} послідовно для $k = 1, 2, \dots, m$, визначасмо, нарешті, $u(0)$, тобто керуючу дію, яка необхідна в початковий момент часу. Одначасно з визначенням $u(0)$ дістанемо також $S(0)$, тобто мінімальне значення функціонала при оптимальному керуванні.

Розглянуту процедуру можна застосувати також у загальному випадку, коли об'єкт керування описується рівнянням

$$\dot{x} = \varphi(x, u, t),$$

а функціонал, що мінімізується, має вигляд

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(x, u) dt.$$

Розв'язування починаємо з кінцевого моменту $t = t_1$. Визначаємо і запам'ятовуємо оптимальне значення керування $u(m-1)$ на початку останнього інтервалу для кожного можливого дискретного значення $x(m-1)$ в границях обмежень на зміні стану системи. Одночасно запам'ятовуємо відповідний приріст $S(m-1)$ функціонала, що мінімізується. Потім переходимо до передостаннього $(m-2)$ -го кроку і визначаємо мінімум функціонала $S(m-2)$ за два останніх кроки і відповідне оптимальне значення $u(m-2)$ як функцію $x(m-2)$. Мінімуми значення $S(m-2)$ для конкретного значення $x(m-2)$ знаходимо шарпуюванням $u(m-2)$. При цьому для кожного $u(m-2)$ спочатку визначаємо приріст функціонала за другий крок і значення $x(m-1)$ в кінці другого кроку. Після цього, використовуючи раніше знайдену залежність $S(m-1)$ від $x(m-1)$, визначаємо повний приріст функціонала $S(m-2)$ за два кроки. Переходимо далі до початку $(m-3)$ -го кроку і т. д., нарешті потрапляємо в початкову точку $x(t_1)$, визначаючи при цьому оптимальне керування $u(t)$, сам оптимальний процес $x(t)$ і сумарну величину критерію оптимальності.

Описана процедура лише в найпростіших випадках має можливість знайти розв'язок в аналітичній формі. У загальному випадку метод динамічного програмування слід розглядати як метод складання програми для числового розв'язування задач за допомогою ЕОМ.

Метод динамічного програмування можна використовувати також без подання задачі оптимального керування в дискретній формі. Для цього застосовується *диференціальне рівняння Беллмана*

$$-\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \min_u \left[\varphi_0(x, u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_i} \varphi_i(x, u, t) \right], \quad (11.104)$$

де x — n -вимірний вектор змінних стану об'єкта; u — m -вимірний вектор керування.

Якщо система стаціонарна, то S не залежить від t , тобто $\partial S / \partial t = 0$, і рівняння (11.104) матиме вигляд

$$\min_u \left\{ \varphi_n(x, u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(x)}{\partial x_i} \varphi_i(x, u) \right\} = 0. \quad (11.105)$$

Якщо прийняти $\varphi = 1$, то від загальної задачі можна перейти до задачі про максимальну швидкодію. Рівняння (11.104) у цьому разі

$$-\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \min_u \left\{ 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_i} \varphi_i(x, u, t) \right\}.$$

Для стаціонарної системи $\partial S / \partial t = 0$:

$$\min_u \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(x)}{\partial x_i} \varphi_i(x, u) = -1$$

Якщо ввести функцію $V(x) = -S(x)$, яку називають *функцією*, то

$$\max_u \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \varphi_i(x, u) = 1.$$

Це рівняння є рівнянням Белмана в задачі про максимальну швидкодію.

Якщо відомо, що оптимальне керування належить множині U або подібні обмеження взагалі відсутні, то рівняння (11.105) можна подати як сукупність рівнянь у частинних похідних

$$\begin{cases} \varphi_n(x, u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(x)}{\partial x_i} \varphi_i(x, u) = 0, \\ \frac{\partial \varphi_n(x, u)}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i(x, u)}{\partial u_k} = 0, \end{cases} \quad (11.106)$$

де $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Отже, щоб розв'язати задачу оптимального керування, необхідно розв'язати систему (11.106) з $m+1$ рівнянь у частинних похідних. У найпростішому випадку для системи першого порядку, що має одну керувану змінну, рівняння Белмана мають вигляд

$$\begin{cases} \varphi_1(x, u) + \frac{\partial S(x)}{\partial x} \varphi_1(x, u) = 0, \\ \frac{\partial \varphi_1(x, u)}{\partial u} + \frac{\partial S(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1(x, u)}{\partial u} = 0. \end{cases} \quad (11.107)$$

□ **Приклад 11.3.** Для об'єкта, що описується рівнянням

$$dx/dt = ax + bu = \varphi(x, u)$$

знайти оптимальне керування u , при якому мінімізується функціонал

$$J = \int_0^T (c_1 x^2 + c_2 u^2) dt + \int_0^T \varphi(x, u) dt$$

Розв'язання. Рівняння (11.107) мають вигляд

$$c_1 x^2 + c_2 u^2 + (ax + bu) \frac{\partial S}{\partial x} = 0;$$

$$2c_2 u + b \frac{\partial S}{\partial u} = 0.$$

Вилучивши з цих рівнянь $\partial S / \partial x$, дістанемо

$$c_1 bx^2 + 2ac_2 ux - bx_1 x^2 = 0,$$

звідки оптимальне керування u як функцію x

$$u = -c_1 \frac{a}{b} x + \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{c_1}{c_2}} = -kx$$

Розбізнок x мігусом перед коренем відкидаємо як такі, що не відповідає вимогам стійкості.

Отже, шуканий оптимальний закон керування є лінійним.

11.6

Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів

Методика синтезу оптимального керування $u(x)$ для відомого об'єкта при заданих критерії оптимальності та обмеженнях називається аналітичним конструюванням регуляторів.

Одним із методів аналітичного конструювання регуляторів, що базується на застосуванні методу динамічного програмування для певного класу систем, є метод Льюїса.

Розглянемо об'єкт керування, що описується лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами:

$$dx_i/dt = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i u, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

і має одну керувальну дію u .

Треба визначити оптимальне керування $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що мінімізує функціонал

$$I = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i^2 + c_0 u^2 \right) dt, \quad (11.108)$$

де $c_i \geq 0$; $c_0 > 0$; $i = 1, 2, \dots, n$, при переводі цієї системи з початкового стану $x(0) = x_0$ в кінцевий $x(\infty) = 0$.

Для цієї задачі рівняння (11.104) має вигляд

$$-\frac{\partial S}{\partial u} = m_1 u \left| \varphi_1(x, u) \right| + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \varphi_i(x, u) \left| \right|,$$

де

$$\varphi_0 = \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 + c_0 u^2;$$

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i u.$$

Введемо твірну функцію $V = -S$. Для стаціонарного об'єкта функція S залежить лише від початкового положення зображеної точки в просторі станів, тому

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$\min_u \left\{ \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 + c_0 u^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i u \right) \right\} = 0. \quad (11.109)$$

Якщо прийняти, що керування u не має обмежень, то вираз (11.109) набуває мінімуму в точці, де похідна дорівнює нулю, тобто

$$2c_0 u - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$$

$$u = \frac{1}{2c_0} \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (11.110)$$

Підставивши знайдене значення λ у вираз (11.109), дістанемо рівняння для визначення ширшої функції

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i^2 + \frac{1}{4c_1} \left(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial V}{\partial x_j} \right)^2 - \\ - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \frac{b_i}{2c_i} \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial V}{\partial x_j} \right) = 0$$

або

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 + \frac{1}{4c_1} \left(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial V}{\partial x_j} \right)^2 = 0. \quad (11.111)$$

Рівняння (11.111) є нелінійним рівнянням у частинних похідних відносно функції V . Розв'язок цього рівняння підшукується у вигляді квадратичної форми від змінних стану системи, тобто

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-m_{ij} x_i x_j).$$

Якщо прийняти, що $m_{ji} = m_{ij}$, то частинні похідні V матимуть вигляд

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = -2 \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j. \quad (11.112)$$

Підставивши ці похідні в (11.111), дістанемо рівняння

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ij} a_{ik} x_k x_i + \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 - \\ - \frac{1}{c_1} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_j m_{ij} x_j \right)^2 = 0. \quad (11.113)$$

Цей вираз становить квадратичну форму змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$. Він тождно дорівнюватиме нулю за умови, що всі його коефіцієнти дорівнюють нулю. Тому, прирівнявши нулю сукупність коефіцієнтів при добутках $x_i x_j$ і врахувавши, що $x_i x_k = x_k x_i$, дістанемо систему з $n(n+1)/2$ лінійних рівнянь для визначення коефіцієнтів m_{ij} .

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (m_{ik} a_{ij} + m_{kj} a_{ji}) - \frac{1}{c_{ij}} \sum_{s=1}^r b_s m_{is} \sum_{s=1}^r b_s m_{js} = 0 \quad (j \neq k), \\ 2 \sum_{s=1}^r m_{is} a_{is} + c_{ii} - \frac{1}{c_{ii}} \left(\sum_{s=1}^r b_s m_{is} \right)^2 = 0 \quad (j = k). \end{cases} \quad (11.114)$$

Ці рівняння є алгебраїчними рівняннями Ріккати.

Визначивши коефіцієнти m_{ik} з використанням виразів (11.110) і (11.112), знайдемо оптимальне керування

$$u = - \frac{1}{c_0} \sum_{i=1}^n d_i x_i, \quad (11.115)$$

де

$$d_i = \sum_{s=1}^r b_s m_{si},$$

або

$$u = - \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

В останньому виразі a_i є коефіцієнтами зворотних зв'язки за змінними стану системи.

Отже, регулятор лінійний і для оптимального керування необхідно мати зворотні зв'язки за всіма змінними стану системи, оскільки всі коефіцієнти a_i не дорівнюють нулю.

□ Приклад 11.4. Перелаточна функція об'єкта

$$W(p) = \frac{K}{p(T_1^2 p^2 + 2\xi T_1 p + 1)} = \frac{\kappa(p)}{a(p)}.$$

Складти рівняння Ріккати для визначення коефіцієнтів квадратичної форми цільової функції.

Розв'язання. Рівняння динаміки об'єкта

$$T_1^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\xi T_1 \frac{dx}{dt} + x = k u$$

зведемо у форму Коші, зрівнявши $x_1 = x$, $\dot{x}_1 = dx/dt$, $\dot{x}_2 = d^2 x/dt^2$.

Початкова форма рівнянь така.

$$dx_1/dt = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u;$$

$$dx_2/dt = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u;$$

$$dx_3/dt = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3u.$$

У розглянутому прикладі ці рівняння мають вигляд

$$dx_1/dt = x_2;$$

$$dx_2/dt = x_3;$$

$$dx_3/dt = -\frac{1}{T^2} x_2 - \frac{2\xi}{T_1} x_3 + \frac{K}{T_1} u,$$

тобто

$$a_{11} = a_{12} = b_1 = a_{21} = a_{22} = b_2 = a_{31} = a_{32} = 0, \quad a_{33} = a_{34} = 1,$$

$$a_{33} = -1/T_1^2, \quad a_{34} = -2\xi/T_1, \quad b_3 = K/T_1^2.$$

Візьмемо оптимізувальну функцію у формі

$$J = \int_0^{\infty} (c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 + c_4 u^2) dt,$$

тоді рівняння (11.111) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_3 + \frac{\partial V}{\partial x_3} (a_{32} x_2 + a_{33} x_3) + \\ + c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left[\frac{\partial V}{\partial u} \right]^2 = 0. \end{aligned} \quad (11.116)$$

Запишемо функцію V при $m_0 = m_k$ в квадратичній формі

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, x_3) = & (m_{11} x_1^2 + m_{12} x_1 x_2 + m_{13} x_1 x_3 + m_{14} x_1 u + \\ & + m_{22} x_2^2 + m_{23} x_2 x_3 + m_{24} x_2 u + m_{33} x_3^2 + \\ & + m_{34} x_3 u + m_{44} u^2) = \\ = & -[m_{11} x_1^2 + m_{22} x_2^2 + m_{33} x_3^2 + 2(m_{12} x_1 x_2 + m_{13} x_1 x_3 + m_{23} x_2 x_3) + \\ & + 2(m_{14} x_1 u + m_{24} x_2 u + m_{34} x_3 u) + m_{44} u^2]. \end{aligned}$$

Частинні похідні функції V мають вигляд

$$\partial V / \partial x_1 = -2(m_{11} x_1 + m_{12} x_2 + m_{13} x_3);$$

$$\partial V / \partial x_2 = -2(m_{12} x_1 + m_{22} x_2 + m_{23} x_3);$$

$$\partial V / \partial x_3 = -2(m_{13} x_1 + m_{23} x_2 + m_{33} x_3);$$

Підставляючи ці похідні у вираз (11.116) і прирівнявши нулю суми коефіцієнтів при однакових x_1, x_2 , дістанемо систему з трьох рівнянь. Рікати для визначення параметрів m_k квадратичної форми функції:

для x_1^2

$$c_1 - b^2 m_{11}^2 / c_4 = 0;$$

для x_2^2

$$c_2 + 2m_{12} + 2m_{22} m_{33} - b^2 m_{22}^2 / c_4 = 0;$$

для x_3^2

$$c_3 + 2m_{13} + 2m_{23} m_{33} - b^2 m_{33}^2 / c_4 = 0;$$

для x_1, x_2

$$m_{11} + m_{11} \rho_{12} - b_1^2 m_{11} \rho_{12} / c_{11} = 0,$$

для x_1, x_3

$$m_{12} + m_{11} \rho_{13} - b_1^2 m_{11} \rho_{13} / c_{11} = 0,$$

для x_2, x_3

$$m_{22} - m_{22} + m_{22} \rho_{22} + m_{22} \rho_{13} - b_2^2 m_{22} / c_{22} = 0.$$

Варіанти констант c_1, c_2 , функціонала (11.108) вибираються, виходячи з максимально допустимих значень змінних стану системи і керуючих дій під час перехідного процесу:

$$c_1 = \left(\frac{1}{x_{\max}} \right)^2; \quad c_2 = \left(\frac{1}{u_{\max}} \right)^2.$$

У цьому разі функціонал матиме вигляд

$$J = \int_0^T \left[\sum_{i=1}^2 \left(\frac{x_i}{x_{\max}} \right)^2 + \left(\frac{u}{u_{\max}} \right)^2 \right] dt.$$

Розроблено й інші методи аналітичного конструювання регуляторів. Зокрема, метод О. А. Красовського відрізняється складнішими обмеженнями керування та змінних стану системи, а також і тим, що оптимізуючий функціонал не містить керування. Такий підхід дає змогу визначити оптимальне керування в замкнутій аналітичній формі для задач високої розмірності.

11.7

Застосування методу динамічного програмування для синтезу дискретних (цифрових) регуляторів

Розглянемо об'єкт керування, збурений рух якого описується системою різницевих рівнянь

$$\Delta x_i[v] = \varphi_i(x, u) = \sum_{j=1}^l a_{ij}(x, |u|) + b_i v[v], \quad (11.117)$$

$$i = 1, 2, \dots, k.$$

Наяість перехідних процесів оцінюється функціоналом

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k c_i x_i^2[n] + c_u u^2[n] \right). \quad (11.118)$$

де c_i, c_u — вагові коефіцієнти.

Потрібно знайти рівняння регулятора $u[n] = v(x_1[n], x_2[n], \dots, x_k[n])$, при якому функціонал (11.118) набуває мінімального значення і забезпечується повернення об'єкта в стан, що відповідає початку координат простору станів ($x[\infty] = 0$).

За аналогією з безперервними системами рівняння Беллмана для дискретних систем також можна дістати за допомогою принципу оптимальності. Це рівняння матиме вигляд

$$\min_u \left\{ W(x[n], u[n]) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial S(x)}{\partial x_i} \Delta x_i[n] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i[n] \Delta x_j[n] \right\} = 0, \quad (11.119)$$

де $W(x[n], u[n])$ — функція під знаком суми $\sum_n$ функціонала (11.118).

S — мінімум функціонала (11.118) за керуванням u .

Використовуючи функціонал у вигляді (11.118) і рівняння об'єкта (11.117), рівняння (11.119) можна подати у вигляді

$$\min_u \left[\sum_{i=1}^k c_i x_i^2 + c_u u^2 + \sum_{i=1}^k \frac{\partial S(x)}{\partial x_i} \varphi_i(x, u) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x_i \partial x_j} \varphi_i(x, u) \varphi_j(x, u) \right] = 0. \quad (11.120)$$

Визначивши похідну по u від цього виразу, дістанемо співвідношення для визначення рівняння цифрового регулятора

$$2c_u u + \sum_{i=1}^k \frac{\partial S(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i(x, u)}{\partial u} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \varphi_i(x, u)}{\partial u} \varphi_j(x, u) = 0. \quad (11.121)$$

Розглянемо застосування цих виразів на прикладі систем першого і другого порядків.

Нехай об'єкт описується рівнянням

$$\Delta x[n] = ax[n] + bu[n],$$

а функціонал — формулою

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} (c_1 x^2[n] + c_0 u^2[n]).$$

Тоді рівняння Беллмана згідно з (11.120) матиме вигляд

$$\min_u \left[c_1 x^2 + c_0 u^2 + \frac{\partial S(x)}{\partial x} (ax + bu) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2} (ax + bu)^2 \right] = 0 \quad (11.122)$$

Визначивши похідну по u , дістанемо

$$2c_0 u + b \frac{\partial S(x)}{\partial x} + abx \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2} + b^2 u \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2} = 0,$$

звідки

$$u = - \frac{b \frac{\partial S(x)}{\partial x} + abx \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2}}{2c_0 + b^2 \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2}}.$$

Підставивши значення u у формулу (11.122), одержимо

$$c_1 x^2 + u \frac{\partial S(x)}{\partial x} + \frac{1}{2} u^2 x^2 \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2} - \\ - \frac{\left(b \frac{\partial S(x)}{\partial x} + abx \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2} \right)^2}{4 \left(c_0 + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^2} \right)} = 0 \quad (11.123)$$

Функцію $S(x)$ виразуємо у вигляді квадратичної форми $S(x) = mx^2$. Для визначення коефіцієнта m складемо рівняння Ріккати. Для цього підставимо значення $dS(x)/dx = 2mx$ і $d^2S(x)/dx^2 = 2m$ у вираз (11.123), а потім прирівняємо нулю суму всіх коефіцієнтів при x^2 .

Після знаходження коефіцієнта m керування u запишемо у вигляді

$$u[n] = -\frac{bm + a^2 m}{c_2 + b^2 m} x[n]$$

Для об'єкта другого порядку, що описується рівняннями

$$x_1[n+1] = x_2[n] + b_1 u[n],$$

$$x_2[n+1] = ax_1[n] + b_2 u[n],$$

і функціонала

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} (c_1 x_1^2[n] + c_2 x_2^2[n] + c_3 u^2[n])$$

рівняння Беллмана має вигляд

$$\begin{aligned} \min_u \{ & c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 u^2 + \frac{\partial S(x_1, x_2)}{\partial x_1} (x_2 + b_1 u - x_1) + \\ & + \frac{\partial S(x_1, x_2)}{\partial x_2} (ax_1 + b_2 u - x_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} (x_2 + b_1 u - x_1)^2 + \\ & + \frac{\partial^2 S(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} (x_2 + b_1 u - x_1)(ax_1 + b_2 u - x_2) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} (ax_1 + b_2 u - x_2)^2 \} = 0 \end{aligned}$$

Дістанемо вираз для визначення рівняння цифрового регулятора:

$$\begin{aligned} 2(b_1 u + b_1 \frac{\partial S(x_1, x_2)}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial S(x_1, x_2)}{\partial x_2} + b_1 (x_2 + b_1 u - \\ - x_1) \frac{\partial^2 S(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} (b_2^2 x_2 + a b_1 x_1 - b_1 x_2 - b_2 x_1 + \\ + 2b_1 b_2 u) \frac{\partial^2 S(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} - b_2 (a x_1 - x_2 + b_2 u) \frac{\partial^2 S(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 0. \end{aligned} \quad (11.124)$$

Функцію S виразуємо в квадратичній формі

$$J(x_1, x_2) = m_{11}x_1^2 + 2m_{12}x_1x_2 + m_{22}x_2^2.$$

Коефіцієнти m_{11}, m_{12}, m_{22} визначаємо з системи трьох рівнянь Ріккати, після чого з виразу (11.124) знаходимо керування u як функцію x_1 і x_2 .

Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте задачу оптимального керування і поясніть, що таке критерій оптимальності?
2. Поясніть суть методів класичного варіаційного числення.
3. Що таке функціонал?
4. Наведіть рівняння Ейлера і рівняння Ейлера—Пуассона. Поясніть їхню суть.
5. Які задачі називаються ізопериметричними?
6. У чому полягає суть методу синтезу оптимальної системи із застосуванням принципу максимуму Понтрягіна?
7. Сформулюйте принцип максимуму Понтрягіна для систем, що є оптимальними за швидкодією.
8. Яка послідовність розв'язування задачі максимальної швидкодії із застосуванням принципу максимуму Понтрягіна?
9. Сформулюйте теорему про літтервалів. Поясніть методику визначення моментів перемикання керуючої дії.
10. Поясніть суть методу динамічного програмування.
11. Як визначити закон оптимального керування за методом динамічного програмування?
12. Що таке аналітичне конструювання регуляторів?
13. Поясніть суть методу аналітичного конструювання регулятора запропорційованого О. М. Понтомін.
14. Як скласти з'єднання Ріккати, якщо відома передаточна функція об'єкта?
15. У чому полягає особливість застосування методу динамічного програмування для синтезу дискретних (цифрових) регуляторів?
16. Визначіть рівняння цифрового регулятора для системи другого порядку, застосувавши метод динамічного програмування.

12.1

Загальні відомості про адаптивні САК

Системи автоматичного керування, розроблені згідно з припущенням, що властивості об'єкта та зовнішні збурення відомі і не змінюються упродовж експлуатації, забезпечують потрібні показники якості лише у разі, якщо відхилення параметрів об'єкта і збурень від розрахованих значень неістотні. Проте у багатьох випадках параметри об'єкта та зовнішні збурення змінюються у досить значних межах, крім того, інформація про властивості об'єкта та зовнішні збурення взагалі може бути неповною. Тому САК, які розробляються за заданими характеристиками об'єкта і збурень, а також мають незмінну структуру й параметри, у більшості випадків не забезпечують оптимальних режимів функціонування. Ще більші складності виникають під час проєктування систем, що працюють за неповної інформації про властивості об'єкта та зовнішні збурення.

Вихід із цих ускладнень полягає в розробці регуляторів, властивості яких змінюються так, щоб при змінюванні параметрів об'єкта та зовнішніх дій якість системи зберігалася, тобто властивості регуляторів мають пристосовуватися (адаптуватися) до цих змін. Системи з такими регуляторичні називаються *адаптивними (самонастроювальними)*. Отже, адаптивна САК — це система, яка здатна в процесі виконання основного завдання керування за рахунок змінювання параметрів і структури регулятора подовжувати пестачу інформації про об'єкт керування і, дивлячись на його зовнішні збурення, поліпшувати якість своїх функціонування.

Розглянемо одновимірний об'єкт, що описується рівнянням у векторно-матричній формі

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + \psi(t)f, \quad (12.1)$$

де u — керуюча дія; f — збурення; $A(t)$ — матриця системи розмірності $n \times n$, $B(t)$, $\psi(t)$ — матриці-стовпці $1 \times n$, причому всі або окремі компоненти матриць задані неточно або змінюються з часом, тобто є так званими невизначеними параметрами. Причини невизначеності параметрів може бути різною: наближені відомості про математичну модель об'єкта, розкид параметрів у межах технічних допусків, змінювання параметрів унаслідок «старіння» тощо.

Звичайно параметри об'єкта змінюються повільніше, ніж змінює стану, тому інтервал роботи об'єкта $[t_0, t_1]$ можна розділити на підінтервали, протягом яких параметри об'єкта можна вважати незмінними. Тоді, позначивши невизначений параметр $a_i(t)$ для підінтервалу, вістанемо

$$a_i(t) = \text{const} = a_i(RT): RT \leq t \leq (R+1)T, R = 1, 2, \dots, N, \quad (12.2)$$

де $T = (t_1 - t_0)/N$ — інтервал квазістаціонарності параметрів.

Гіпотеза квазістаціонарності передбачає, що час затухання перехідних процесів по кожній із змінних стану $t_{\text{пер}}$ явно менший, ніж інтервал квазістаціонарності. Згідно з цією гіпотезою процеси в об'єкті керування поділяються на «швидкі» (змінювання змінних стану) і «повільні» (змінювання параметрів).

Для синтезу квазістаціонарних систем можна користуватися будь-якою з відомих процедур, у тому числі процедурою синтезу оптимальних регуляторів. Але, виходячи з того, що параметри об'єкта несприятливо змінюються і вважаються сталими тільки протягом інтервалу квазістаціонарності, для синтезу необхідно розв'язувати автоматично безпосередньо в процесі роботи об'єкта, не відстаючи від темпу змінювання параметрів об'єкта. Отже, алгоритм регулятора повинен змінюватися під час роботи системи, пристосовуючись (адаптуючись, самонастроюючись) протягом часу T до параметрів об'єкта, що змінюються, так, щоб якість роботи системи залишалася незмінною.

За такого підходу до побудови адаптивної системи передусім необхідно розв'язати задачу ідентифікації (визначення) параметрів об'єкта керування.

Системи з ідентифікаційним алгоритмом називаються *параметрично адаптивними*.

Недоліком алгоритму ідентифікації є те, що він недостатньо пов'язаний з метою керування, хоча й призначений для її досягнення.

Безпосередньо з мети керування випливає, що раціональнішим є пошук законів змінювання параметрів регулятора. При цьому параметри регулятора повинні змінюватися залежно від значення критерію якості роботи системи. Такі алгоритми називаються *прямими алгоритмами адаптивного керування*. Системи, в яких використовуються ці алгоритми, називаються *функціонально адаптивними системами керування*.

Пристрій, що реалізує алгоритм адаптації, називається *адаптером*.

Особливістю структури адаптивних систем полягає в тому, що, порівняно зі звичайними неадаптивними системами, вони мають додатковий контур — *контур адаптації* (самонастроювання), призначений для переробки інформації про умови роботи, що змінюються, і наступної дії на регулятор основного контуру керування.

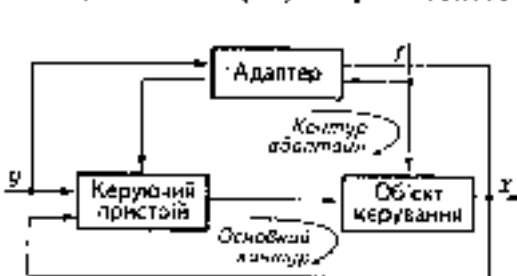


Рис. 12.1

Функціональну схему адаптивної системи наведено на рис. 12.1. Контур, що складається з керуючого пристрою і об'єкта керування, є основним контуром системи і становить звичайну неадаптивну САК. Адаптер у загальному випадку одержує інформацію про вхідну дію u , збурення f , вихідну величину x і діє на керуючий пристрій основного контуру.

Отже, адаптивна САК, крім основного контуру, має контур адаптації. Для цього контуру об'єктом керування є вся основна САК.

Адаптивні системи звичайно поділяють на два класи: параметричні і непараметричні.

У *параметричних системах* структура керуючого пристрою залишається незмінною, а адаптація здійснюється за рахунок змінювання (відстроювання) значень параметрів для наближення їх до оптимальної настрійки. Такі системи називаються також *самонастроювальними*.

У *непараметричних системах* адаптація здійснюється за рахунок змінювання структури (алгоритму функціонування) керуючого пристрою. Такі системи називаються також *самоорганізуючими*.

12.2

Системи екстремального керування

Історично першими адаптивними системами були системи екстремального керування.

Системою екстремального керування називається система, в якій автоматично піднімається та підтримується режим роботи, що характеризується максимально (мінімально) можливим значенням показника якості. Цей показник називається також *показником екстремуму* або *цільовою функцією*. В загальному випадку в процесі екстремального керування визначається екстремум статичної характеристики нелінійного нестационарного інерційного об'єкта, на який діють збурення, що змінюють положення екстремуму в просторі керуючих дій.

Якщо статична характеристика об'єкта має екстремум

$$I = f(u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (12.3)$$

де I — показник екстремуму; u_i — керуючі параметри, то система екстремального керування має виводити й утримувати робочу точку в глобальному екстремумі.

Об'єкти екстремального керування можна класифікувати за такими ознаками:

- кількість керуючих (оптимізуючих) параметрів;
- наявність екстремумів характеристики об'єкта;
- обсяг апріорної інформації про об'єкт;
- інерційність об'єкта.

Якщо в об'єкті всього один керуючий параметр ($n = 1$), то об'єкт називається *однопараметричним*, якщо $n > 1$, — то *багатораметричним*.

У найпростішому випадку об'єкт екстремального керування є однопараметричним, одноекстремальним, а його статична характеристика (12.3) — безперервною і безперервно диференційованою функцією.

Інерційності об'єкта часто не враховують, оскільки головним у системах екстремального керування є відслідковування дрейфу екстремуму статичної характеристики об'єкта. Тому екстремальні системи часто називають *статичними самонастроюваними*.

Розглянемо однопараметричний об'єкт, характеристика якого $I = f(u)$ має екстремум, причому координати екстремуму змінюються

(дрейфують) у часі. Якщо значення керуваного параметра $u = u^*$, при якому досягається екстремум, є фіксованим, тобто відбувається лише вертикальний дрейф статичної характеристики (рис. 12.2, а), або змінюється за наперед відомим законом, то можна застосувати систему стабілізації або систему програмного керування. Якщо крім вертикального дрейфу відбувається й горизонтальний (рис. 12.2, б), причому закон цього дрейфу заздалегідь не відомий, то системи стабілізації або програмного керування не можуть забезпечити автоматичне утримання екстремуму. В цьому разі слід застосовувати систему екстремального керування, що забезпечує такі змінювання керуючих параметрів, за яких відбувається рух системи до екстремуму й утримання її в точці екстремуму.

Прикладом однопараметричного об'єкта системи екстремального керування може бути колипальний LC-контур. Задання системи полягає в автоматичному настроюванні цього контуру в резонанс із частотою f напруги, прикладеної до контуру. Контур настраюється за рахунок змінювання ємності конденсатора C . Ознакою такого настроювання є максимум напруги U на резонансному контурі (рис. 12.3).

Іншим прикладом екстремального об'єкта може бути котел теплових електричних станцій. У теплу котла подається повітря, кількість якого дещо перевищує теоретично необхідну для повного згоряння палива. Відношення цих кількостей називається коефіцієнтом надлишку повітря α . Правильність вибору цього коефіцієнта визна-

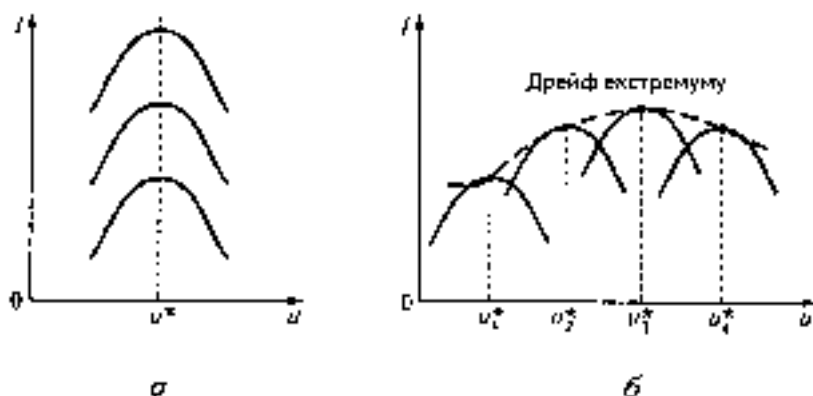


Рис. 12.2

час експлуатації використанні палива. Основним збуренням для котла є змінювання споживання пари. Залежності ККД котла η від коефіцієнта нагріву повітря α мають екстремуми для різних витрат пари D (рис. 12.3). Завданням системи екстремального керування є змінювання подачі повітря у топку таким чином, щоб ККД котла мав максимальне можливе за даних умов значення.

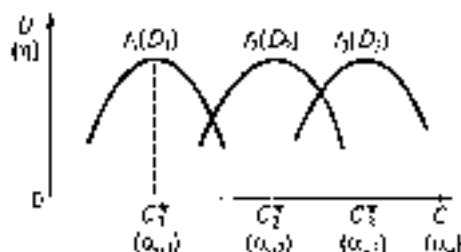


Рис. 12.3

Розглянемо методи (принципи) пошуку екстремуму в одно- і багатопараметричних екстремальних системах.

Метод вимірювання похідної. Цей метод ґрунтується на тому, що похідна df/da змінює свій знак під час проходження через екстремум. Напрямок руху до екстремуму визначається знаком похідної, а ознакою наявності екстремуму є те, що похідна дорівнює нулю.

Для визначення похідної df/da можна вимірювати похідні df/dt і da/dt , а потім ділити першу похідну на другу, тобто

$$df/da = \frac{df/dt}{da/dt}. \quad (12.4)$$

Функціональну схему системи, в якій реалізується цей метод пошуків екстремуму, наведено на рис. 12.4, а. Вона складається з двох диференціаторів ДФ, блока ділення БД, що визначає похідну df/da , і релейного елемента РЕ, що дає знак похідної. Залежно від знака похідної виконавчий механізм ВМ забезпечує рух об'єкта керування ОК у бік екстремуму. Під час проходження через екстремум знак похідної змінюється, релейний елемент перемикається і виконавчий механізм реверсується, що забезпечує повернення системи до точки екстремуму.

Часові діаграми, що відповідають цьому методу пошуків екстремуму, подано на рис. 12.4, б. Визначимо, що початковий стан об'єкта характеризується точкою M_1 , що міститься ліворуч від екстремуму. В цьому разі $df/da > 0$, на вхід виконавчого механізму подається сигнал $+a_0$, і сигнал a змінюватиметься зі сталою швидкістю. По-

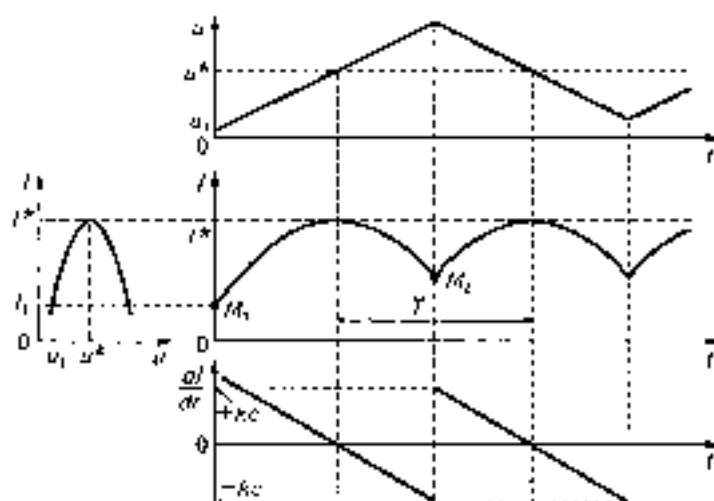
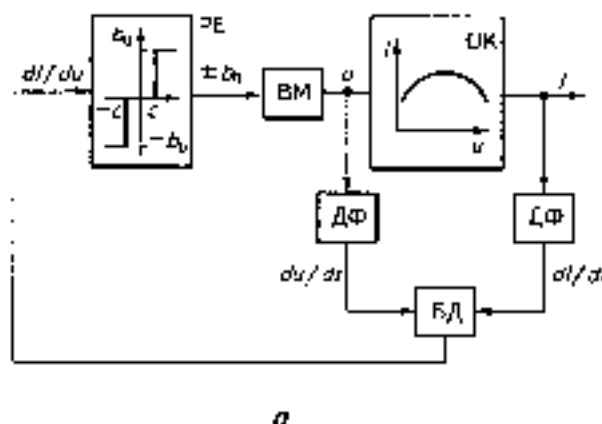


Рис. 12.4

коefficient якості I спочатку збільшуватиметься, а після точки екстремуму — зменшуватиметься. Похідна dI/dv перед точкою екстремуму додатна, в точці екстремуму дорівнює нулю, а після точки екстремуму-

му клас під'єднують. Внаслідок наявності зони нечутливості в релевному елементі похідна df/dt залишається від'ємною до точки M_1 . При $df/dt = -k\varepsilon$, де $1/k = du/d\varepsilon$, релейний елемент перемикається і змінює знак сигналу на вихід виконавчого механізму. Після цього імпульс ε зменшуватиметься зі сталою швидкістю, а показник якості J знову збільшуватиметься, доки не переїде точку екстремуму, і т. д. У системі встановлюються автоколивання з періодом повторення T . Рух системи поблизу точки екстремуму називається *риканням*.

Метод запам'ятовування екстремуму Цей метод полягає у використанні різниці між поточним і екстремальним значеннями показника якості для знаходження моменту реверсу системи. Екстремальне значення показника якості визначається запам'ятовуючим пристроєм, який улаштовано так, що на його вхід надходять тільки додатні (при пошуках максимуму) або тільки від'ємні (при пошуках мінімуму) прирости показника якості.

Функціональну схему системи, в якій реалізується метод запам'ятовування екстремуму (максимуму), зображено на рис. 12.5. Вихідна величина J об'єкта керування ОК подається на вхід запам'ятовуючого пристрою ЗП, який фіксує лише додатні прирости J . Для формування керуючої дії використовується різниця $J - J_{\text{екс}}$, що визначається елементом порівняння ЕП. Статичну характеристику об'єкта й часові діаграми, що відповідають пошукам максимуму, подано на рис. 12.6.

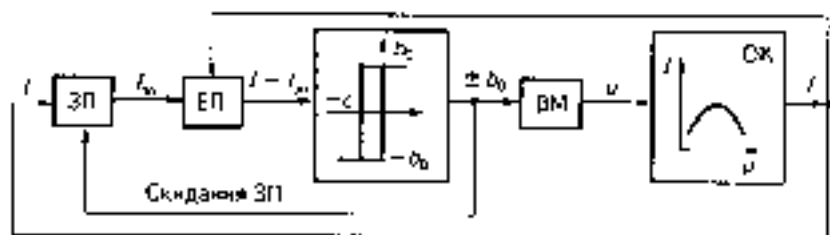


Рис. 12.5

Припустимо, що в момент часу t_1 стан об'єкта характеризується параметрами J_1, θ_1 (рис. 12.6, а), які відповідають точці M_1 (рис. 12.6, б), і екстремальний регулятор улаштовано так, що значення керуючої дії збільшується, тобто система віддаляється від точки екстремуму

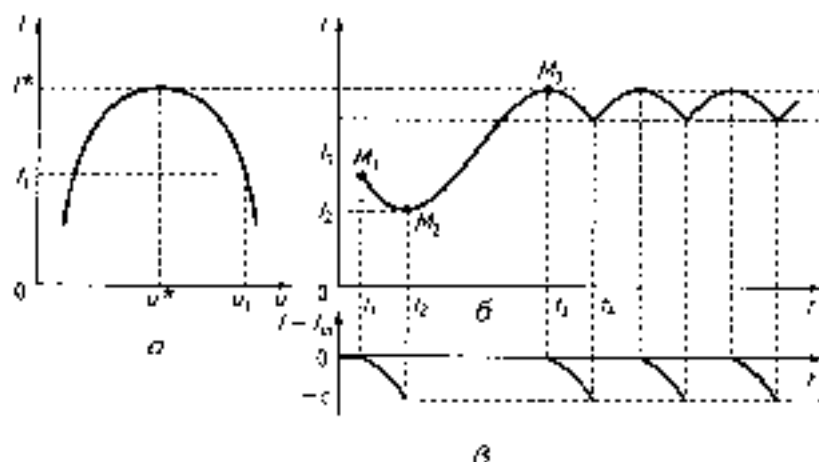


Рис. 12.6

Оскільки значення I зменшується, сигнал на виході задан'ягодувачого пристрою не змінюється, тому абсолютна величина різниці сигналів $I - I_m$ на вході релейного елемента РЕ збільшується (рис. 12.6. а). У момент часу t_2 ця різниця набуває значення $|\varepsilon|$, релейний елемент перемикається, виконавчий механізм ВМ реверсується, керуюча дія u починає зменшуватися, тобто після точки M_2 (рис. 12.6. б) система починає рух у бік максимуму. При цьому значення I , що було запам'ятоване в ЗП в момент t_1 , скидається і ЗП запам'ятовує значення I_2 .

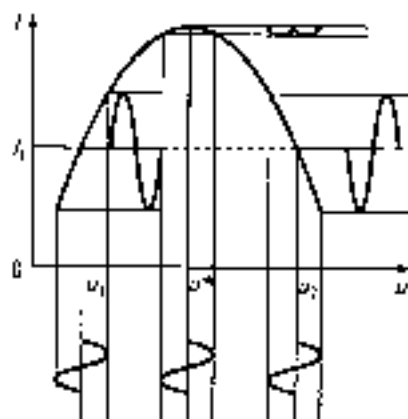
Під час руху системи в бік максимуму ЗП запам'ятовує значення I , тому $I = I_m = 0$. Після досягнення максимуму (точка M_3) керуюча дія u продовжує зменшуватися, внаслідок чого I також зменшується, а I_m не змінюється. Тому абсолютна величина різниці $I - I_m$ збільшується, і в момент t_4 релейний елемент спрацює, виконавчий механізм реверсується і знову починається рух системи в бік максимуму. Цей процес триває безперервно, і в системі підтримується автоколивання поблизу екстремуму регульованої величини. Амплітуда автоколивань визначається допом'янутою нечутливістю релейного елемента.

Метод періодичного пошукового сигналу. Для визначення положення використовуються викручені гармонічні коливання, що надходять на об'єкт керування від спеціального генератора. На підставі аналізу реакції об'єкта на ці коливання визначаються абсо-

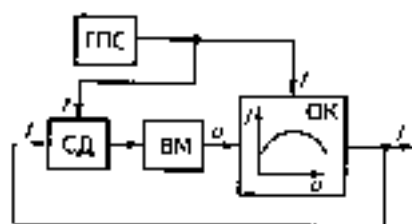
лютна величини і знак похідної df/du . Нехай, наприклад, стан об'єкта з екстремальною характеристикою визначається параметрами I_1, u_1 (рис. 12.7, а). Змінюватимемо u поблизу u_1 за синусоїдальним законом. Якщо амплітуда коливань мала, то вихідна величина об'єкта також змінюватиметься за синусоїдальним законом, при цьому фази вхідних і вихідних коливань збігаються для всіх значень $u < u_1$. Якщо ж стан об'єкта визначається параметрами I_1, u_2 , то на виході об'єкта встановлюються коливання, зсунуті на 180° відносно вхідних. Отже, за зсувом фаз можна визначити напрямок руху системи до екстремуму.

Функціональну схему системи, в якій реалізується описаний метод пошуку екстремуму, зображено на рис. 12.7, б. Вона складається з об'єкта керування ОК, вихідного механізму ВМ, синхронного детектора (фазового дискримінатора) СД і генератора пошукових сигналів ГПС. Синхронний детектор містить пристрій, що перемножує, та фільтр. Після перемноження сигналів I і f та виділення постійної складової утворюється сигнал, абсолютна величина якого пропорційна похідній df/du , а знак вказує напрямок необхідної зміни керуючої дії.

Пошуковий сигнал f модулюючий відносно основного сигналу u , тому системи такого типу називаються *екстремальними системами з модулюючою дією*.



а



б

Рис. 12.7

В автокорівальних нелінійних системах можна замість звичайного пошукувати сигнал використовувати автокорівання.

Розглянуті методи пошуків екстремуму стосуються однопараметрових об'єктів. Якщо показник екстремуму є функцією кількох керуючих параметрів $J(u, u_1, \dots, u_n)$, то необхідною умовою досягнення екстремуму є рівність нулю частинних похідних показника якості за умов керуючих параметрів:

$$\partial J / \partial u_1 = 0; \partial J / \partial u_2 = 0; \dots \partial J / \partial u_n = 0. \quad (12.5)$$

Методи пошуку екстремуму поділяються на два види: детерміновані та випадкові.

Детерміновані методи пошуків екстремуму. До цих методів належать методи градієнта, найбільш швидкого спуску, Гаусса-Зейделя.

Метод градієнта. Градієнтом скалярної функції $J(u, u_1, \dots, u_n)$ називається вектор з координатами $\partial J / \partial u, \partial J / \partial u_1, \dots, \partial J / \partial u_n$, тобто

$$\text{grad } J = k_1 \partial J / \partial u_1 + k_2 \partial J / \partial u_2 + \dots + k_n \partial J / \partial u_n, \quad (12.6)$$

де $k_1, k_2, \dots, k_n$ — одиничні вектори, напрямки яких збігаються з напрямками осей $u, u_1, \dots, u_n$.

Цей вектор спрямований у бік найбільшого зростання функції J . В точці екстремуму

$$\text{grad } J = 0.$$

Метод градієнта реалізується на об'єкті дискретної або безперервної дії контуру адаптації. В першому випадку визначаються всі компоненти градієнта $\partial J / \partial u_i$ для проріг параметризм Δu_i на кожному кроці вибирається пропорційним дим компонентам.

Аналітично метод градієнта в цьому випадку можна подати у вигляді

$$\begin{cases} u_i^{k+1} = u_i^k + c \left(\frac{\partial J}{\partial u_i} \right)_k, \\ \Delta u_i = c \frac{\partial J}{\partial u_i}, \\ \Delta \theta = c \text{grad } J. \end{cases} \quad (12.7)$$

де k — номер кроку; c — деякий сталий або змінний параметр, що визначає величину кроку.

При безперерпній дії контуру адаптивний метод градієнта полягає в тому, що швидкості змінювання параметрів u_i приймаються пропорційними відповідним компонентам миттєвого злітання градієнта, тобто

$$du_i/dt = c \partial f / \partial u_i. \quad (12.8)$$

Залежності (12.7) і (12.8) використовуються для формування робочих сигналів екстремальної системи, що забезпечують рух до екстремуму вихідної величини f .

Розглянемо, наприклад, систему екстремального керування, структурну схему якої наведено на рис. 12.8. Показник екстремуму є функцією двох керуючих параметрів u_1 і u_2 .

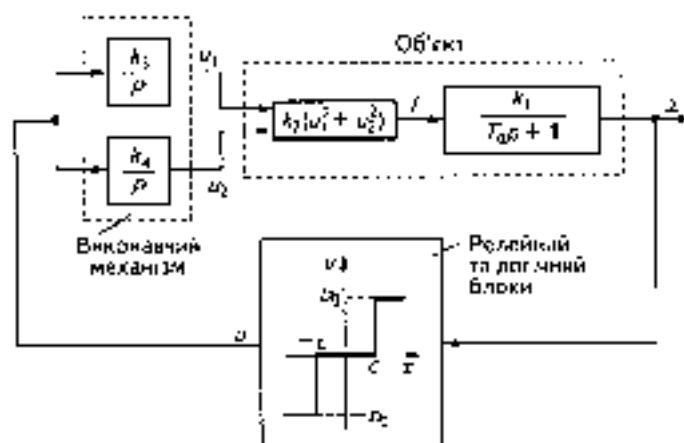


Рис. 12.8

Рівняння об'єкта з виконавчого механізму

$$T_c dx/dt + x = k_1 f; \quad (12.9)$$

$$f = k_2 (u_1^2 + u_2^2); \quad (12.10)$$

$$du_1/dt = k_3 u; \quad (12.11)$$

$$du_2/dt = k_4 u. \quad (12.12)$$

а проекції градієнта функції I на напрямки осей u_1, u_2

$$\partial I / \partial u_1 = 2k_1 u_1;$$

$$\partial I / \partial u_2 = 2k_2 u_2.$$

Використовуючи вираз (12.8) з урахуванням (12.11) і (12.12), дістанемо

$$du_1/dt = -2k_1 k_2 u_1; \quad (12.13)$$

$$du_2/dt = -2k_2 k_1 u_2. \quad (12.14)$$

У цих виразах знак мінус береться тому, що рух відбувається в бік зменшення градієнта.

Для визначення процесу наближення координати x до екстремуму спочатку знайдемо закони змінювання керуючих параметрів u_1 і u_2 . Для цього розв'яжемо рівняння (12.13) і (12.14) за початкових умов $t = 0, u_1 = u_{10}, u_2 = u_{20}$.

$$u_1 = u_{10} e^{-2k_1 k_2 t};$$

$$u_2 = u_{20} e^{-2k_2 k_1 t}.$$

Підставивши ці вирази в рівняння об'єкта (12.9) і (12.10), дістанемо диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} T_n dx/dt + x = \\ = k_1 k_2 (u_{10}^2 e^{-4k_1 k_2 t} + u_{20}^2 e^{-4k_2 k_1 t}), \end{aligned} \quad (12.15)$$

розв'язком якого за початкових умов $t = 0, x = x_0 = k_1 k_2 (u_{10}^2 + u_{20}^2)$ є шуканий закон змінювання координати x у процесі наближення системи до екстремуму.

Перевагою методу градієнта є відносно швидкий перехід системи в зону екстремуму та мала амплітуда коливань, подоліком необхідності безперервного визначення компонентів градієнта.

Метод найшвидшого спуску. За цим методом напрямок градієнта визначається в початковій точці, а потім відбувається рух у цьому напрямку доти, доки похил вздовж цього напрямку dI/dt не дорівнюватиме нулю. Потім знов визначається напрямок градієнта і відбувається рух за новим напрямком до наступного нульового значення похилу і т. д.

Метод найшвидшого спуску характеризується відносно малим часом досягнення екстремуму при великих кроках на початковому етапі пошуків.

□ Приклад 12.1. Задано показник екстремуму

$$I = u_1^2 + u_2^2 - u_1 u_2. \quad (12.16)$$

Визначити мінімум функції $I(u_1, u_2)$ методом найшвидшого спуску з початкової точки $u_{01} = 4, u_{02} = 6$.

Розв'язання. Функції $I(u_1, u_2)$ відповідає сім'я еліпсів (рис. 12.9) для різних $I = \text{const}$. Початковий етап визначається точкою M .

Згідно напрямку градієнта в початковій точці. Частинні похідні для цієї точки мають вигляд

$$\begin{cases} \partial I / \partial u_1 = 2u_1 - u_2 = 14, \\ \partial I / \partial u_2 = 2u_2 - u_1 = 16 \end{cases} \quad (12.17)$$

Оскільки відбувається мінімум функції I , то рухатимемося у напрямку, зворотному до градієнта, і визначимо координати u_{11}, u_{21} наступної точки:

$$\begin{cases} u_{11} = u_{01} - I(\partial I / \partial u_1) = 4 - 14, \\ u_{21} = u_{02} - I(\partial I / \partial u_2) = 6 - 16. \end{cases} \quad (12.18)$$

Тут I — поки що невідомий крок переходу з точки (u_{01}, u_{02}) в точку (u_{11}, u_{21}) .

Для визначення кроку I підставимо відповідні значення u_1 і u_2 у вираз (12.16). Тоді дістанемо

$$\begin{aligned} I &= (4 - 14)^2 + (6 - 16)^2 + \\ &+ (4 - 14)(6 - 16) = \\ &= 676 - 452 + 76 \end{aligned}$$

і прирівняємо до нуля похідну dI/dI . Тоді дістанемо

$$dI/dI = 1352I - 452 = 0,$$

звідки $I = 0,33$.

Підставивши знайдене значення I у вираз (12.18), знайдемо координати u_{11} і u_{21} : $u_{11} = -0,68, u_{21} = 0,65$ (точка M_1 на рис. 12.9).

Векторизація аналогічна обчисленням для наступного кроку за умови, що визначимо етап

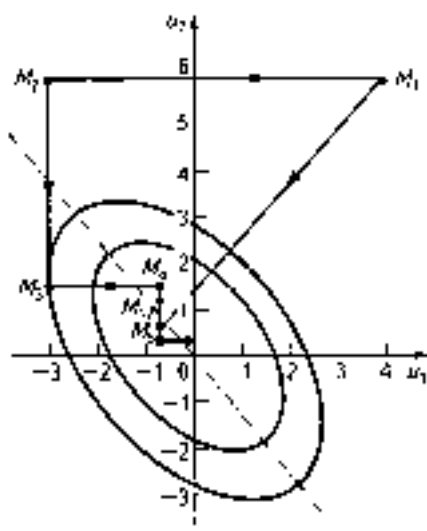


Рис. 12.9

ном системі є стабільний, який вже прийшла в кінці першого кроку. Дістанемо $u_{12} = 0.0229$; $u_2 = 0.0362$.

Отже, практично за два кроки система спливає в точку, досить близьку до точки мінімуму.

Метод Гаусса-Зейделя. За цим методом рух уздовж кожної координати відбувається по чергою. Спочатку здійснюється рух уздовж координати u_1 , а решта координат $u_2, u_3, \dots$ залишаються незмінними. Цей рух триває доти, доки похідна функції I по координаті u_1 не дорівнюватиме нулю, тобто $\partial I / \partial u_1 = 0$. З останньої умови визначається u_1 . Після цього значення u_1 тримається координат, крім u_2 , залишаються незмінними, а координата u_2 змінюється доти, доки не буде виконана умова $\partial I / \partial u_2 = 0$. З цієї умови визначається u_2 . Цією u_1 і решта координат, крім u_3 , залишаються незмінними, а змінюється координата u_3 і т. д. У такий спосіб визначаються частинні екстремуми по всіх координатах. Після цього виконується повторний цикл зміни координат по чергою, починаючи з u_1 . Процес пошуку триває доти, доки всі частинні похідні не дорівнюватимуть нулю (практично доти, доки всі похідні не будуть меншими за поріг чутливості системи).

□ Приклад 12.2. Пошук екстремуму

$$I = u_1^2 + u_2^2 - 6u_2$$

є функцією координат u_1 і u_2 . Однотипний процес пошуку екстремуму методом Гаусса—Зейделя, якщо початковому стану об'єкта відповідають значення $u_1 = 4$, $u_2 = 6$.

Розв'язання. Початковий стан об'єкта визначається точкою M_1 , зображеною на рис. 12.9. Починаємо пошуки, змінюючи координату u_1 при $u_2 = 6$. Тоді

$$I(u_1, 6) = u_1^2 + 36 - 6u_1.$$

Визначимо частинну екстремальну функції $I(u_1, 6)$ за u_1 та прирівняємо її до нуля:

$$\partial I(u_1, 6) / \partial u_1 = 2u_1 + 6 = 0,$$

звідси для першого частинного екстремуму $u_1 = -3$. Йому відповідає точка M_2 з координатами $u_1 = -3$, $u_2 = 6$ (рис. 12.9).

Вважаючи газметр $u_1 = -3$ постійним, змінюватимемо координату u_2 . Функція $I(-3, u_2)$ запишеться у вигляді

$$I(-3, u_2) = 9 + u_2^2 - 6u_2,$$

а її частинна похідна по u_2

$$\partial F(-1, u_2)/\partial u_2 = 2u_2 - 3 = 0.$$

відки $u_2 = 1,5$.

Цьому значенню координати u_2 відповідає точка M_2 , зображена на рис. 12.9.

Повторімо обчислення для координати u_1 , приймавши $u_2 = 1,5$:

$$F(u_1; 1,5) = u_1 + 2,25 + 1,5u_1;$$

$$\partial F(u_1; 1,5)/\partial u_1 = 2u_1 + 1,5;$$

$$u_1 = -0,75,$$

і дістанемо точку M_3 , зображену на рис. 12.9.

Наступний цикл:

$$F(-0,75, u_2) = 0,5625 + u_2^2 - 0,75u_2;$$

$$\partial F(-0,75, u_2)/\partial u_2 = 2u_2 - 0,75 = 0;$$

$$u_2 = 0,375.$$

Цьому циклу відповідає точка M_4 .

Отже, пошукові рухи становлять ланану цілих, що складається з взаємно перпендикулярних відрізків. Точки цього є точками дотyku цих відрізків до кривих $F(u_1, u_2) = \text{const}$.

Метод почергового змінювання параметрів зручний тим, що для його реалізації можна застосовувати відомі типи однопараметричних екстремальних систем, якщо додати пристрій, що перемикає канали параметрів $u_1, u_2, \dots, u_n$. Проте, як видно з рис. 12.9, система рухається до екстремуму аж ніяк не найкоротшим шляхом.

Методи випадкових пошуків екстремуму. До цих методів належать методи випадкових сліпих пошуків, статистичного градієнта та статистичного найшвидшого спуску.

Метод випадкових сліпих пошуків. Суть методу полягає в пошуках екстремуму за рахунок випадкового змінювання параметрів u_i . У початковому стані системі дається випадковий приріст координат u_i і визначається приріст функції F . Якщо приріст від'ємний (при пошуках максимуму), то система повертається у вихідний стан і робиться наступний пробний крок. Так повторюється доти, доки не відстанемо додатний приріст. Тоді система переводиться в цей новий стан, з якого виконуються нові випадкові кроки.

Метод статистичного градієнта. Цей метод полягає в тому, що з вихідного стану системи робиться кілька пробних вибірок

вих кроків і для кожного з них визначається приріст функції I . За цими приростами, як зі складовими вектора, визначається напрям найшвидшого змінювання функції I . В цьому напрямі виконується робочий крок, а потім цикл пошуків повторюється.

Метод статистичного найшвидшого спуску. Початок пошуків такий самий, як і в разі застосування попереднього методу, але після визначення напрямку робиться не один крок, а рух відбувається доти, доки не зміниться знак приросту I .

Під час випадкових пошуків немає потреби визначати залежності I від кожної координати x_i окремо. Це особливо важливо при великій кількості координат, оскільки при збільшенні їх кількості, на швидкому від розглянутих детермінованих методів пошуків, процедура пошуків не ускладнюється. Доведено, що при $n > 3$ випадкові пошуки перевершують детерміновані за швидкістю досягнення екстремуму.

Істотною перевагою методу випадкових пошуків є можливість відшукати глобальний екстремум (мінімум мінімуму або максимум максимуму при пошуках відповідно мінімуму або максимуму) за наявності кількох екстремумів, а також наявності особливих точок, для яких $I = 0$. Детерміновані методи, що базуються на пошуках точки з нульовим градієнтом, у цих випадках непридатні, тому що система може припинити пошуки на будь-якому локальному екстремумі або в особливій точці.

У деяких випадках найефективніше об'єднувати різні методи пошуків. Зокрема, на початку пошуків далеко від точки екстремуму можна застосувати метод найшвидшого спуску, а поблизу екстремуму перейти до градієнтного методу. За наявності кількох екстремумів методом градієнта визначається і запам'ятовується локальний екстремум. Потім здійснюється крок у випадковому напрямку, методом градієнта відшукується новий локальний екстремум і порівнюється з раніше знайденим. Коли знайдені всі локальні екстремуми, знаходять глобальний. Кількість циклів пошуків вибирається заздалегідь, виходячи з даних про кількість екстремумів та їхнє загальне розміщення.

12.3

Динаміка екстремальних систем

До екстремальних систем ставляться вимоги швидкості (збіжності процесу пошуків у зоні екстремуму), точності (забезпечення заданого відхилення показника якості від екстремального значення в установлених режимі) і швидкості (мінімального часу пошуків екстремуму). Крім того, динаміка екстремальних систем характеризується ще й такими специфічними показниками: витрати на ризикання, період ризикання, зона пошуків на вході й виході об'єкта, час виходу в точку екстремуму.

Визначимо ці показники для екстремальної системи, що має за принципом вимірювання похідної df/du (див. рис. 12.4, а). Вважатимемо, що всі елементи системи безперервні. Релейний елемент розглядатимемо як ідеальне трипозиційне реле із зоною нечутливості 2ϵ .

Якщо прийняти, що статична характеристика об'єкта $f = f(u)$ має вигляд параболі, і умовно перенести початок координат у точку екстремуму (див. рис. 12.4, б), то нелінійна частина об'єкта описуватиметься рівнянням

$$f = -k_1 u^2. \quad (12.19)$$

Припустимо, що вихідний сигнал виконавчого механізму змінюється лінійно при постійному входному сигналі, тобто

$$u = \pm k_2 f, \quad (12.20)$$

де знак «+» відповідає інтервалові часу, коли $df/dt > 0$, а знак «-» — інтервалові часу, коли $df/dt < 0$. У цьому разі

$$f = -k_1 k_2^2 t^2. \quad (12.21)$$

В режимі установлених коливань максимальне відхилення (амплітуда ризикання) показника якості від екстремального значення одержимо з виразу (12.21) при $t = T/2$:

$$\Delta f = -k_1 k_2^2 T^2 / 4. \quad (12.22)$$

Визначимо тепер похідну df/du .

Запишемо похідну показника якості за часом

$$df/du = -2k_1 k_2^2 t$$

і похідну вихідного сигналу виконавчого механізму

$$du/dt = \pm k_2.$$

Тоді

$$df/du = \frac{df/dt}{du/dt} = \pm 2k_1 k_2 t.$$

Перемикання релейного елемента відбувається при $df/du = \pm \epsilon$ і $t = T/2$, якщо вести відлік часу від початку координат, умовно перенесеного в точку екстремуму. Тому

$$2k_1 k_2 T/2 = \epsilon,$$

звідки

$$T = \epsilon/k_1 k_2,$$

тобто період ривкання залежить від зони нечутливості релейного елемента, а також визначається параметрами шукального механізму та екстремальною характеристикою об'єкта.

Середнє за період ривкання значення відхилення показника якості називається *витратою на ривкання* D :

$$D = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} (-k_1 k_2^2 t^2) dt = -\frac{k_1 k_2^2 T^2}{12}. \quad (12.23)$$

З порівняння виразів (12.22) і (12.23) випливає, що амплітуда ривкання в три рази перевищує витрату на ривкання, тобто

$$\Delta f = 3D.$$

Системи з періодичним пошуковим сигналом (див. рис. 12.7) в установлених режимі працюють поблизу екстремуму. Якщо вважати всі ланки схеми на рис. 12.7, б безінерційними, то сигнал на виході ланки з екстремальною характеристикою обчислюється за формулою

$$u = U + a_m \sin \omega_m t, \quad (12.24)$$

де U — основний (керуючий) сигнал, a_m , ω_m — амплітуда і частота пошукового сигналу.

Підставивши значення u у вир. (12.19), дістанемо

$$\begin{aligned} J &= -k_1 \{U + a_m \sin \omega_m t\}^2 = -k_1 U^2 - \\ &- 2k_1 U a_m \sin \omega_m t - k_1 a_m^2 \sin^2 \omega_m t \end{aligned} \quad (12.25)$$

Якщо система перебуває поблизу екстремуму, то $f \approx 0$ і

$$\dot{f} = -k a_n^2 \sin^2 \omega_n t = -k_1 a_n^2 (1 - \cos 2\omega_n t)/2, \quad (12.26)$$

тобто амплітуда ривкання на виході системи, що залежить від додаткового пошукового сигналу, буде такою:

$$\Delta f = -k_1 a_n^2.$$

З виразу (12.26) видно, що коливання показника якості відбуваються з подвійною частотою, при цьому втрачу на ривкання знаходимо за формулою

$$D = \frac{1}{T} \int_0^T f dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(-\frac{k_1 a_n^2}{2} \right) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{k_1 a_n^2}{2} \cos 2\omega_n t dt, \quad (12.27)$$

Другий інтеграл у цьому виразі є визначеним інтегралом косинуса протягом цілого числа періодів і, отже, дорівнює нулю, тому

$$D = -k_1 a_n^2/2. \quad (12.28)$$

Отже, в системах із періодичним пошуковим сигналом втрата на ривкання в два рази менша за амплітуду ривкання:

$$D = \Delta f/2.$$

Для зменшення врат на ривкання слід знижувати амплітуду пошукового сигналу. Можливість зменшення амплітуди визначається рівнем перешкод, тому що пошуковий сигнал має чітко виділятися на їхньому фоні. Якщо проаналізувати спектр перешкод на виході системи, можна визначити ділянку спектра з найменшими амплітудами перешкод. Це дає змогу вибрати частоту і амплітуду пошукового сигналу так, аби забезпечити мінімальну втрату на ривкання при досить швидкій роботі системи.

Розглянуті показники динаміки відповідають ідеальному випадку, коли всі елементи системи вважаються безінерційними, а статична характеристика об'єкта — стаціонарною, тобто такою, що не змінюється протягом часу.

Розглянемо вплив інерційності об'єкта на процес пошуків екстремуму на прикладі системи, функціональну схему якої наведено на рис. 12.4, а. Припустимо, що об'єкт можна подати у вигляді двох ла

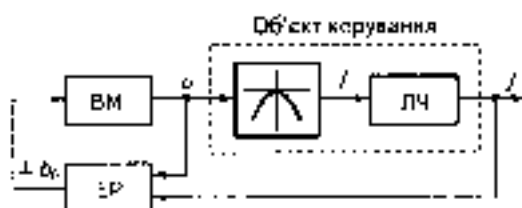


Рис. 12.10

лок — безінерційної не-
лінійної з екстремальною
характеристикою та інер-
ційної лінійної. Функціо-
нальну схему системи в
цьому разі показано на
рис. 12.10, де ЛЧ — лінійна
частина об'єкта, БР — ек-
стремальний регулятор, по-

добний до регулятора в схемі на рис. 12.4, а.

Рівняння окремих ланок системи мають такий вигляд:
для лінійної частини об'єкта

$$T_1 dJ/dt + J = k_1 I, \quad (12.29)$$

де T_1 — стала часу інерційної частини об'єкта;
для нелінійної частини об'єкта

$$I = -k_2 u^2; \quad (12.30)$$

для виконавчого механізму

$$du/dt = k_3 b, \quad (12.31)$$

для екстремального регулятора

$$b = F(J, u) = \begin{cases} +b_0 & \text{при } dJ/du > \varepsilon, \\ -b_0 & \text{при } dJ/du < -\varepsilon, \end{cases} \quad (12.32)$$

де ε — зона нечутливості екстремального регулятора.

Підставивши значення I за формулою (12.30) в рівняння (12.29),
отримаємо

$$T_1 dJ/dt + J = -k_1 k_2 u^2$$

або

$$T_1 \frac{dJ}{du} \frac{du}{dt} + J = -k_1 k_2 u^2. \quad (12.33)$$

Замінивши в цьому рівнянні похідну dJ/dt її значенням за форму-
лою (12.31), одержимо

$$k_3 T_1 b \frac{dJ}{du} + J = -k_1 k_2 u^2$$

Враховуючи, що $b = \pm b_0$, подімо це рівняння у вигляді

$$dJ/du \pm \alpha J = \pm \beta u^2, \quad (12.34)$$

де

$$\alpha = \frac{1}{k_1 T_1 b_0}; \quad \beta = \frac{k_2 k_3}{k_1 T_1 b_0}.$$

Розв'язок рівняння (12.34) $J = f(u)$ становить фазову траєкторію об'єкта у площині координат u, J . Для безінерційного об'єкта $J = k_1 f$, тому фазова траєкторія при $k_1 = 1$ збігається зі статичною характеристикою об'єкта (12.30). Для інерційного об'єкта

$$J = C e^{-\alpha u} - \frac{\beta}{\alpha} u^2 + \frac{2\beta}{\alpha^2} u - \frac{2\beta}{\alpha^3}, \quad (12.35)$$

де стала інтегрування C визначається з початкових умов, при $t = 0$ $J = J_0$ і $u = u_0$,

$$C = \left(J_0 + \frac{\beta}{\alpha} u_0^2 - \frac{2\beta}{\alpha^2} u_0 + \frac{2\beta}{\alpha^3} \right) e^{\alpha u_0}. \quad (12.36)$$

Фазову траєкторію, побудовану за рівнянням (12.35), зображено на рис. 12.11. На початку руху $dJ/du > 0$, змінна u зменшується, похідна dJ/du стає від'ємною і при $dJ/du < 0$ — виконається механізм перемикається (реверсується). Рівняння фазової траєкторії (12.35) залишається незмінним, але через те, що після перемикання $b = -b_0$, коефіцієнти α і β змінюють знак. Крім того, при визначенні сталої інтегрування C за формулою (12.36) приймаються нові початкові умови u_0, J_0 . Фазова траєкторія приєднує до граничного циклу, зображеного на рис. 12.11 безперервною лінією. Цей цикл називається *граничним циклом ривка*. Отже, система наблизь усталеного режиму, коли ривка поблизу екстремуму відбувається за подібній характеристикою, але самого екстремуму система ніколи не досягає.

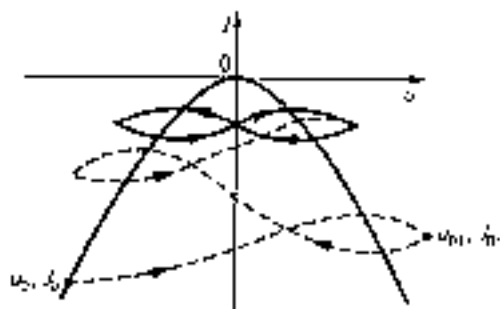


Рис. 12.11

12.4

Ідентифікація об'єктів керування

Розглянемо одновимірний стаціонарний об'єкт з невідомими параметрами, що описується рівнянням

$$a_n \frac{dx^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + x = -b_n \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{du}{dt} + b_m u, \quad (12.37)$$

де $x(t)$ — вихідна координата системи; $u(t)$ — відома (вимірювана) керуюча дія; a_j ($j = 0, 1, \dots, n-1$) і b_j ($j = 0, 1, \dots, m$) — невідомі параметри, причому $n > m$.

Метою ідентифікації є визначення невідомих параметрів a_j й b_j .

Відомих різних методів ідентифікації, зокрема частотний і метод моделі, що настроюється.

За частотного методу дія $u(t)$ становить збудувальну гармонічну дію

$$u(t) = \sum_{\lambda=1}^L B_{\lambda} \sin \omega_{\lambda} t, \quad (12.38)$$

де B_{λ} і ω_{λ} — відома амплітуда і частота гармонічних складових збудувальної дії, необхідні для визначення значень частотних характеристик об'єкта за частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_L$.

Якщо на вхід лінійного об'єкта подається гармонічна дія, виражена формулою (12.38), то вихідний сигнал $x(t)$ також є сумою гармонік:

$$x(t) = \sum_{\lambda=1}^L B_{\lambda} A(\omega_{\lambda}) \sin[\omega_{\lambda} t + \varphi(\omega_{\lambda})], \quad (12.39)$$

де $A(\omega_{\lambda})$, $\varphi(\omega_{\lambda})$ — значення амплітудної й фазової частотних характеристик за частоти ω_{λ} .

Згідно з рівнянням (12.37) передаточна функція об'єкта

$$W_1(p) = \frac{x(t)}{u(t)} = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + 1}.$$

Виконавши підстановку $p = j\omega$, перейдемо до комплексної частотної передаточної функції

$$W_n(j\omega) = \frac{U_x(\omega) + jV_x(\omega)}{U_q(\omega) + jV_q(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (12.40)$$

з якої дістанемо

$$\begin{aligned} U_x(\omega) + jV_x(\omega) &= U(\omega)U_q(\omega) + \\ &+ jU(\omega)V_q(\omega) + jV(\omega)U_q(\omega) - V(\omega)V_q(\omega). \end{aligned}$$

Порівнявши дійсні та уявні частини цього виразу, отримуємо два рівняння

$$\begin{cases} U_x(\omega) = U(\omega)U_q(\omega) - V(\omega)V_q(\omega), \\ V_x(\omega) = U(\omega)V_q(\omega) + V(\omega)U_q(\omega). \end{cases} \quad (12.41)$$

Якщо для k частот від ω_1 до ω_k експериментально визначити значення $U(\omega_k)$ і $V(\omega_k)$, то з рівнянь (12.41) дістанемо $2k$ лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} U_x(\omega_k) = U(\omega_k)U_q(\omega_k) - V(\omega_k)V_q(\omega_k), \\ V_x(\omega_k) = U(\omega_k)V_q(\omega_k) + V(\omega_k)U_q(\omega_k) \end{cases} \quad (12.42)$$

для визначування невідомих параметрів $u, v = 0, 1, \dots, k$ і $b_j, j = 0, 1, \dots, m$

Експериментально $U(\omega_k)$ і $V(\omega_k)$ визначимо так. На вхід об'єкта подаємо пробну дію $u(t) = \sin \omega_k t$. Після закінчення перехідного процесу на виході об'єкта дістаємо установився сигнал $x(t) = A(\omega_k) \times \times \sin[\omega_k t + \varphi(\omega_k)]$. Амплітуда і фазу цього сигналу пов'язані з дійсною та уявною частотними характеристиками об'єкта співвідношеннями

$$U(\omega_k) = A(\omega_k) \cos \varphi(\omega_k);$$

$$V(\omega_k) = A(\omega_k) \sin \varphi(\omega_k).$$

Сигнал з виходу об'єкта подаємо на фільтр Фур'є, який здійснює множення дії на $\sin \omega_1 t$ і $\cos \omega_1 t$ та усереднення за ціле число періодів. Отже, на виході фільтра дістаємо

$$U(\omega_1) = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin \omega_1 t dt;$$

$$V(\omega_k) = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \omega_k t dt$$

Аналогічно визначаємо $U(\omega_k)$ і $V(\omega_k)$ для всіх n частот.

- **Приклад 12.3.** Об'єкт другого порядку описується передаточною функцією

$$W_o(p) = \frac{b_1}{a_0 p^2 + a_1 p + 1},$$

параметри b_1 , a_0 , a_1 якої невідомі. Для частот пробного сигналу $\omega_1 = 1 \text{ c}^{-1}$, $\omega_2 = 10 \text{ c}^{-1}$ експериментально визначено значення дійсної та уявної частинних характеристик

$$U(1) = 21,2; \quad U(10) = -2,12; \quad V(1) = -4,7; \quad V(10) = -0,47$$

За цими даними знайти параметри передаточної функції об'єкта.

Розв'язання. Для заданої передаточної функції об'єкта $U_o(\omega) = b_1$; $V_o(\omega) = 0$; $G_o(\omega) = -a_0 \omega^2 + 1$; $F_o(\omega) = a_1 \omega$, тому система рівнянь (12.42) для частот ω_1 і ω_2 матиме вигляд

$$b_1 = U(\omega_1)(1 - a_0 \omega_1^2) - V(\omega_1)a_1 \omega_1; \quad 0 = U(\omega_1)a_1 \omega_1 + V(\omega_1)(1 - a_0 \omega_1^2),$$

$$b_1 = U(\omega_2)(1 - a_0 \omega_2^2) - V(\omega_2)a_1 \omega_2; \quad 0 = U(\omega_2)a_1 \omega_2 + V(\omega_2)(1 - a_0 \omega_2^2)$$

або після підстановки числових значень

$$b_1 = 21,2(1 - a_0) + 4,7a_1; \quad (12.43)$$

$$0 = 21,2a_1 - 4,7(1 - a_0); \quad (12.44)$$

$$b_1 = -2,12(1 - 100a_0) + 4,7a_1; \quad (12.45)$$

$$0 = -2,12a_1 - 0,47(1 - 100a_0); \quad (12.46)$$

Рівняння (12.44) і (12.46) не залежать від b_1 . Розв'язавши їх, знайдемо $a_0 = 0,1$; $a_1 = 0,2$. Підставивши ці значення в будь-яке рівняння (12.43) або (12.45) визначимо $b_1 = 20$.

Розглянемо тепер суть ідентифікації за допомогою моделі, яка нагромаджується. Нехай передаточна функція об'єкта

$$W_o(p) = \frac{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}{a_1 p^2 + a_2 p^2 + a_3 p + 1},$$

Динаміка об'єкта при вхідній дії $u(t)$ описується рівнянням

$$a_3 p^3 x + a_2 p^2 x + a_1 p x + x = b_0 p^2 u + b_1 p u + b_2 u \quad (12.47)$$

Подано вихідний сигнал об'єкта $x(t)$ на вхід ланки з передаточною функцією $W_1(p) = \beta_1 p^2 + \beta_2 p + 1$, а вхідний сигнал $u(t)$ — на вхід ланки з передаточною функцією $W_2(p) = \beta_3 p^2 + \beta_4 p + \beta_5$.

Пристрій з передаточними функціями $W_1(p)$ і $W_2(p)$ утворюють модель об'єкта, параметри якої β_i можна змінювати (настроювати). Структурну схему з моделлю, що настроюється, зображено на рис. 12.12.

Якби параметри передаточної функції $W_1(p)$ дорівнювали параметрам знаменника передаточної функції $W_2(p)$, тобто $\beta_1 = a_1$, $\beta_2 = a_2$, $\beta_3 = a_3$, а параметри передаточної функції $W_2(p)$ — параметрам чисельника $W_n(p)$, тобто $\beta_4 = b_1$, $\beta_5 = b_2$, то згідно з рівнянням (12.43) різниця вхідних сигналів $\varepsilon(t)$ ланок $W_1(p)$ і $W_2(p)$ дорівнювала б нулю. Якщо коефіцієнти не однакові, то різниця цих сигналів утворює сигнал помилки

$$\varepsilon(t) = \beta_2 dx^2/dt^2 + \beta_1 d^2 x/dt^2 + \beta_2 dx/dt + x - \beta_3 d^2 u/dt^2 - \beta_4 du/dt - \beta_5 u,$$

який залежить від параметрів моделі β_i і невідомих параметрів об'єкта.

Критерій якості ідентифікації визначимо у вигляді функції

$$I = \varepsilon^2(t), \quad (12.48)$$

яка набуває екстремум-мінімум (дорівнює нулю) за рівності параметрів моделі й об'єкта. Використовуючи для пошуків екстремуму функції (12.48) метод градієнта, згідно з виразом (12.8) дістанемо рішення

$$\frac{dI_{\beta_2}}{dt} = \varepsilon \frac{\partial I}{\partial \beta_2} = 2\varepsilon \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_2} = 2\varepsilon \varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2},$$

$$\frac{dI_{\beta_1}}{dt} = \varepsilon \frac{\partial I}{\partial \beta_1} = 2\varepsilon \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_1} = 2\varepsilon \varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{dI_{\beta_4}}{dt} = \varepsilon \frac{\partial I}{\partial \beta_4} = 2\varepsilon \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_4} = 2\varepsilon \varepsilon \frac{du}{dt},$$

$$\frac{dI_{\beta_5}}{dt} = \varepsilon \frac{\partial I}{\partial \beta_5} = 2\varepsilon \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_5} = 2\varepsilon \varepsilon u,$$

де ε — стало від'ємне число, якщо відшукується мінімум

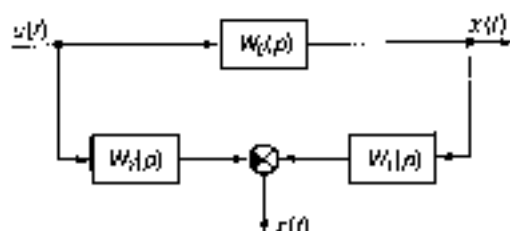


Рис. 12.12

Розв'язком цих рівнянь є шукані змінювання параметрів β_i , що настрійуються.

Цей метод досить простий за своєю суттю, але його технічна реалізація дуже складна, оскільки потрібні обчислювати похідні вхідних і вихідних сигналів об'єкта (передаточні функції $W_1(p)$ та $W_2(p)$ фізично

не реалізовані). Тому доцільнішим є інший підхід до ідентифікації за допомогою моделі, що настрійується. За такого підходу отримання вхідного сигналу моделі не пов'язане з ланками, що фізично не реалізуються.

Запишемо передаточну функцію об'єкта у вигляді

$$W_o(p) = \frac{x(t)}{u(t)} = \frac{b_n \cdot p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^r + a_{n-1} p^{r-1} + \dots + a_1 p + a_0}. \quad (12.49)$$

Поділимо чисельник і знаменник передаточної функції на повном $(n-r)$ -го степеня змінної $(p + \lambda_1)(p + \lambda_2) \dots (p + \lambda_{n-r})$, всі корені якого відомі від'ємні числа $-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_{n-r}$. Розкладемо чисельник і знаменник на суми простих дробів і подімо передаточну функцію об'єкта у вигляді

$$W_o(p) = \frac{x(t)}{u(t)} = \frac{\alpha_n + \frac{\alpha_{n-1}}{p - \lambda_1} + \dots + \frac{\alpha_{1,n-1}}{p - \lambda_{n-r}}}{p - \alpha_n - \frac{\alpha_1}{p + \lambda_1} - \dots - \frac{\alpha_{1,n-1}}{p + \lambda_{n-r}}}, \quad (12.50)$$

звідки безпосередньо знайдемо

$$\begin{aligned} px - \alpha_n x &= \frac{\alpha_1}{p + \lambda_1} x - \dots - \frac{\alpha_{1,n-1}}{p + \lambda_{n-r}} x = \\ &= \alpha_n a + \frac{\alpha_{1,n-1}}{p + \lambda_1} a + \dots + \frac{\alpha_{1,n-1}}{p + \lambda_{n-r}} a. \end{aligned} \quad (12.51)$$

Додамо і віднімемо з лівої частини (12.51) вираз $\lambda_1 x(p)$, де λ_1 — довільне число. Дістанемо

$$\begin{aligned}
 (\rho + \lambda_1)x = & \left(\alpha_n + \lambda_1 + \frac{\alpha}{\rho + \lambda_2} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{\rho + \lambda_n} \right)x + \\
 & + \left(\alpha_n + \frac{\alpha_{n+1}}{\rho + \lambda_2} + \dots + \frac{\alpha_{2n-1}}{\rho + \lambda_n} \right)u.
 \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned}
 x = \frac{1}{\rho + \lambda_1} & \left[(\alpha_n + \lambda_1)x + \frac{\alpha}{\rho + \lambda_2}x + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{\rho + \lambda_n}x + \right. \\
 & \left. + \alpha_n u + \frac{\alpha_{n+1}}{\rho + \lambda_2}u + \dots + \frac{\alpha_{2n-1}}{\rho + \lambda_n}u \right].
 \end{aligned} \quad (12.52)$$

Подібно до (12.52) приймемо рівняння моделі у вигляді

$$\begin{aligned}
 x_n = \frac{1}{\rho + \lambda_1} & \left[(\beta_n + \lambda_1)x + \frac{\beta_1}{\rho + \lambda_2}x + \dots + \frac{\beta_{n-1}}{\rho + \lambda_n}x + \right. \\
 & \left. + \beta_n u + \frac{\beta_{n+1}}{\rho + \lambda_2}u + \dots + \frac{\beta_{2n-1}}{\rho + \lambda_n}u \right].
 \end{aligned} \quad (12.53)$$

Позначимо

$$z_i = \frac{1}{\rho + \lambda_{i+1}}x \quad (12.54)$$

$$v_i = \frac{1}{\rho + \lambda_{i+1}}u, \quad (12.55)$$

вироз (12.53) отримаємо так:

$$\begin{aligned}
 x_n = \frac{1}{\rho + \lambda_1} & \left[(\beta_n + \lambda_1)x + \beta_1 z_1 + \dots + \beta_{n-1} z_{n-1} + \right. \\
 & \left. + \beta_n u + \beta_{n+1} v_1 + \dots + \beta_{2n-1} v_{n-1} \right].
 \end{aligned} \quad (12.56)$$

Віднявши (12.52) від (12.56), виведемо нахилку ідентифікації

$$\begin{aligned}
 e = x_n - x = \frac{1}{\rho + \lambda_1} & \left[(\beta_n - \alpha_n)x + \right. \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i - \alpha_i)z_i + (\beta_n - \alpha_n)u + \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_{n+i} - \alpha_{n+i})v_i \left. \right].
 \end{aligned} \quad (12.57)$$

Прийнявши, як і у попередньому випадку, критерій якості ідентифікації $J = \varepsilon^2(t)$ і використавши метод градієнта, запишемо рівняння, що визначають алгоритм настроювання параметрів моделі,

$$\frac{d\beta_i}{dt} = 2\varepsilon x_i, \quad (12.58)$$

де $i = 0, 1, \dots, n-1$; $\varepsilon_t = x$;

$$\frac{d\beta_{n+i}}{dt} = 2\varepsilon v_i, \quad (12.59)$$

де $i = 0, 1, \dots, n-1$; $v_n = x$.

Структурну схему, що відповідає розглянутому методу ідентифікації, зображено на рис. 12.13. Її побудовано за виразами (12.53), (12.54), (12.55), (12.58), (12.59). Для спрощення подано схему настроювання тільки одного параметра β_1 .

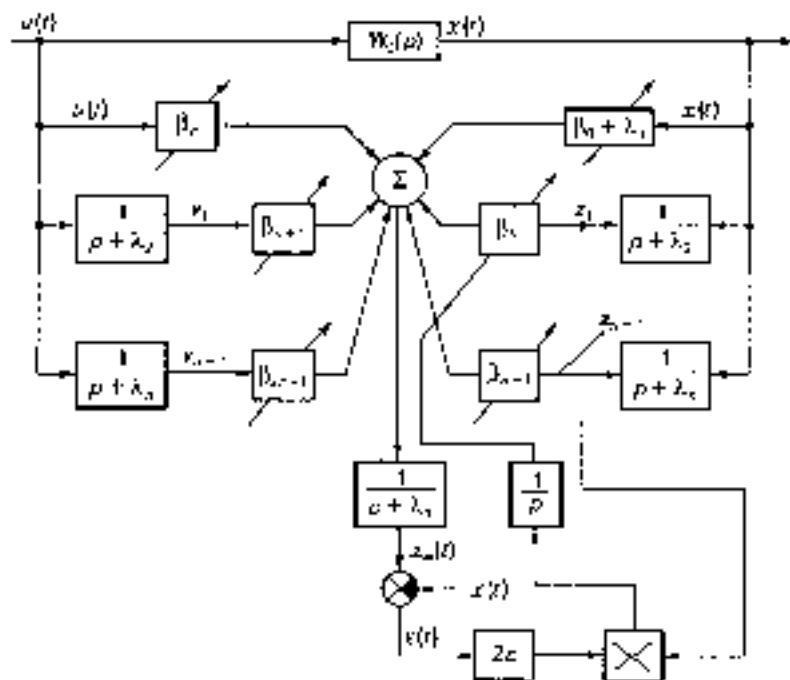


Рис. 12.13

12.5

Принципи побудови безпошукових адаптивних систем

Адаптивні системи, що забезпечують стабілізацію або слідування, у більшості випадків можна будувати як безпошукові. Безпошукові системи можуть мати розімкнутий або замкнутий контурні адаптації.

В системах із розімкнутим контуром адаптації здійснюється за попередньо розробленими програмами на підставі цілісної інформації. Вони також називаються *системами з жорсткою адаптацією або програмними адаптивними системами*.

У безпошукових адаптивних системах із замкнутим контуром адаптації самонастроювання здійснюється за принципом підтримання на оптимальному рівні передаточних функцій, часових або частотних характеристик.

Загальну функціональну схему безпошукової адаптивної системи наведено на рис. 12.14. На вхід системи подається збуджуючий дія d , до об'єкта керування прикладено зовнішню дію (збурення) f і недоступне для вимірювання параметричне збурення g (відхилення параметрів об'єкта від їхніх номінальних значень). Об'єкт керування і регулятор утворюють основний контур системи. На вхід блоку датчиків надходить уся доступна для вимірювання інформація. Ідентифікована модель зображає бажаний вектор x_d змінних стану об'єкта. В аналізаторах I_1 і I_2 обчислюється поточне та задане значення цільової функції I_1 і I_2 . Блок порівняння визначає різницю цих функцій $\Delta I = I_1 - I_2$. В блоці настроювання за величиною ΔI та іншою необхідною інформацією виробляються закони змінювання вектора g , який своєю чергою має змінювати параметри регулятора, щоб звести ΔI до нуля або достатньо малий величини.

У більшості випадків мірою якості I є деякі величини або функції, що характеризують динамічні властивості системи. За виглядом динамічних характеристик, що використовуються при формуванні I , безпошукові адаптивні системи поділяються на три класи:

- з інформацією про частотні характеристики;
- з інформацією про часові характеристики;
- з моделлю.

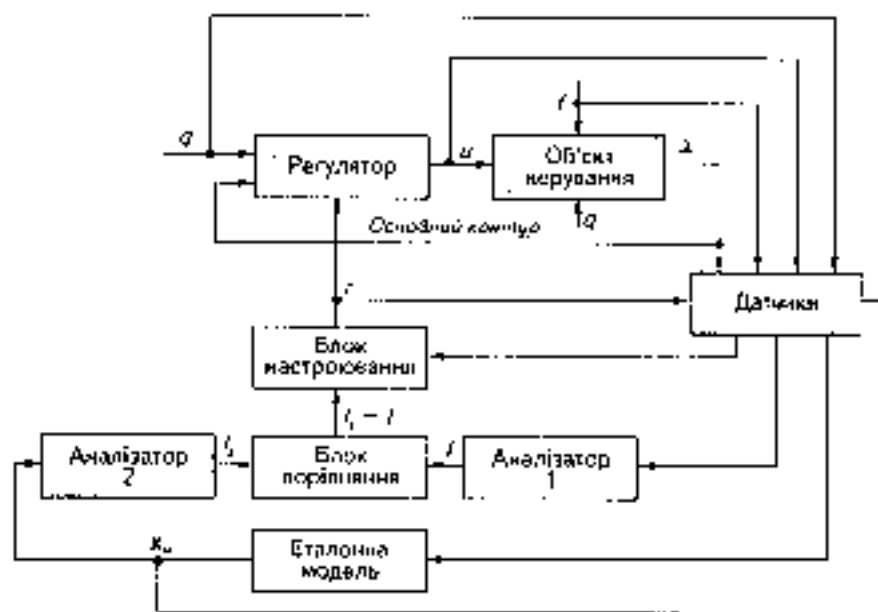


Рис. 12.14

В системах з інформацією про частотні характеристики вимірюється амплітудно-частотна $A(\omega)$ або фазочастотна $\varphi(\omega)$ характеристики системи або одного об'єкта в достатній кількості точок ω_k . Можуть використовуватися також лінійна $U(\omega)$ або уявна $V(\omega)$ частотні характеристики. Застосовуючи інформацію про $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ або $U(\omega)$, $V(\omega)$, настраюють параметри регулятора так, щоб частотні характеристики і, отже, перехідні процеси, відповідали бажаним. Звичайно, необхідно, щоб частотні характеристики основного контуру системи злізалися змінливими при змінюванні параметрів об'єкта.

Необхідність контролювати стосовно до частотні характеристики $A(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ або $U(\omega)$ і $V(\omega)$ виникає лише в немінімально-фазових системах. У мінімально-фазових системах достатньо стабілізувати одну з них.

Одну з можливих функціональних схем системи, де для самонастроювання використовується амплітудно-частотна характеристика $A(\omega)$, наведено на рис. 12.15. Розглянемо стабілізацію однієї точки амплітудно-частотної характеристики. Генератор пробних сигналів виробляє частоту ω_k , що подається на вхід фільтра F . Амплітудно-ча-

12.5. Принципи побудови
безшумових адаптивних систем

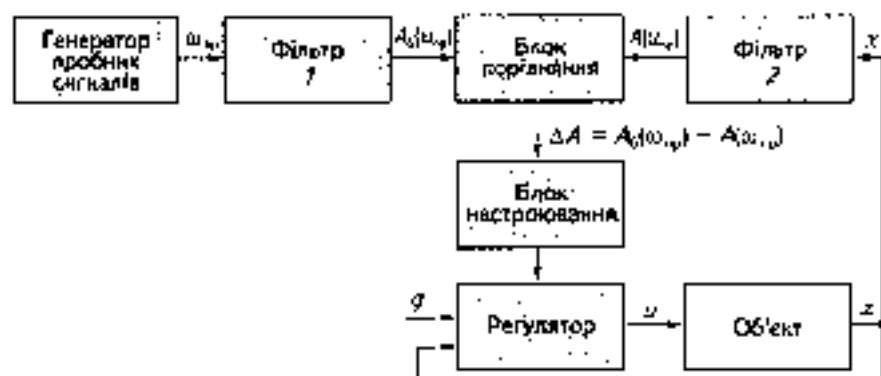


Рис. 12.15

статна характеристика $A_0(\omega)$ фільтра відповідає бажаній характеристикі замкнутої системи, що настроюється. Вузкосмутовий фільтр 2 настроєний на частоту ω_{np} і вибірає амплітуду коливаючої складової вихідної величини x на частоті ω_{np} . Блок порівняння визначає відхилення амплітуди від бажаного значення $\Delta A(\omega_{np}) = A_0(\omega_{np}) - A(\omega_{np})$. Блок налаштування змінює параметри регулятора так, щоб усунути відхилення амплітуд або звести його до допустимого мінімуму.

Для нестационарних об'єктів класична частотна характеристика, точно кажучи, втрачає сенс. Тому розглянутий принцип побудови систем є справедливим тільки за досить повільного змінювання параметрів об'єкта, тобто для квазістационарних режимів.

Самонастроювальну систему з інформацією про часові характеристики можна побудувати так. В аналізаторі 2 (див. рис. 12.14) обчислюється оптимізація імпульсна перехідна функція системи, а в аналізаторі 1 — дійсна. Блок порівняння визначає різницю цих функцій, яка використовується для налаштування параметрів регулятора. Для побудови таких систем застосовуються цифрові обчислювальні пристрої.

Практичне застосування набули простіші аналогові системи, незважаючи на їхні порівняно обмежені можливості адаптації. Розглянемо одну з таких систем.

Функціональну схему самонастроювальної системи з інформацією стосовно процесів на межі стійкості подано на рис. 12.16. Подібну систему можна застосовувати для керування нестационарними об'єктами, якщо необхідно підтримувати коефіцієнти, поділені на

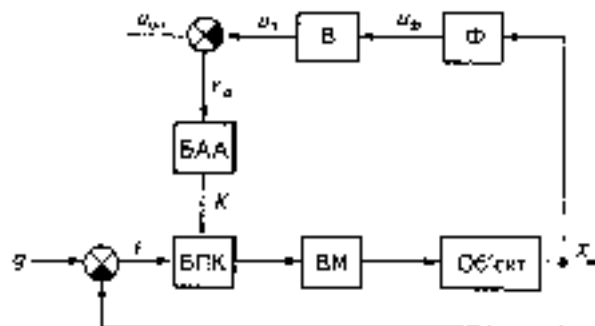


Рис. 12.16

максимальному рівні, допустимому за умов стійкості лінеаризованої системи.

Розглянемо роботу цієї схеми. Нехай у початковий момент часу система перебуває в зоні стійкості, й автоколивання відсутні. Тоді напруги u_1 на виході фільтра, що настроєний на

частоту автоколивань, і u_2 на виході випрямача B дорівнюють нулю. Олорна напруга u_{ref} надходить на вхід блока алгоритму адаптації БАА, що керує блоком перестроювального коефіцієнта БПК. Блок БАА має інтегрувальну ланку, тому коефіцієнт K збільшуватиметься доплі, аки система не вийде на межу стійкості й у ній виникнуть автоколивання. Збільшення коефіцієнта K призводить, коли сигнал на вході блока БАА $e_s = u_{ref} - u_1$ дорівнюватиме нулю. Допустима амплітуда автоколивань задасться величиною олорної напруги u_{ref} .

Алгоритм адаптації, що реалізуються в блоці БАА, звичайно має вигляд

$$K = a_1 \int e_s dt + a_2 e_s + K_{01},$$

де $K_{01} \gg \cos \Delta$.

12.6

Адаптивні спостерігачі

Розглянемо об'єкт, передаточна функція якого має вигляд (12.49) або (12.50). Позначимо вимірювану вихідну величину об'єкта через y і рівняння (12.51) запишемо так:

$$\begin{aligned} p y(p) = & \alpha_n y(p) + \frac{\alpha_1}{p + \lambda_1} y(p) + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{p + \lambda_{n-1}} y(p) + \\ & + u_n u(p) + \frac{\alpha_{n+1}}{p + \lambda_{n+1}} u(p) + \dots + \frac{\alpha_{n+m}}{p + \lambda_{n+m}} u(p). \end{aligned} \quad (12.60)$$

Припустимо, що

$$y(p) = x_1(p); \quad (12.61)$$

$$x_2(p) = \frac{\alpha_1}{p + \lambda_2} y(p) + \frac{\alpha_{n-1}}{p + \lambda_2} u(p); \quad (12.62)$$

$$x_3(p) = \frac{\alpha_2}{p + \lambda_3} y(p) + \frac{\alpha_{n-2}}{p + \lambda_3} u(p); \quad (12.63)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n(p) = \frac{\alpha_{n-1}}{p + \lambda_n} y(p) + \frac{\alpha_{2n-1}}{p + \lambda_n} u(p), \quad (12.64)$$

тоді рівняння (12.60) у формі Коші матимуть вигляд

$$\begin{cases} dx_1/dt = \alpha_n x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + \alpha_1 u, \\ dx_2/dt = \alpha_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + \alpha_{n-1} u, \\ dx_3/dt = \alpha_2 x_1 - \lambda_3 x_3 + \alpha_{n-2} u, \\ \dots \dots \dots \\ dx_n/dt = \alpha_{n-1} x_1 - \lambda_n x_n + \alpha_{2n-1} u, \end{cases} \quad (12.65)$$

або в матричній формі —

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \alpha_n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & -\lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & -\lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1} & 0 & 0 & \dots & -\lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \\ \alpha_{n+2} \\ \dots \\ \alpha_{2n-1} \end{bmatrix} u. \quad (12.66)$$

Це рівняння можна записати у компактнішій формі, якщо ввести блочну матрицю:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{h}^T \\ \alpha^{(B)} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \alpha^{(2)} u, \quad (12.67)$$

де $\mathbf{x}$ — n -вимірний вектор змінних стану об'єкта, причому $x_1 = y$ — вимірювана змінна, решта змінних невимірювані; $\alpha^{(1)} = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ —

$\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}]^T$; $\alpha^{(2)} = [\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_{2n-1}]^T$; $h^T = [1, 1, \dots, 1]$; $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n]$ — діагональна матриця. Тобто матриця, всі елементи якої, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю; $\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ — задані додатні числа.

Якщо врахувати, що змінна $y = x_1$ вимірювана, то рівняння (12.67) можна подати у вигляді

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & ; & h^T \\ . & . & \\ \bar{\alpha}^{(1)} & ; & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_n \\ . \\ \alpha^{(2)} \end{bmatrix} u, \quad (12.68)$$

де $\bar{x}$ — $(n-1)$ -вимірний вектор, компонентами якого є невимірювані змінні $x_2, x_3, \dots, x_n$;

$$\bar{x} = [x_2, x_3, \dots, x_n]^T;$$

$$\bar{\alpha}^{(1)} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}]^T;$$

$$\bar{\alpha}^{(2)} = [\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{2n-1}]^T.$$

Рівняння (12.68) можна подати у вигляді двох рівнянь:

$$\dot{y} = \alpha_0 y + h^T \bar{x} - \alpha_n u; \quad (12.69)$$

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\alpha}^{(1)} y - \Lambda \bar{x} + \bar{\alpha}^{(2)} u. \quad (12.70)$$

Із рівняння (12.70) випливають такі зображення Лапласа:

$$sX_1(s) - \alpha_0 Y(s) - \lambda_1 X_1(s) + \alpha_{n+1} U(s);$$

$$sX_2(s) - \alpha_1 Y(s) - \lambda_1 X_2(s) + \alpha_{n+2} U(s),$$

$$\dots$$

$$sX_n(s) - \alpha_{n-1} Y(s) - \lambda_n X_n(s) + \alpha_{2n-1} U(s),$$

звідки

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{\alpha_1}{s + \lambda_1} Y(s) + \frac{\alpha_{n+1}}{s + \lambda_1} U(s), \\ X_2(s) = \frac{\alpha_2}{s + \lambda_1} Y(s) + \frac{\alpha_{n+2}}{s + \lambda_1} U(s), \\ \dots \\ X_n(s) = \frac{\alpha_{n-1}}{s + \lambda_n} Y(s) + \frac{\alpha_{2n-1}}{s + \lambda_n} U(s). \end{cases} \quad (12.71)$$

Оскільки

$$\mathbf{h}^T \bar{\mathbf{x}} = x_2 + x_1 + \dots + x_n,$$

то зображення рівняння (12.69) матиме вигляд

$$Y(s) = \frac{1}{s} \left\{ \alpha_n Y(s) + \alpha_n U(s) + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{\alpha_i}{s + \lambda_{i+1}} Y(s) + \frac{\alpha_{i+1}}{s + \lambda_{i+1}} U(s) \right] \right\}. \quad (12.72)$$

Структурну схему об'єкта, побудовану за виразом (12.72), наведено на рис. 12.17.

Враховуючи, що зображення рівняння (12.70) можна подати у вигляді (12.71), і використовуючи теорему зображення (теорему Бореля), запишемо розв'язок рівняння за початкових умов $x(0)$.

$$x(t) = e^{-\lambda_1 t} x(0) + \int_0^t \alpha^{(1)} e^{-\lambda_1(t-\tau)} y(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t \bar{\alpha}^{(2)} e^{-\lambda_2(t-\tau)} u(\tau) d\tau. \quad (12.73)$$

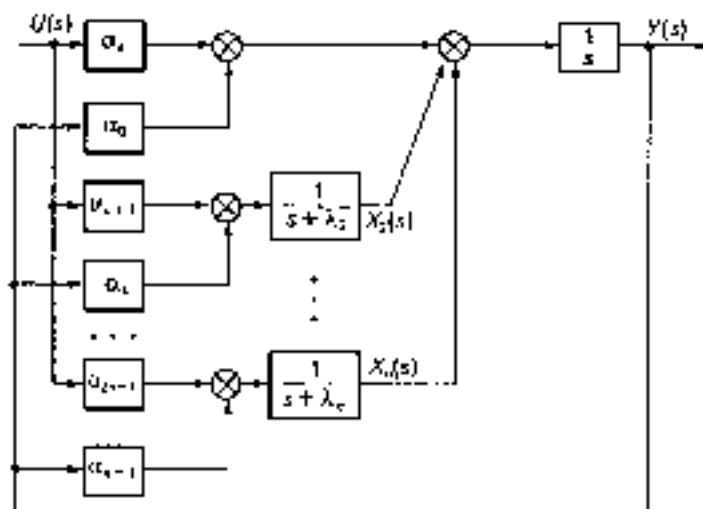


Рис. 12.17

Підставимо цей вираз у (12.69), тоді

$$\begin{aligned} \dot{y} = & \alpha_n y + h^1 e^{-\lambda^1 t} \bar{x}(0) + \int_0^t h^1 e^{-\lambda^1(t-\tau)} \bar{u}(\tau) d\tau - \\ & + \int_0^t h^1 e^{-\lambda^1(t-\tau)} u(\tau) d\tau + \alpha_n u. \end{aligned} \quad (12.74)$$

Структурну схему, наведену на рис. 12.17, можна подати у вигляді, зображеному на рис. 12.18, якщо шість векторів z і y компонентами $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ і $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Беручи початкові умови $z(0) = u(0) = 0$ і використовуючи теорему згоріння, дістаємо

$$y(t) = \int_0^t h^1 e^{-\lambda^1(t-\tau)} u(\tau) d\tau; \quad (12.75)$$

$$z(t) = \int_0^t h^1 e^{-\lambda^1(t-\tau)} y(\tau) d\tau. \quad (12.76)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \dot{y} = & \alpha_n y + \int_0^t h^1 e^{-\lambda^1(t-\tau)} u(\tau) d\tau + \alpha_n u + \\ & + \int_0^t h^1 e^{-\lambda^1(t-\tau)} u(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (12.77)$$

Вирази (12.74) і (12.77) порівнюються лише членом $p(t) = h^1 e^{-\lambda^1 t} \bar{x}(0)$, тому якщо в схемі на рис. 12.18 додати зображення $p(s)$, то схеми на рис. 12.17 і 12.18 будуть повністю еквівалентними.

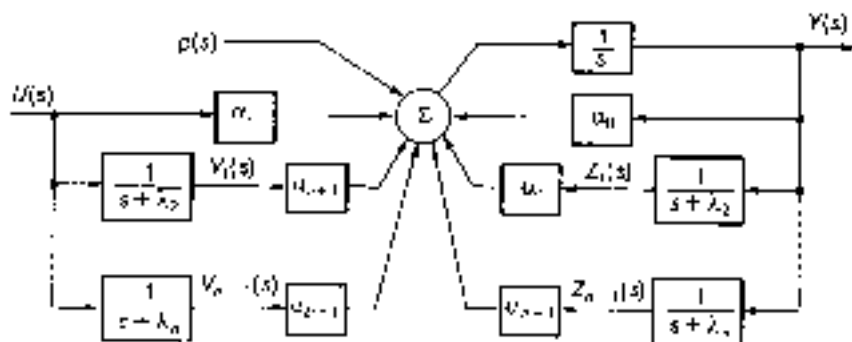


Рис. 12.18

Рівняння, що описують структурну схему на рис. 12.18, мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} dy/dt &= \alpha_0 y + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_{n-1} z_{n-1} + \\ &+ \alpha_{n+1} v_1 + \alpha_{n+2} v_2 + \dots + \alpha_{2n-1} v_{n-1} + \alpha_n u - \rho_1 \\ dz_1/dt &= y - \lambda_1 z_1, \\ dz_2/dt &= y - \lambda_2 z_1, \\ &\dots \dots \dots \\ dz_{n-1}/dt &= y - \lambda_n z_{n-1}, \\ dv_1/dt &= u - \lambda_1 v_1, \\ dv_2/dt &= u - \lambda_2 v_2, \\ &\dots \dots \dots \\ dv_{n-1}/dt &= u - \lambda_n v_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (12.78)$$

Ці рівняння точно описують певний об'єкт, позначений рівняннями (12.65). Проте цих рівнянь на $n-1$ більше, тому рівняння (12.78) називають *немінімальною реалізацією певного об'єкта*.

Рівняння (12.78) можна подати в матричній формі

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & \alpha^{(1)} & \alpha^{(2)} \\ \mathbf{h} & -A & 0 \\ 0 & 0 & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_a \\ 0 \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rho, \quad (12.79)$$

$$\begin{aligned} \text{we } \quad \mathbf{z} &= [z_1, z_2, \dots, z_{n-1}]^T; & \mathbf{v} &= [v_1, v_2, \dots, v_p]^T, & \mathbf{h} &= [1, 1, \dots, 1]^T; \\ \bar{\alpha}^{(1)} &= [\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{1,n-1}]; & \bar{\alpha}^{(p)} &= [\alpha_{p,1}, \alpha_{p,2}, \dots, \alpha_{p,n-1}]; \\ \Delta &= \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}]. \end{aligned}$$

Для визначення векторів $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ невідомих параметрів об'єкта і вектора $X(t)$ змінних стану використовуємо модель, що наведено в рис. 12.19.

Рівняння, котрі описують модель, що нагрівається, зі складовою з рівняннями (12,79) запишемо у вигляді

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_w \\ \dot{z} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 + \lambda_1 & \bar{\beta}^{(1)} & \bar{\beta}^{(2)} \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 - \lambda_1 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x_w \end{bmatrix}, \quad (12.80)$$

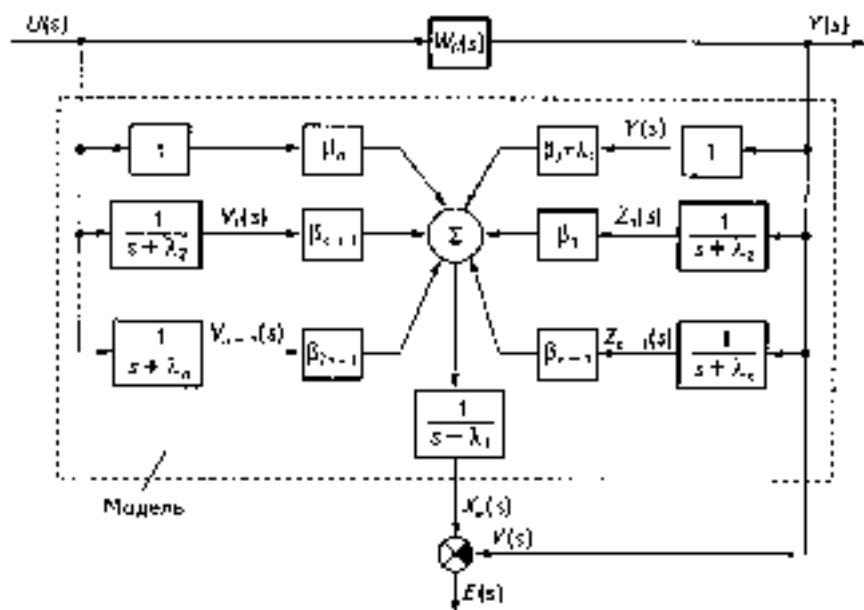


Рис. 12.19

де $\beta_1(t); \beta_2(t); \dots; \beta_{n-1}(t)$; $\beta_n(t)$ — параметри, що настраюються.

Алгоритм настроювання параметрів моделі описується рівняннями (12.58), (12.59).

Збіжність процесу настроювання

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^{(1)} = \alpha^{(1)}; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \beta^{(2)} = \alpha^{(2)} \quad (12.81)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$$

можна довести, використовуючи другий (прямий) метод Ляпунова. Протягом збіжності процесу настроювання стають відомими вектори $\alpha^{(1)}$ та $\alpha^{(2)}$ об'єкта.

Спостеріган, тобто процес, що забезпечує відновлення значення вектора $\bar{x}(t)$, який складається з невимірюваних компонент вектора $x(t)$, та вимірюваннями керування $u(t)$ і вимірної величини об'єкта $y(t)$, можна реалізувати таким чином. Рівняння (12.71) подімо у вигляді

$$\bar{X}_1(s) = \frac{\alpha_{n-1}}{s + \lambda_1} Y(s) + \frac{\alpha_{n-1-1}}{s + \lambda_1} U(s)$$

або з урахуванням (12.80)

$$\bar{X}_1(s) = \frac{\beta_{n-1-1}}{s + \lambda_1} Y(s) + \frac{\beta_{n-1-1}}{s + \lambda_1} U(s).$$

Тоді, беручи до уваги (12.75) і (12.76), запишемо

$$\bar{x}_1(t) = \sum_{i=1}^n \beta_{i-1-1} z_{i-1-1}(t) + \sum_{i=1}^n \beta_{n-i-1} v_{i-1-1}(t). \quad (12.82)$$

З цього виразу випливає, що компоненти шуканого вектора $x(t)$ можна визначити, вимірюючи змінні стану $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1}$ моделі, що настроюється, і таким чином реалізувати адаптивний спостережач.

Розглянута система є системою адаптивного керування ідентифікацією за допомогою моделі, що настроюється.

12.7

Адаптивні системи з еталонною моделлю

В адаптивних системах з еталонною моделлю бажаний рух об'єкта (мета керування) задається моделлю, що є зразком або еталоном для об'єкта і тому називається *еталонною моделлю*. Моделю становить естаціонарну динамічну ланку з відомими параметрами, на вхід якої подають такі самі дії, що й на вхід об'єкта керування. Модель вибирається заздалегідь згідно з апріорною інформацією про вхідні дії. Задаваною системі є настроювання параметрів основного контура під параметри еталонної моделі.

Функціональну схему одновимірної адаптивної системи з еталонною моделлю наведено на рис. 12.20. Різниця вихідних сигналів об'єкта й моделі подається на вхід адаптивного регулятора і змінює його параметри так, щоб передаточна функція об'єкта з регулятором збігалася з передаточною функцією моделі. У цьому разі вихідні сигнали моделі й об'єкта збігаються і $\varepsilon = 0$.

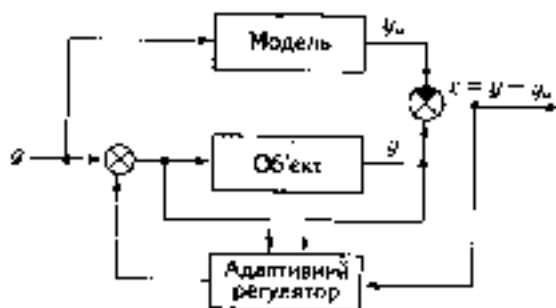


Рис. 12.20

Розглянемо випадок, коли об'єкт має передавальну функцію

$$W_1(p) = \frac{1}{p + a(t)}$$

і охоплений зворотним зв'язком (рис. 12.21)

Параметр об'єкта $a(t)$ є функцією часу. Задаванням контура самонастроювання є зміна

коефіцієнта k у колі зворотного зв'язку для забезпечення мінімального розузгодження між вхідним сигналом об'єкта $y(t)$ і моделі $y_m(t)$ при змінюванні параметра об'єкта $a(t)$.

Вважатимемо, що змінний параметр об'єкта

$$a(t) = a_1 + \Delta a(t),$$

де $a_1 = \text{const}$, а настроюваний коефіцієнт зворотного зв'язку

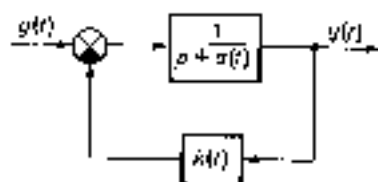


Рис. 12.21

$$k(t) = k_0 + \Delta k(t)$$

У цьому разі передаточна функція основного контура (об'єкта, охопленого зворотним зв'язком) запишеться так:

$$W(p) = \frac{1}{p + a_1 + k_0 + \Delta a(t) + \Delta k(t)}$$

Передаточну функцію моделі візьмемо у вигляді

$$W_m(p) = \frac{1}{p + b}$$

$$\text{де } b = a_1 + k_0 = \text{const}$$

Диференціальні рівняння, що описують рух основного контура системи й моделі,

$$dy/dt + [b + \Delta a(t) + \Delta k(t)]y = g(t); \quad (12.83)$$

$$dy_m/dt + by_m = g(t) \quad (12.84)$$

Віднісши (12.84) від (12.83) та беручи до уваги, що $x = y - y_d$, та $dx/dt = dy/dt - dy_d/dt$, дістанемо рівняння відносно похибки розузгодження $e(t)$

$$dx/dt + bc = -[\Delta a(t) + \Delta k(t)]x. \quad (12.85)$$

Якщо є розглядати як координатне розузгодження рухів системи та еталонної моделі, то величину

$$\gamma = \Delta a(t) + \Delta k(t) \quad (12.86)$$

можна вижати параметричним розузгодженням. При $\gamma \neq 0$ $b > 0$ розузгодження є асимптотично прямус до нуля.

Вважатимемо, що самонастроювання здійснюється явковим пристроєм, який змінює коефіцієнт k . Якщо припустити, що виконавчий пристрій є інтегруючою ланкою, то

$$d\Delta k(t)/dt = \psi(x), \quad (12.87)$$

де $\psi(x)$ — шуканий закон керування в контурі самонастроювання.

Рівняння (12.85) запишемо у вигляді

$$dx/dt = -bc - \gamma x \quad (12.88)$$

Тоді, диференціювавши (12.86), з урахуванням (12.87) дістанемо

$$d\gamma/dt = d\Delta a(t)/dt + \psi(x). \quad (12.89)$$

Невідомий закон керування $\psi(x)$ можна визначити з умов здійснення бажаного руху зображуючої точки по площині x, γ за рівняннями (12.88) і (12.89).

Скористаємося для цього прямим методом Ляпунова. Візьмемо визначено-додатну функцію

$$V = cx^2 + \gamma^2,$$

де $c > 0$. Крім того, вважатимемо об'єкт квазістаціонарним, тобто прийнемо, що параметри об'єкта за час перестроювання коефіцієнта k не змінюються, отже, $d\Delta a(t)/dt = 0$. Тоді повна похідна функції Ляпунова

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{dt} = 2cx \frac{dx}{dt} + 2\gamma \frac{d\gamma}{dt} \quad (12.90)$$

або, якщо врахувати рівняння (12.88) і (12.89), то

$$dV/dt = -2\alpha r^2 b - 2\alpha \gamma v + 2\gamma \psi(r). \quad (12.91)$$

Якщо прийняти

$$\psi(r) = \epsilon \epsilon r,$$

де v — алгоритм самонастроювання, то похідна функції Ляпунова

$$dV/dt = -2\alpha r^2 b$$

є недодатною функцією для визначено-додатної функції V . Тому нульовий розв'язок $\epsilon = 0$, $\gamma = 0$ системи рівнянь (12.88), (12.89) є стійким.

Отже, закон змінювання коефіцієнта зворотного зв'язку в основному контурі набуде такого вигляду:

$$k(\epsilon) = k_0 + \Delta k(t),$$

де

$$d\Delta k(t)/dt = \alpha \epsilon r$$

Структурну схему цієї адаптивної системи з еталонною моделлю зображено на рис. 12.22.

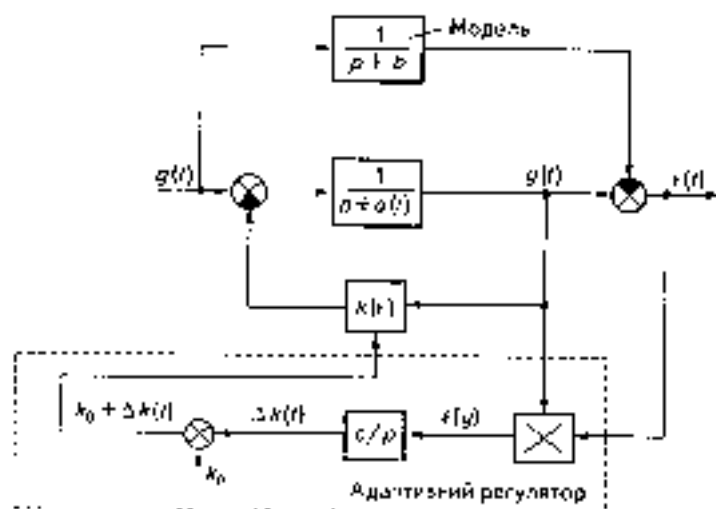


Рис. 12.22

Контрольні запитання та завдання

1. Дайте визначення адаптивної системи автоматичного керування. Чим вона відрізняється від звичайної?
2. У чому полягає проблема квазістаціонарності?
3. Дайте визначення екстремальної системи.
4. Назвіть методи (принципи) пошуку екстремуму в одно- і багатопараметричних екстремальних системах.
5. Якими показниками характеризується динаміка екстремальних систем?
6. Що таке втрата на рискання?
7. Як впливає інерційність об'єкта на процес пошуку екстремуму?
8. Назвіть мету ідентифікації об'єкта керування.
9. У чому полягає частотний метод ідентифікації?
10. Поясніть суть ідентифікації за допомогою моделі, що настроюється.
11. Поясніть принципи побудови безпошукових адаптивних систем.
12. Наведіть структурну схему системи з адаптивним спостереженням і поясніть принципи дії.
13. Яким чином задається бажаний рух в адаптивних системах з етапним моделлю?
14. Наведіть функціональну схему одновимірної адаптивної системи з етапною моделлю і поясніть принципи дії.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- Александров А. Г.* Оптимизальные и адаптивные системы. — М.: Высш. шк., 1989. — 263 с.
- Архиповский В. И., Горюнов И. И., Гриболовский Г. Г., Радвинский Н. А.* Системы фазно-управления. — К.: Техніка, 1997. — 269 с.
- Архиповский В. И., Горюнов И. И., Гриболовский Г. Г., Радвинский Н. А.* Нейронные сети в системах автоматизации. — К.: Техніка, 1999. — 364 с.
- Батманов А. В., Нойков В. А., Соколовский Г. Г.* Управление электроприводом. — Л.: Энергоиздат, 1982. — 392 с.
- Батманов А. В., Пестырева Ю. В.* Примеры расчета автомата управления электропривода на ЭВМ. — Л.: Энергоиздат, 1990. — 512 с.
- Бессекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. — 3-е изд., пер. — М.: Физматгиз, 1975. — 768 с.
- Бессекерский В. А.* Цифровые автоматические системы. — М.: Наука, 1970. — 576 с.
- Власов К. П.* Специальный курс по теории автоматического управления. — Х.: Харьк. политехн. уч-т, 1974. — 198 с.
- Гертов В. А., Рабирович В. П., Владимировский Л. М.* Унифицированные системы авторегулировки электроприводов в металлургии. — М.: Металлургия, 1977. — 190 с.
- Груша В. И., Павлович А. Г., Малиновский К. Ю.* Промышленная кибернетика. — К.: Наук. думка, 1986. — 447 с.
- Зайцев Г. Ф., Кокоток В. И., Чинга Н. П.* Основы автоматического управления и регулирования. — К.: Техніка, 1975. — 496 с.
- Исата Р. В.* Методы вычислений на ЭВМ. — К.: Наук. думка, 1986. — 581 с.
- Клепач В. Б., Пазис Ф., Клепач А. Я., Глебов О. Д.* FUZZY-регулятор для устранения в машинах и механизмах аномального протекания

средствами электропривода / Вестник НТУ «ХПИ». Проблемы автоматизации электропривода: Теория и практика. — 2000. — Вып. 10. — С. 421—424.

Красовский А. А. Системы автоматического управления полетом и их линеаризованное конструирование. — М.: Наука, 1973. — 358 с.

Крутько Л. Д. Вариационные методы синтеза систем с цифровыми регуляторами. — М.: Спб. радио, 1967. — 438 с.

Курашвили П. В. Теория автоматического управления. — М.: Высш. шк., 1973. — 328 с.

Маларов И. М., Менский Б. М. Линейные автоматические системы. — М.: Машиностроение, 1977. — 464 с.

Марчук Г. Н. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1980. — 534 с.

Павлов А. А. Синтез релейных систем, оптимизация по быстродействию. — М.: Наука, 1966. — 390 с.

Пальмин Н. П. Качество процессов синтеза корректирующих устройств в нелинейных автоматических системах. — М.: Наука, 1975. — 368 с.

Панов Е. Н. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. — М.: Наука, 1988. — 256 с.

Половин М. Г., Дзюбский О. Ю., Киселев В. Б. и др. Электромеханические системы автоматического управления тягоэлектроприводами. — К.: Либидь, 2005. — 680 с.

Прикладные нечеткие системы / Под ред. Т. Тараню. — М.: Мир, 1993. — 386 с.

Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / Под ред. В. А. Бесекерского. — М.: Наука, 1978. — 512 с.

Скворцов Л. В. Синтез корректирующих устройств судовых следящих систем. — Л.: Судостроение, 1968. — 252 с.

Сурманов Я. Ф. Справочник по расчетам судовых автоматических систем. — Л.: Судостроение, 1977. — 376 с.

Теория автоматического управления. В 2 ч. — 2-е изд. — Теория линейных систем автоматического управления / Под ред. А. А. Воронова. — М.: Высш. шк., 1986. — Ч. 1. 367 с.

Теория автоматического управления. В 2 ч. — 2-е изд. — Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / Под ред. А. А. Воронова. — М.: Высш. шк., 1986. — Ч. 2. 504 с.

Ту Ю. Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. — М.: Машиностроение, 1964. — 703 с.

Цыдыкян Я. З. Основы теории автоматических систем. — М.: Наука, 1977. — 560 с.

Юренич Е. Н. Теория автоматического управления. — 2-е изд. — Л.: Энергия, 1975. — 416 с.

Передмова	3
Глава 1. Загальні відомості про системи автоматичного керування	6
1.1. Основні поняття	6
1.2. Короткі історичні відомості про розвиток інформатики, теорії автоматичного керування та кібернетики	8
1.3. Система автоматичного керування та її елементи	15
1.4. Системи автоматичного регулювання	17
1.5. Принципи автоматичного керування. Комбіновані системи автоматичного керування	19
1.6. Види систем автоматичного керування	21
1.7. Основні загальні відомості про елементи САК та їхні особливості. Класифікація елементів	41
1.8. Зовнішні зв'язки в системах автоматичного регулювання. <i>Контрольні завдання та завдання</i>	44 49
Глава 2. Основні завдання й особливості теорії автоматичного керування	51
2.1. Теорія автоматичного керування і регулювання	51
2.2. Статика систем автоматичного регулювання. Умови статичної рівноваги і статичні характеристики ланок	53
2.3. Статичні похибки і коефіцієнт передачі підсилення	57
2.4. Форми закону рівнянь статички	60
2.5. Динаміка систем автоматичного регулювання. Завдання й особливості загальної методики дослідження	61
2.6. Лінеаризація нелинійних рівнянь. Приклади	63
2.7. Форми закону рівнянь динаміки. Приклади складаних рівнянь ланок	66
2.8. Коефіцієнт самонаврівноваження та його вплив на характер перехідних процесів	69
2.9. Рівняння машини-двигуна з одним ступенем швидкості. <i>Контрольні завдання та завдання</i>	71 74
Глава 3. Математичне описання лінійних неперервних систем автоматичного керування	75
3.1. Типові елементи (ланки) систем автоматичного керування	75
3.2. Приклад складаних рівнянь тиристорного перетворювача слідкуючого за ланки із зрівнюванням	86
3.3. Передаточні функції та частотні характеристики	89
3.4. Передаточні функції та частотні характеристики типових ланок. Приклади побудови. Загальні відомості про частотні характеристики	90
3.5. Рівняння динаміки, передаточні функції і амплітудно-фазові частотні характеристики груп ланок при різнорідних зв'язках	93

3.6.	Логарифмічні частотні характеристики	99
3.7.	Мінімально- та чотирьохмілінарно-фазові ланки	116
3.8.	Рівняння, передаточні функції та частотні характеристики систем автоматичного керування	117
3.9.	Приклад знаходження рівняння динаміки системи стабілізації напруги генератора постійного струму	124
3.10.	Рівняння і передаточні функції автоматичних слідкувальних (протраєних) систем	132
3.11.	Приклад знаходження рівняння динаміки слідкувальної системи	136
3.12.	Структурні схеми та їх перетворення	143
3.13.	Графи та їх використання в теорії автоматичного керування	151
3.14.	Багатомірні системи та метод змінних стану	156
	<i>Контрольні завдання та задачі</i>	172
Глава 4.	Стійкість неперервних лінійних систем автоматичного керування	173
4.1.	Поняття стійкості САК	173
4.2.	Стійкість за Ляпуновим	175
4.3.	Дослідження стійкості за коренями характеристичного рівняння	176
4.4.	Алгебраїчні критерії стійкості	181
4.5.	Частотні критерії стійкості. Критерій Михайлова	190
4.6.	Дослідження стійкості за допомогою побудови зон стійкості (метод <i>D</i> -розбиття)	198
4.7.	Критерій стійкості Найквіста	204
4.8.	Критерій Найквіста у логарифмічній формі	221
4.9.	Дослідження стійкості систем із запізненням	231
4.10.	Структурно-нестійкі системи і коректуральні ланки	234
	<i>Контрольні завдання та задачі</i>	240
Глава 5.	Якість лінійних неперервних систем автоматичного керування і методи їх оцінки.	241
5.1.	Загальні відомості про якість САК	241
5.2.	Дослідження якості на основі рівняння неперервних коливань	244
5.3.	Наближені методи оцінки якості	251
5.4.	Чутливість САК.	260
	<i>Контрольні завдання та задачі</i>	262
Глава 6.	Підвищення якості та синтез лінійних систем автоматичного регулювання	283
6.1.	Початки в САК	283
6.2.	Типові режими роботи і знаходження циклограм САК	286
6.3.	Основні шляхи підвищення точності керування. Замикання системи	290
6.4.	Типові закони регулювання. Введення астатизму і регулювання за помилками	293

6.5.	Точність САР в установлених динамічних режимах	305
6.6.	Підвищення точності САР на основі принципу шквартності	308
6.7.	Підвищення точності в комбінованих САР і системах зі зміноюю структурою	311
6.8.	Використання невіддільних зв'язаних зв'язків і масштабування	313
6.9.	Технічні реалізації коректувальних пристроїв у схемах автоматичного електричного	314
6.10.	Способи підвищення запасу стійкості	322
6.11.	Синтез коректувальних пристроїв методом ЛАХ	329
6.12.	Послідовні корекції з п'ятикоординатним регулюванням координат	348
6.13.	Моделі керування	357
6.14.	Корекційність і спостережуваність	362
	<i>Контрольні питання та завдання</i>	366
Глава 7.	Випадкові процеси в системах автоматичного керування	368
7.1.	Уявлення про випадкові процеси	368
7.2.	Характеристики стаціонарних випадкових процесів	372
7.3.	Спектральні щільності стаціонарних випадкових процесів	377
7.4.	Продовження стаціонарного випадкового сигналу через лінійну САК	381
7.5.	Розрахунок точності САК за середньоквадратичною похибкою	383
7.6.	Синтез лінійних САК за мінімумом середньоквадратичної похибки	387
	<i>Контрольні питання та завдання</i>	389
Глава 8.	Нелінійні системи автоматичного керування	394
8.1.	Загальні відомості	396
8.2.	Типові нелінійності	391
8.3.	Математичні моделі нелінійних систем	396
8.4.	Стійкість та особливості динаміки нелінійних систем	407
8.5.	Дислізнення нестійких систем методом фазової площини	410
8.6.	Метод Ляпунова	416
8.7.	Абсолютна стійкість. Критерій В.-М. Попова	420
8.8.	Метод показателя перетворення	426
8.9.	Метод порівняльної лінеаризації	429
8.10.	Дислізнення двокоординатним методом гармонічної лінеаризації	437
	<i>Контрольні питання та завдання</i>	451
Глава 9.	Оцінка якості, корекція і синтез нелінійних систем автоматичного керування	455
9.1.	Оцінка якості нелінійних САК	455
9.2.	Загальні відомості про методи синтезу коректувальних пристроїв у нелінійних системах	463

9.3. Синтез лінійних коректувальних пристроїв у нелінійних системах методом ЛАХ	467
9.4. Корекція релейних систем за рахунок утворення координат режимів	474
9.5. Нерівності коректувальних ланок	481
9.6. Компенсація впливу невідомостей	486
<i>Контрольні запитання для закріплення</i>	493

Глава 10. Дискретні системи автоматичного керування 496

10.1. Уведення про дискретні системи. Класифікація дискретних систем	496
10.2. Класифікація імпульсних САК за видами збуджень	498
10.3. Математичні описання імпульсних елементів систем з АІМ	501
10.4. Математичний апарат для дослідження імпульсних САК	509
10.5. Передавальна функція різницевої імпульсної системи	516
10.6. Передавальна функція замкнутої імпульсної системи	520
10.7. Частотні характеристики імпульсних систем	522
10.8. Стійкість імпульсних систем	525
10.9. Якість імпульсних систем	537
10.10. Корекція імпульсних систем	541
10.11. Цифрові системи автоматичного керування	548
10.12. Синтез цифрових коректувальних пристроїв методом ЛАХ	552
<i>Контрольні запитання для закріплення</i>	561

Глава 11. Оптимальні системи автоматичного керування 563

11.1. Завдання оптимального керування	563
11.2. Методи класичного варіаційного числення	566
11.3. Принцип максимуму	575
11.4. Теорема про інтервалію	583
11.5. Динамічне програмування	590
11.6. Аналітичне конструювання оптимальних регуляторів	596
11.7. Застосування методу динамічного програмування для синтезу дискретних (цифрових) регуляторів	601
<i>Контрольні запитання для закріплення</i>	615

Глава 12. Адаптивні системи автоматичного керування 606

12.1. Загальні відомості про адаптивні САК	606
12.2. Системи екстремального керування	609
12.3. Динаміка екстремальних систем	623
12.4. Ідентифікація об'єктів керування	628
12.5. Принципи побудови безпомилкових адаптивних систем	635
12.6. Адаптивні спостеревачі	638
12.7. Адаптивні системи з гнучкими моделями	640
<i>Контрольні запитання для закріплення</i>	649
Список рекомендованої літератури	650

Навчальне видання

**Попович Микола Гаврилович
Ковальчук Олександр Васильович**

**ТЕОРІЯ
АВТОМАТИЧНОГО
КЕРУВАННЯ**

*Художній редактор О. Г. Грошів
Технічний редактор Т. О. Щур
Коректори Л. Ф. Іванова, А. І. Баран, А. В. Бірюшак
Комп'ютерна верстка О. В. Кухаленка*

Різдв. ар. аркуш 50 (11 76, Формат 60 × 84/16. Друк офс. Друк. Тираж. 3000.
Друк. офсет. Ум. друк. арк. 16,14. Обл.-маш. арк. 70,10. Тираж 3400 шт.
Вид. № 4261. Зам. № 6774

Видавничий дім «Додаток»
01104 Київ 4, вул. Паладиївська, 12

Свідоцтво про державну реєстрацію № 404 від 26.04.2001

Видатковий центр НАУ «Білоцерківська книжкова фабрика»
09113, м. Біла Церква, вул. Лесі Українки, 4

